



## Analytical Investigation of Vibration in Switched Reluctance Machines Using Modal Analysis

O. Naderi Samani<sup>1</sup>, S. Taghipour Boroujeni<sup>\*2</sup>, A. Rabiee<sup>3</sup>

\*Professor, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

(Received: 2024/02/28 revised: 2024/06/20 Accepted:2024/07/01 published: 2024/07/22)

### Abstract

*In the presented work, a procedure is proposed for vibration analysis in the switched reluctance machines. The machine geometry, mechanical properties of the used materials, stator winding configuration, and the current waveforms are considered as the model input variables. The mechanical natural frequencies are computed using a simple mechanical model. The stator bore magnetic stress is obtained as a function of time and space by using Maxwell's stress tensor. The required flux density components are obtained by developing an analytical model based on sub-domain analysis. Applying fast Fourier transformation on the computed magnetic stress function, the spectrums of the mechanical modes are obtained and it is found that how they are far from the obtained natural mechanical frequencies. This index is used as a criterion for electromagnetic vibrations. The mechanical and electromagnetic models are verified by means of finite element analysis. Using the developed model, the critical speed values with mechanical resonance are obtained. In addition, using the developed model the effect of the machine load on the mechanical vibrations is investigated.*

**Keywords:** Vibration, Analytical Modeling-Mechanical, Nature Frequency, Sub-Domain Analysis, Modal Analysis, Finite Element Analysis.

\* Corresponding author E-mail: s.taghipour@sku.ac.ir





علمی - پژوهشی

## پیش‌بینی و ارزیابی رفتار لرزشی موتور سوئیچ رلوکتانس به روش تحلیل مودال

امید نادری سامانی<sup>۱</sup>، صمد تقی پور بروجنی<sup>۲\*</sup>، عبدالرضا ربیعی<sup>۳</sup>

۱-دانشجوی دکتری ۲-استاد ۳-دانشیار، دانشگاه شهر کرد، شهرکرد، ایران  
(دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۰۹، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۳/۳۱، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۱۱، انتشار: ۱۴۰۳/۰۵/۰۱)



\* این مقاله یک مقاله با دسترسی آزاد است که تحت شرایط و ضوابط مجوز Creative Commons Attribution (CC BY) توزیع شده است.

© نویسندگان

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع)

### چکیده

در پژوهش پیش رو، یک روش تحلیلی برای ارزیابی رفتار لرزشی ماشین سوئیچ رلوکتانس ارائه شده است. هندسه ی ماشین، ضریب سختی، آرایش سیم پیچی و شکل موج جریان فازها به‌عنوان ورودی مدل در نظر گرفته شده‌اند. در گام نخست با استفاده از یک مدل ساده تحلیلی مکانیکی، فرکانس‌های طبیعی مودهای لرزشی استاتور به دست آمده‌اند. در گام دوم با حل معادلات مشتق جزئی پواسون و لاپلاس حاکم بر ماشین و استفاده از روش زیر دامنه، مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی شار فاصله‌های هوایی محاسبه شده و با استفاده از روابط تنش ماکسول، توزیع مکان-زمان موج فشار مغناطیسی اعمال شده به سطح درونی استاتور به‌دست‌آمده است. سپس با استفاده از تبدیل فوریه سریع، طیف فرکانسی فشار مغناطیسی به‌دست‌آمده در هریک از مودهای مکانیکی مشخص شده و فاصله آنها با فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده از مدل مکانیکی تعیین می‌شود. از این معیار به‌عنوان یک نمایه از کارکرد بدون لرزش ماشین استفاده شده است. مدل‌های الکترومغناطیسی و مکانیکی ارائه شده، توسط روش اجزای محدود تأیید شده‌اند. با استفاده از مدل ارائه شده می‌توان به‌سادگی سرعت بحرانی که در آن لرزش‌های مکانیکی دچار تشدید می‌شوند را به دست آورد. همچنین با استفاده از مدل ارائه شده چگونگی اثرگذاری بار ماشین در لرزش ایجاد شده بررسی شده است.

**کلیدواژه‌ها:** کلیدواژه‌ها: لرزش مکانیکی - الکترومغناطیسی، مدل‌سازی تحلیلی، فرکانس طبیعی، روش اجزای محدود، روش تحلیل دامنه، آنالیز مودال.

### ۱- مقدمه

رتور، فرایند تبدیل انرژی صورت می‌گیرد. در هنگام تحریک یک فاز، یک نیروی جاذبه قوی بین قطب استاتور تحریک شده و قطب رتور مجاور به وجود می‌آید. در هنگام خاموش شدن فاز و تحریک فاز بعدی ناگهان این نیرو از فاز خاموش شونده برداشته شده و به فاز بعدی اعمال می‌شود. این پدیده لرزش و در نتیجه تولید نویز آوایی در محیط را در پی خواهد داشت [۶]. البته به دلیل تقارن ساختار ماشین و تحریک هم‌زمان قطب و دندانه‌هایی که دارای تقارن قطری هستند، برآیند نیروهای الکترومغناطیسی وارد شده بر قطب‌های استاتور برابر صفر است. مؤلفه مماسی نیروها، گشتاور الکترومغناطیسی را تولید کرده و مؤلفه شعاعی آنها، سبب کشش نامتعادل مغناطیسی<sup>۲</sup> (UMP) میان یک دندانه رتور و یک قطب استاتور می‌شود؛ بنابراین نیروهای شعاعی متغیر با زمان به دندانه‌های رتور و استاتور وارد می‌شود. در اثر این

در سال‌های اخیر موتور سوئیچ رلوکتانس<sup>۱</sup> (SRM) به‌عنوان گزینه خوبی برای استفاده در محرکه خودروهای الکتریکی معرفی شده است [۱-۲]. دلیل این موضوع ویژگی‌های خوب آن مانند ساختار ساده و محکم، بازده انرژی خوب، قیمت پایین، کنترل ساده و قابلیت کارکرد در سرعت‌های بالا می‌باشد [۳-۵]. رتور SRM دارای هیچ‌گونه سیم پیچ یا آهنربا نبوده و از استحکام مکانیکی بالایی برخوردار است. کنترل و تولید گشتاور الکتریکی در SRM بسیار ساده بوده و با اعمال یک‌رشته از جریان‌های مشخص به فازهای استاتور انجام می‌شود. اساس تولید گشتاور در این ماشین، تمایل رتور به کمتر کردن رلوکتانس فاصله‌های هوایی است. با تحریک فازها به‌صورت پی‌درپی و متناسب با موقعیت

<sup>2</sup> Unbalance Magnetic Pull

s.taghipour@sku.ac.ir

\* رایانامه نویسنده مسئول:

<sup>1</sup> Switched Reluctance Motor

باتوجه به اهمیت ارائه مدل‌سازی و برای ازمیان‌بردن مشکلات اشاره شده در بالا، در این مقاله یک روش تحلیلی برای پیش‌بینی امکان رخداد تشدید لرزش در SRM ارائه شده است. در ادامه، در بخش دوم مقاله، فرکانس‌های طبیعی مودهای لرزشی توسط یک مدل ساده مکانیکی به‌دست‌آمده‌اند. برای یافتن طیف فرکانسی موج فشار مغناطیسی وارد بر استاتور در مودهای مکانیکی مختلف، یک مدل الکترومغناطیسی در بخش سوم ارائه شده است. در مدل الکترومغناطیسی موردنظر با استفاده از روش تحلیل زیر دامنه<sup>۴</sup> (SA) چگالی شار فاصله‌هواپی مشخص شده و با روش تانسور ماکسول، فشار مغناطیسی به‌صورت یک موج و تابعی از متغیرهای مکانی و زمانی به‌دست‌آمده است. ورودی‌های مدل مکانیکی ابعاد هندسه استاتور و مشخصه‌های مکانیکی (ضریب فنی<sup>۵</sup>) مواد به کار رفته در آن است. ورودی مدل الکترومغناطیسی، ساختار هندسی ماشین، سرعت چرخش رتور و شکل موج جریان‌های استاتور است. این مدل‌ها توسط روش FEA در بخش چهارم درستی آزمایشی شده‌اند. در بخش پنجم با سنجش میزان نزدیکی فرکانس‌های طیف فرکانسی موج فشار الکترومغناطیسی وارد بر محیط داخلی استاتور با فرکانس‌های طبیعی مودهای مکانیکی به‌دست‌آمده، در مورد تشدید لرزش‌های مکانیکی تصمیم‌گیری شده است.

## ۲- فرکانس‌های طبیعی مودهای مکانیکی

اصلی‌ترین دلیل این انتشار نیروی شعاعی وارد شده به سطح داخلی استاتور و تغییر شکل بسیار ناچیز هسته فرم‌مغناطیسی و انتقال ضربه مکانیکی به پوسته استاتور می‌باشد که در نهایت منجر به لرزش پوسته استاتور، باله‌های حرارتی و اجزای متصل به آن می‌شود. این لرزش‌ها هنگامی دارای اهمیت می‌شوند که محتوای فرکانسی آنها در برگیرنده فرکانس‌های طبیعی مکانیکی استاتور باشد. در این صورت لرزش‌های ایجاد شده در فرکانس‌های طبیعی تشدید شده و نویز آوایی شدیدی تولید می‌شود. از این رو محاسبه فرکانس‌های طبیعی مودهای مکانیکی سیستم برای مطالعه پدیده لرزش بسیار ضروری است. در (۱) یک معادله عملی ساده برای فرکانس‌های طبیعی مکانیکی یک استوانه نازک آورده شده است [۲].

$$f_n = \frac{n(n^2 - 1)H_s}{2\pi(R_H + \frac{H_s^2}{4})} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1 - \mu^2)(n^2 + 1)}} \quad (1)$$

نیروهای وارده بر بدنه استاتور، دندانه‌های استاتور و یوغ آن دچار تغییر شکل<sup>۱</sup>، لرزش شده و در پی آن نویز آوایی تولید می‌شود. این لرزش و نویز آوایی در SRM به‌صورت نسبی بالا بوده و مانعی برای کاربرد وسیع SRM می‌باشد. شکل موج نیروهای وارد بر دندانه‌های استاتور بستگی به متغیرهایی همچون شکل موج جریان فازها و طیف هارمونیکی آنها، سرعت ماشین و ترکیب تعداد قطب استاتور و دندانه رتور دارد. در [۷] تابع زمانی نیروهای شعاعی برآیند وارد استاتور در ماشین‌های آهنربایی به‌دست‌آمده است. حال آن‌که برای مطالعات لرزش در SRM نیازمند به دانستن فشار الکترومغناطیسی وارد بر بدنه استاتور می‌باشیم. در یک دسته‌بندی کلی مقالات ارائه شده در زمینه رفتار لرزشی SRM به دسته‌هایی همچون مدل‌سازی لرزش [۸]، کاهش لرزش با بهینه نمودن پارامترهای طراحی ماشین [۹] و همچنین کاهش لرزش با استفاده از شکل دهی جریان فازها (با اعمال تغییر در کنترلر جریان‌ها و انتخاب الگوی کلیدزنی مناسب) [۱۱ و ۱۲] دسته‌بندی می‌شوند. در مطالعه رفتار لرزشی ماشین‌های الکتریکی، سعی بر آن است که فرکانس‌های فشار مغناطیسی تولید شده تا حد امکان از فرکانس‌های طبیعی لرزشی بدنه استاتور دور باشد [۶]. برای یافتن این فرکانس‌های از روش‌های تحلیل پاسخ ضربه چکش<sup>۲</sup> [۱۳ و ۱۴]، روش اجزای محدود<sup>۳</sup> (FEA) [۱۵] و روش تحلیلی [۲] استفاده شده است. البته یافتن فرکانس‌های فشار مغناطیسی موضوع جداگانه‌ای است که در مقالات توسط روش اجزای محدود انجام شده است [۱۴]. در برخی از پژوهش‌ها، برای یافتن لرزش‌ها توابع تبدیلی استفاده شده است که قطب‌های آنها با آزمایش تست ضربه یا شبیه‌سازی‌های FEA به دست می‌آید [۱۴]. همچنین در زمینه مطالعه رفتار لرزشی ماشین، با انجام شبیه‌سازی‌های عددی multiphysics ابتدا فشار مغناطیسی با تحلیل مغناطیسی عددی به دست می‌آید [۱۵]. سپس با امان‌بندی محیط داخلی استاتور و اعمال تابع زمانی فشار مغناطیسی به‌دست‌آمده در شبیه‌سازی مغناطیسی، یک شبیه‌سازی لرزشی انجام شده که خروجی آن جابه‌جایی محیط خارجی استاتور است. به دلیل ماهیت عددی این رشته تحلیل‌ها، انجام این مطالعات و شبیه‌سازی‌ها زمان‌بر بوده و نیازمند به تخصص بالای کاربر در استفاده از نرم‌افزارهای مربوطه است. همچنین در این روش‌ها ارتباط دقیق رفتار سامانه لرزشی با مقادیر پارامترهای هندسی روشن نمی‌باشد.

<sup>1</sup> Deformation

<sup>2</sup> Hammer impulse test

<sup>3</sup> Finite Element Analysis

<sup>4</sup> Sub-domain Analysis

<sup>5</sup> Stiffness Factor

پواسون به صورت (۴) است.

$$R_s < r < R_H \quad (2)$$

$$\varphi_{sj-\min} < \varphi < \varphi_{sj-\max}$$

$$\left. \frac{\partial A_{Si}}{\partial r} \right|_{r=R_H} = \left. \frac{\partial A_{Si}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{sj-\min}} = \left. \frac{\partial A_{Si}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{sj-\max}} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla^2 A_{Sj} = -\mu_0 J_j \quad (4)$$

که  $A$  بردار پتانسیل مغناطیسی و  $J_j$  چگالی جریان الکتریکی در شیار استاتور شماره  $j$  می‌باشد. مقدار  $J_j$  از تقسیم نمودن آمپر دور کل موجود در شیار بر مساحت شیار به دست می‌آید.

ناحیه  $1+Q_s$  در فاصله هوایی، دارای هندسه (۵) و معادله حاکم به صورت (۶) است.

$$R_r < r < R_s \quad (5)$$

$$\nabla^2 A_G = 0 \quad (6)$$

شرایط پیوستگی مؤلفه‌های مماسی و عمودی چگالی شار در مرز دهانه شیارهای استاتور بافاصله هوایی در (۷) داده شده است.

for  $\varphi_{sj-\min} < \varphi < \varphi_{sj-\max}$

$$\left. \frac{\partial A_{Sj}}{\partial r} \right|_{r=R_s} = \left. \frac{\partial A_G}{\partial r} \right|_{r=R_s} \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial A_{Sj}}{\partial \varphi} \right|_{r=R_s} = \left. \frac{\partial A_G}{\partial \varphi} \right|_{r=R_s}$$

شرایط پیوستگی مؤلفه‌های مماسی و عمودی چگالی شار در مرز دهانه شیارهای رتور بافاصله هوایی در (۸) داده شده است.

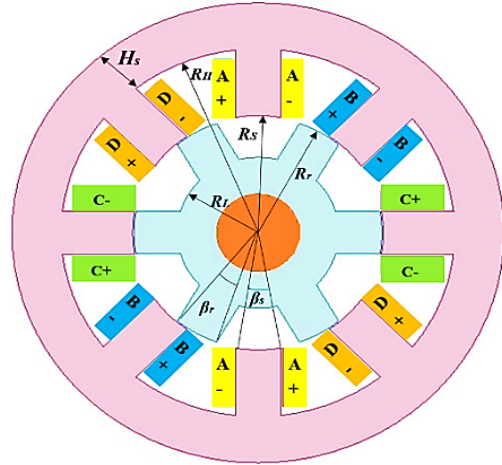
for  $\varphi_{ri-\min} < \varphi < \varphi_{ri-\max}$

$$\left. \frac{\partial A_{Ri}}{\partial r} \right|_{r=R_r} = \left. \frac{\partial A_G}{\partial r} \right|_{r=R_r} \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial A_{Ri}}{\partial \varphi} \right|_{r=R_r} = \left. \frac{\partial A_G}{\partial \varphi} \right|_{r=R_r}$$

ناحیه‌های  $1+Q_s+Q_r$  تا  $2+Q_s+Q_r$  در رتور:  $(i=1,2,\dots,Q_r)$ ، دارای هندسه آورده شده در (۹)، شرایط مرزی (۱۰) و معادله حاکم لاپلاس به صورت (۱۱) است.

که در آن  $f_n$  فرکانس مکانیکی طبیعی در مود  $n$ -ام،  $E$  ضریب کشسانی یا همان ضریب یانگ برحسب  $N/m^2$ ،  $\rho$  چگالی حجمی بر حسب  $kg/m^3$ ،  $\mu$  ضریب پواسون،  $H_s$  ضخامت یوغ استاتور و RH کمترین شعاع یوغ استاتور بر حسب  $m$  می‌باشند.



شکل (۱). هندسه موتور سوئیچ رلوکتانس ۸/۶ چهار فاز

### ۳- مدل سازی الکترومغناطیسی

برای مدل سازی الکترومغناطیسی SRM از حل تحلیلی معادلات مشتق جزئی پواسون و لاپلاس استفاده می‌شود. در فرآیند مدل سازی از اشباع مغناطیسی مواد فرورمغناطیس هسته‌های استاتور و رتور چشم‌پوشی شده، گذردهی مغناطیسی آنها بی‌نهایت در نظر گرفته شده و تقارن دوبعدی بر ساختار ماشین لحاظ شده است. شکل (۱) شماتیک یک موتور سوئیچ رلوکتانس ۸/۶ چهار فاز را نشان می‌دهد. پارامترهای هندسی که بر روی آن نشان داده شده است عبارت‌اند از: شعاع دندانه استاتور،  $R_r$  و  $R_l$  به ترتیب بیشترین و کمترین شعاع دندانه رتور،  $\beta_s$  و  $\beta_r$  کمان‌های دندانه‌های استاتور و رتور، و  $Q_s$  و  $Q_r$  به ترتیب تعداد دندانه‌های استاتور و رتور می‌باشند.

#### ۳-۱. روش تحلیل زیردامنه

به دلیل وجود برجستگی مغناطیسی در سطح رتور و استاتور، استفاده از روش تحلیل زیر دامنه روش مناسبی برای حل معادلات مشتق جزئی حاکم بر فاصله هوایی می‌باشد. در ادامه زیر دامنه‌های در نظر گرفته شده، معادلات حاکم بر آنها و شرایط مرزی آنها آورده شده است. برای سادگی تحلیل دیواره شیارهای رتور و استاتور با زوایای ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

ناحیه‌های ۱ تا  $Q_s$  در استاتور  $(j=1,2,\dots,Q_s)$ ، دارای هندسه آورده شده در (۲)، شرایط مرزی داده شده در (۳) و معادله

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N)^T \\
 \mathbf{b} &= (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N)^T \\
 \mathbf{c} &= (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N)^T \\
 \mathbf{d} &= (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_N)^T \\
 \mathbf{e} &= (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_{Q_r})^T \\
 \mathbf{e}_i &= (e_{i1} \ e_{i2} \ \dots \ e_{iM}) \\
 \mathbf{f} &= (\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \dots \ \mathbf{f}_{Q_s})^T \\
 \mathbf{f}_i &= (f_{i1} \ f_{i2} \ \dots \ f_{iK})
 \end{aligned} \quad (16)$$

### ۳-۲. طیف فرکانسی فشار الکترومغناطیسی

با دانستن توزیع چگالی شار، فشار مغناطیسی شعاعی وارد بر استاتور از رابطه تنش ماکسول به صورت (۱۹) به دست می آید.

$$\sigma = \frac{1}{2\mu_0} (B_{Gr}^2 - B_{G\phi}^2) \quad (19)$$

تابع فشار مغناطیسی دارای دو متغیر مکان (زاویه) و زمان بوده و برای یافتن طیف فرکانسی آن در مدهای مکانیکی، تبدیل فوریه دوبعدی به کار برده شده است. به این منظور ابتدا در هر گام زمانی باتوجه به مقدار لحظه ای زاویه رتور و جریان فازها مقدار فشار مغناطیسی محاسبه شده و با تبدیل فوریه فشار مغناطیسی نسبت به متغیر مکان (زاویه)، دامنه آن در هر یک از مدهای لرزش به دست آمده است. سپس با در نظر گرفتن دامنه فشار مغناطیسی در مدهای مورد نظر در تمام گام های زمانی، تبدیل فوریه نسبت به متغیر زمانی گرفته شده است؛ بنابراین طیف فرکانسی مود مکانیکی به دست خواهد آمد.

$$R_L < r < R_r \text{ and} \quad (9)$$

$$\varphi_{r-\min} < \varphi < \varphi_{r-\max}$$

$$\left. \frac{\partial A_{Ri}}{\partial r} \right|_{r=R_L} = \left. \frac{\partial A_{Ri}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{r-\min}} = \left. \frac{\partial A_{Ri}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{r-\max}} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla^2 A_{Ri} = 0 \quad (11)$$

با استفاده از روش حل جداسازی متغیرها و اعمال شرایط مرزی در ناحیه شیارهای استاتور و رتور با دیواره های آهنی، توابع پتانسیل در شیارهای استاتور، فاصله هوایی و شیار رتور به صورت (۱۲)–(۱۴) به دست می آیند. با در نظر گرفتن  $M$  و  $N$  فرکانس نخست به ترتیب در شیارهای استاتور، فاصله هوایی و شیارهای رتور، متغیرهای مجهول توابع پتانسیل برداری ( $\mathbf{a}$  تا  $\mathbf{f}$ ) به صورت (۱۵) قابل محاسبه می باشند. تعریف متغیرهای  $\mathbf{a}$  تا  $\mathbf{f}$  و رابطه ثوابت به کار رفته در (۱۵)، به ترتیب در (۱۶) و پیوست آورده شده است. با دانستن بردار پتانسیل مغناطیسی در فاصله هوایی  $A_G$ ، مولفه های شعاعی و مماسی چگالی شار فاصله هوایی به صورت (۱۷) و (۱۸) محاسبه می شوند.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K1} & \mathbf{K1} & \mathbf{K2} & \mathbf{K2} & \mathbf{E1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P1} & \mathbf{P2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P1} & \mathbf{P2} & \mathbf{E3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K3} & \mathbf{K3} & \mathbf{K4} & \mathbf{K4} & \mathbf{0} & \mathbf{F1} \\ \mathbf{U} & \mathbf{-U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U} & \mathbf{-U} & \mathbf{0} & \mathbf{F3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{W1} \\ \mathbf{W2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$A_{Ri} = \sum_{m=1}^M e_{im} \left( \left( \frac{r}{R_r} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha}} + \left( \frac{r}{R_r} \right)^{\frac{-m\pi}{\alpha}} \right) \cos \left( \frac{m\pi}{\alpha} (\varphi - \varphi_{r-\max}) \right) \quad (12)$$

$$A_G = \sum_{n=1}^N \left( a_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^n + b_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right) \cos(n\varphi) + \left( c_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^n + d_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right) \sin(n\varphi) \quad (13)$$

$$A_{Sj} = \sum_{k=1}^K f_{ik} \left( \left( \frac{r}{R_H} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha_s}} + \left( \frac{r}{R_r} \right)^{\frac{-k\pi}{\alpha_s}} \right) \cos \left( \frac{k\pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{sj-\max}) \right) + \frac{\mu_0 J_j}{4} (2R_H^2 \ln r - r^2) \quad (14)$$

$$B_{Gr} = -\frac{\partial A_G}{\partial \varphi} = -\sum_{n=1}^N n \left( - \left( a_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^n + b_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right) \sin(n\varphi) + \left( c_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^n + d_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right) \cos(n\varphi) \right) \quad (17)$$

$$B_{G\phi} = \frac{\partial A_G}{\partial r} = \sum_{n=1}^N n R_r \left( \left( a_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{n-1} + b_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-n-1} \right) \cos(n\varphi) + \left( c_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{n-1} + d_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-n-1} \right) \sin(n\varphi) \right) \quad (18)$$

### ۴. راستی آزمایی مدل

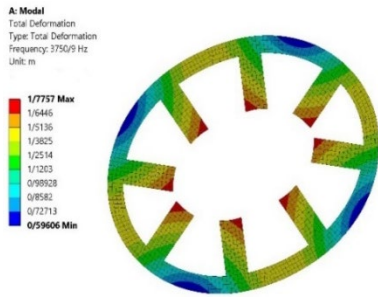
برای راستی‌آزمایی مدل‌های مکانیکی و الکترومغناطیسی، نتایج آن با نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی‌های اجزای محدود مقایسه شده‌اند. مشخصات هندسی ماشین موردنظر و خواص مکانیکی بدنه استاتور در جدول‌های (۱) و (۲) آورده شده است. در شکل (۲) مقادیر فرکانس‌های طبیعی به‌دست‌آمده در مدهای مکانیکی دوم تا دهم با روش تحلیلی ارائه شده در [۲] و روش اجزای محدود مقایسه شده است. همان‌گونه که مشخص است، مدل مکانیکی استفاده شده دارای دقت خوبی در پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی مدهای مکانیکی می‌باشد. شکل مدهای لرزشی به‌دست‌آمده از روش FEA در شکل (۳) آورده شده است.

جدول (۱). خواص مکانیکی استاتور [۵]

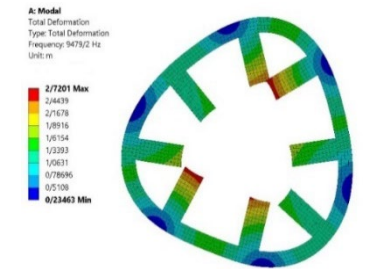
پارامتر	مقدار
ضریب یانگ	$N/m^2 / 0.7 \times 10^{11}$
ضریب پواسون	۰/۳
چگالی حجمی	$kg/m^3 / 7800$

جدول (۲). مشخصات هندسی موتور سوئیچ رلوکناکس ۸/۶ [۶]

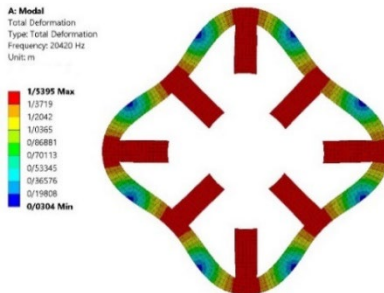
اندازه	پارامتر
۳,۲ میلی‌متر	ضخامت یوغ استاتور ( $H_S$ )
۲۲,۸ میلی‌متر	شعاع داخلی استاتور ( $R_i$ )
۱۲,۵ میلی‌متر	شعاع دندانه استاتور ( $R_S$ )
۱۲,۳ میلی‌متر	شعاع دندانه رتور ( $R_{ro}$ )
۶,۳۵ میلی‌متر	شعاع رتور ( $R_r$ )
۳ میلی‌متر	شعاع داخلی رتور ( $R_{ri}$ )
۸	تعداد شیار استاتور ( $Q_S$ )
۶	تعداد شیار رتور ( $Q_r$ )
۲۴ درجه	زاویه کمان استاتور ( $\beta_S$ )
۲۲,۵ درجه	زاویه کمان رتور ( $\beta_r$ )
۹۰ میلی‌متر	طول محوری ( $L$ )
۱۲۰	تعداد دور سیم‌پیچ هر فاز



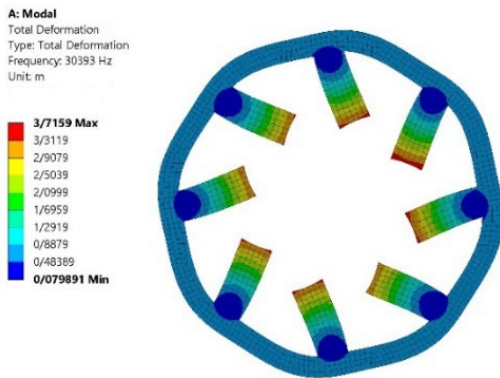
(الف)



(ب)



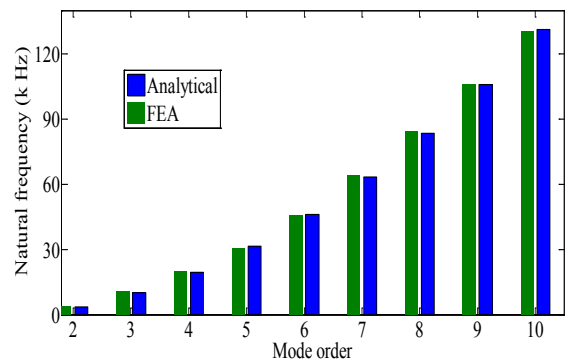
(ج)



(د)

شکل (۳). تغییر شکل استاتور SRM در مدهای (الف) دوم، (ب) سوم، (ج) چهارم و (د) پنجم.

به‌منظور تأیید مدل الکترومغناطیسی، مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی شار فاصله‌هوائی SRM برای یک آمپر جریان در فاز و موقعیت زاویه‌ای رتور در  $\theta_r=0^\circ$ ، در شکل (۴)-الف و ب آورده و با نتایج اجزای محدود مقایسه شده است.



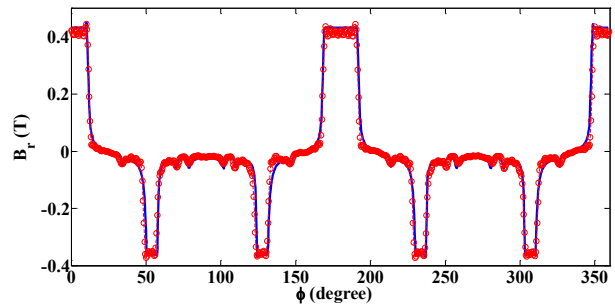
شکل (۲). فرکانس‌های طبیعی استاتور SRM در مدهای مختلف

در آزمایش بعدی با فرض سرعت ۱۵۰۰ rpm برای SRM و تزریق جریان‌های شکل (۵) برای ایجاد حالت موتوری به فازهای آن، گشتاور الکترومغناطیسی از رابطه (۲۰) به دست آمده و در شکل (۶) با نتایج FEA مقایسه شده است. همان گونه که از نتایج شکل‌های (۴) و (۶) مشخص است مدل پیشنهادی توانایی و دقت خوبی در پیش‌بینی متغیرهای الکترومغناطیسی دارد.

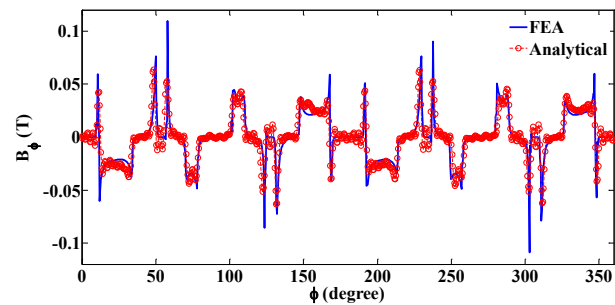
یادآور می‌شود که در شرایط واقعی به دلیل خاصیت سلفی سیم‌پیچ‌ها، جریان‌ها مربعی نمی‌باشند و یافتن شکل موج جریان نیازمند یک مدل دینامیکی فضای حالت با ورودی ولتاژ است. اگرچه می‌توان مدل ارائه شده را توسعه داد و به یک مدل دینامیکی فضای حالت با ورودی‌های ولتاژ تبدیل کرد. از آنجایی که در تحلیل لرزش و یافتن سرعت‌های بحرانی (که در آن تشدید و نویز آوایی اتفاق می‌افتد)، بیشترین تأثیر توسط نخستین مؤلفه‌های فرکانسی ایجاد می‌شود و این مؤلفه‌ها در شکل موج مربعی و شکل موج واقعی هم مرتبه و یکسان هستند، از این رو به منظور سادگی کار و دورنشدن از هدف اصلی مقاله شکل موج‌های جریان به صورت مربعی در نظر گرفته شده‌اند.

## ۵. تحلیل لرزش

به منظور بررسی امکان رخداد پدیده تشدید در لرزش در مودهای مکانیکی در شرایط مختلف کارکرد ماشین، آزمایش‌های گوناگونی در سرعت و بارهای مختلف انجام شده است. در دسته نخست آزمایش‌ها ماشین در شرایط ژنراتوری و در سرعت  $\omega=1500$  rpm چرخانده شده و با تغییر فاز اولیه جریان‌های ماشین مقدار گشتاور الکترومغناطیسی تغییر داده شده است (شکل (۷) الف). در این شرایط مقادیر فرکانس‌های فشار مغناطیسی در مودهای لرزشی مختلف به دست آمده و با فرکانس‌های طبیعی هر مود در شکل (۷) (ب) مقایسه شده است. در این شکل طیف هارمونیک فشار مغناطیسی برای مودهای ۲ تا ۱۰ و ۲۰ فرکانس نخست آن آورده شده است. همچنین به دلیل آنکه دامنه به دست آمده برای مودهای لرزشی فرد (۳، ۵، ۷ و ۹) بسیار ناچیز و در حد صفر بوده است برای صرفه‌جویی نمایش داده نشده‌اند. در سرعت چرخش ۱۵۰۰ rpm طیف فشار مغناطیسی دارای فرکانس پایه ۱،۴۴ k Hz و مضارب صحیح آن می‌باشد. همان گونه که از نتایج آورده شده در شکل (۷) مشخص است، تغییر گشتاور و تغییرات فاز اولیه جریان اثری بر فرکانس مربوط به مودهای فشار مغناطیسی ایجاد شده ندارد. همچنین همان گونه که مشخص است، با کاهش گشتاور، بازه گشتاور صفر افزایش یافته و به دنبال آن دامنه طیف فرکانسی بزرگ‌تر می‌شود که به معنای افزایش نویز صوتی است.

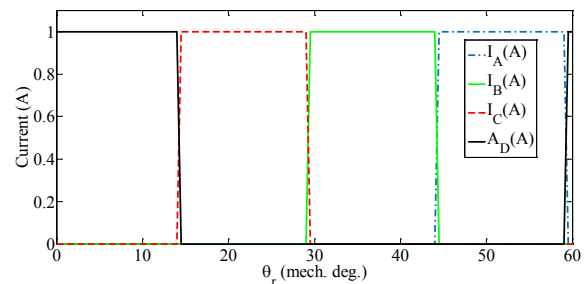


(الف)

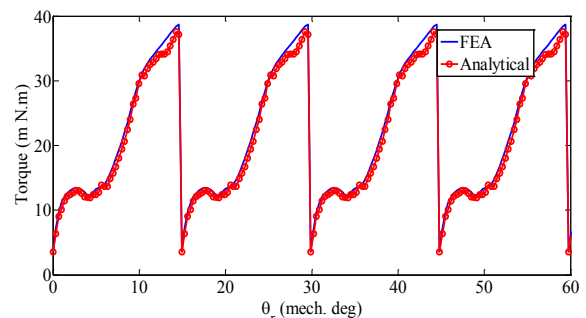


(ب)

شکل (۴). مؤلفه‌های (الف) شعاعی، (ب) مماسی چگالی شار فاصله هوایی به دست آمده با روش‌های تحلیلی و المان محدود



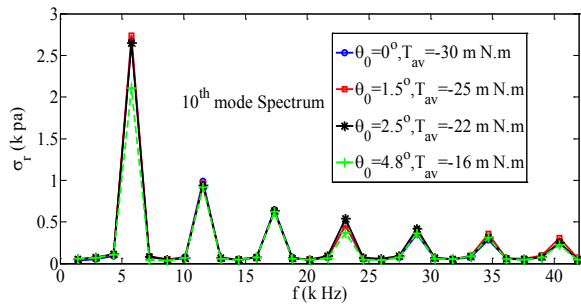
شکل (۵). جریان در نظر گرفته شده برای فازهای مختلف SRM



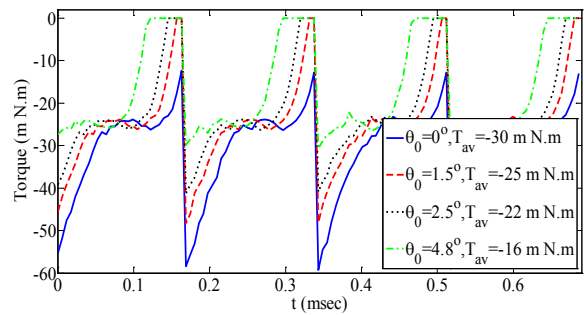
شکل (۶). گشتاور الکترومغناطیسی با تحریک فازهای مختلف SRM با دانستن مؤلفه‌های چگالی شار می‌توان از رابطه تنش مماسی ماکسول مقدار گشتاور الکترومغناطیسی را به صورت (۲۰) به دست آورد.

$$T = \frac{LR_s}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} B_{GR} B_{G\phi} d\phi \quad (20)$$



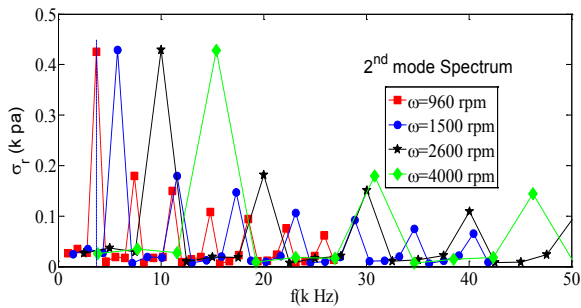


(و)

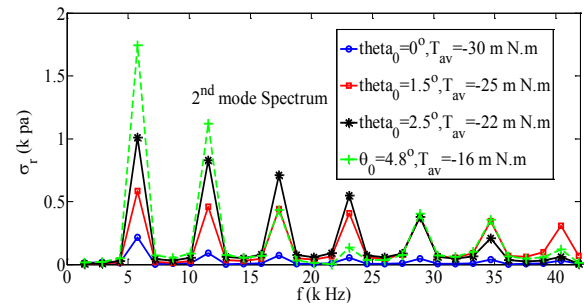


(الف)

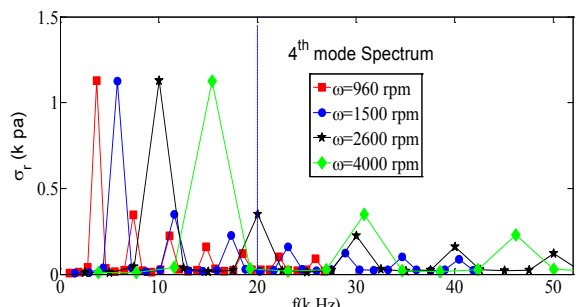
شکل (۷). (الف) گشتاور الکترومغناطیسی SRM برای زوایای اولیه رتور مختلف. طیف فرکانسی فشار مغناطیسی برای مدهای (ب) دوم، (ج) چهارم، (د) ششم، (ه) هشتم و (و) دهم.



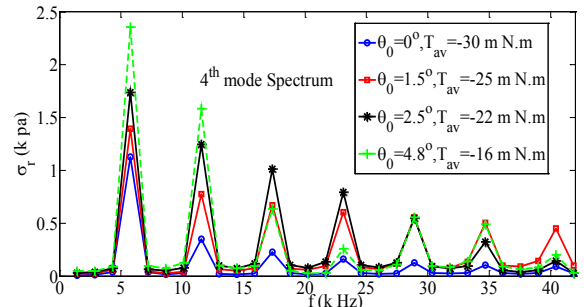
(الف)



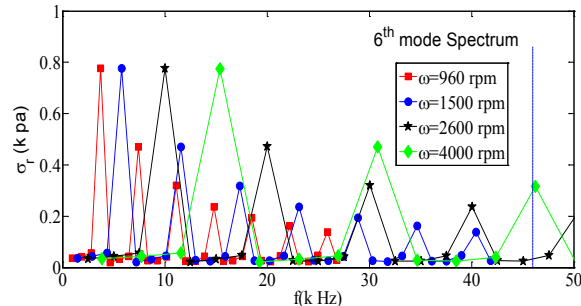
(ب)



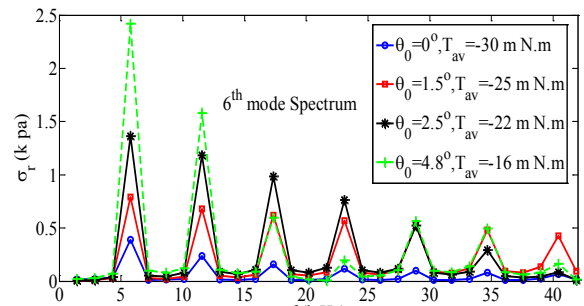
(ب)



(ج)

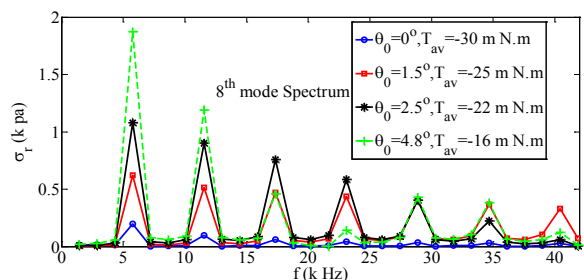


(ج)



(د)

شکل (۸). طیف فرکانسی فشار مغناطیسی برای مدهای (الف) دوم، (ب) چهارم و (ج) ششم در سرعت‌های مختلف چرخش رتور. در دسته دوم آزمایش‌ها، SRM با اعمال زاویه آغازین صفر برای جریان‌ها و گشتاور  $T=31 \text{ mN.m}$  در سرعت‌های  $960 \text{ rpm}$ ،  $1500 \text{ rpm}$ ،  $2600 \text{ rpm}$  و  $4000 \text{ rpm}$  چرخانده شده



(ه)

این روش ارائه شده برای پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی لرزشی استاتور و فشار مغناطیسی آن، می‌توان به‌سادگی سرعت بحرانی برای مودهای لرزشی مختلف را محاسبه نمود.

## ۷. مراجع

- [1] B. Bilgin and A. Emadi, "Electric motors in electrified transportation: A step toward achieving a sustainable and highly efficient transportation system", IEEE Power Electron. Mag., vol. 1, no. 2, pp. 10-17, Jun. 2014.
- [2] E. Bostanci, et al.: 'Opportunities and challenges of switched reluctance motor drives for electric propulsion: a comparative study', IEEE Trans. Transp. Electrification, vol. 3, no. 1, pp. 58-75, 2017.
- [3] M. Castano, B. Bilgin, E. Fairall, and A. Emadi, "Acoustic Noise Analysis of a High-Speed High-Power Switched Reluctance Machine: Frame Effects," IEEE Trans. Energy Convers., vol. 31, no. 1, pp. 69-77, March 2016.
- [4] M. Michon, S. D. Calverley, K. Atallah, "Operating strategies of switched reluctance machines for exhaust gas energy recovery systems," IEEE Trans Ind. Appl., vol. 48, no. 5, pp. 1478-1486, 2012.
- [5] G. Li, J. Ojeda, S. Hlioui, E. Hoang, M. Lecrivain and, M. Gabsi, "Modification in rotor pole geometry of mutually coupled switched reluctance machine for torque ripple mitigating," IEEE Trans. Magn., vol. 48, no. 6, pp. 2025-2034, 2012.
- [6] J. O. Fiedler, K. A. Kasper, and R. W. D. Doncker, "Calculation of the Acoustic Noise Spectrum of SRM Using Modal Superposition," IEEE Trans Ind. Appl., vol. 57, no. 9, pp. 2939-2945, 2010.
- [7] S. E. Emami, S. Taghipour Boroujeni, N. Takorabet, "Fast prediction of unbalanced magnetic pull in PM machines," Elec. Eng., vol. 103, pp. 2595-2602, 2021
- [8] X. Guo, R. Zhong, M. Zhang, D. Ding, and W. Sun, "Computation of Radial Vibration in Switched Reluctance Motors," IEEE Trans Ind. Appl., vol. 65, no. 6, pp. 4588-4598, 2018.
- [9] J. Dong, et al. "Hybrid acoustic noise analysis approach of conventional and mutually coupled switched reluctance motors", IEEE Trans. Energy Convers., vol. 32, no. 3, pp. 1042-1051, 2017.
- [10] X. Liang, et al., "Comparative study of classical and mutually coupled switched reluctance motors using multiphysics finite-element modelling", IEEE Trans. Ind. Electron. Vol. 61, no. 9, pp. 5066-5074, 2014
- [11] J. P. Lecoq, et al., "Analysis and active reduction of vibration and acoustic noise in the switched reluctance motor", IEE Proc., Electr. Power Appl., vol. 151, no. 6, pp. 725-733, 2004
- [12] J. Y. Chai, Y. W. Lin, C. M. Liaw, "Comparative study of switching controls in vibration and acoustic noise reductions for switched reluctance motor", IEE Proc., Electr. Power Appl., vol. 153, no. 3, pp. 348-360, 2006.
- [13] D. Torregrossa, B. Fahimi, F. Peyraut, and A. Miraoui, "Fast computation of electromag
- [14] netic vibrations in electrical machines via field reconstruction method and knowledge of mechanical impulse response," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 59, no. 2, pp. 839-847, 2012.
- [15] X. Q. Guo, R. Zhong, D. S. Ding, M. S. Zhang, W. J. Shao, and W. F. Sun, "Origin of resonance noise and analysis of randomizing turn on angle Method in switched reluctance motor," IET Elect. Power Appl., vol. 11, pp. 1324-1332, 2017.
- [16] X. Q. Guo, R. Zhong, L. P. Zhao, J. Yin, and W. F. Sun, "Method for radial vibration modelling in switched reluctance motor," IET Elect. Power Appl., vol. 10, pp. 834-842, 2016.

است و طیف فرکانسی فشار مغناطیسی مربوط به مودهای لرزشی مختلف به‌دست آمده است. این طیف‌های فرکانسی برای مودهای دوم، چهارم و ششم در شکل (۸) نشان داده شده‌اند. مقادیر فرکانس‌های طبیعی مودهای دوم، چهارم و ششم به ترتیب برابر ۳,۷kHz، ۲۰kHz و ۴۶kHz است و با خط چین آبی در نمودارها نمایش داده شده است. دوباره از ارائه طیف مودهای فرد به دلیل ناچیز بودن دامنه‌ها چشم‌پوشی شده است. از این طیف‌ها نتایج زیر برآورد می‌شود:

- تغییرات سرعت (تغییر فرکانس جریان سیم‌پیچ‌ها) اثر چشم‌گیری بر فرکانس مودهای لرزشی دارد.
- دامنه طیف‌ها ارتباطی با سرعت ندارد.
- در سرعت ۱۵۰۰rpm هیچ‌کدام از مؤلفه‌های فرکانسی با فرکانس‌های تشدید منطبق نمی‌شود.
- فرکانس چهارم لرزش در سرعت ۹۶۰rpm با فرکانس تشدید مود دوم منطبق است و تشدید و ایجاد نویز را به همراه دارد.
- فرکانس هشتم لرزش در سرعت ۲۶۰۰rpm با فرکانس تشدید مود چهارم منطبق است و تشدید و ایجاد نویز را به همراه دارد.
- فرکانس دوازدهم لرزش در سرعت ۴۰۰۰rpm با فرکانس تشدید مود ششم منطبق است و تشدید و ایجاد نویز را به همراه دارد.

باتوجه به همخوانی فرکانسی فشار مغناطیسی در سرعت‌های ۹۶۰rpm، ۲۶۰۰rpm و ۴۰۰۰rpm به ترتیب در مودهای لرزشی دوم، چهارم و ششم باید از کار در این سرعت‌ها چشم‌پوشی نمود و یا به باز طراحی هندسه استاتور برای جابه‌جا نمودن فرکانس‌های طبیعی این مودها اقدام نمود.

## ۶. نتیجه‌گیری

در مقاله ارائه شده یک مدل تحلیلی بر پایه روش زیر دامنه برای پیش‌بینی چگالی شار میدان مغناطیسی در SRM ارائه و درستی آن با روش اجزای محدود راستی‌آزمایی شد. بر پایه چگالی شار به‌دست آمده و با استفاده از رابطه ماکسول، فشار مغناطیسی وارد شده بر استاتور به‌صورت تابعی از زمان و مکان به دست آمد. با استفاده از تبدیل فوریه دوبعدی، فرکانس مودهای لرزشی در تابع فشار مغناطیسی برای بار و سرعت‌های مختلف به دست آمد. مشخص شد که بار ماشین تأثیری در فرکانس‌های لرزشی ایجاد شده ندارد؛ ولی این فرکانس‌ها کاملاً به‌سرعت ماشین وابسته می‌باشند. از طرفی دامنه هارمونیک‌های فشار مغناطیسی بستگی مستقیم به بار و شکل موج گشتاور الکترومغناطیسی دارد. حال آنکه هیچ‌گونه وابستگی به‌سرعت ماشین ندارد. با استفاده از

## ۸. پیوست

$$\mathbf{K3} = nX_s$$

$$\mathbf{K4} = -nY_s$$

$$\mathbf{F1} =$$

$$\text{diag} \left( \text{diag} \left( -\frac{k\pi}{2} \left( \left( \frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha_s}} + \left( \frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha_s}} \right) \right) \right)$$

$$\mathbf{U} = \text{diag} \left( -\frac{n\pi}{R_s} \right)$$

$$\mathbf{F2} = \frac{k\pi}{R_H \alpha_s} \left( \left( \frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha_s} - 1} - \left( \frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha_s}} \right) Y_s^*$$

$$\mathbf{F3} = \frac{k\pi}{R_H \alpha_s} \left( \left( \frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha_s} - 1} - \left( \frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha_s}} \right) X_s^*$$

$$\mathbf{W1} = -\frac{\mu_0 \alpha_s}{2} \left( \frac{R_H^2}{R_s} - R_s \right) (J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_{Q_s})$$

با لحاظ شرایط مرزی بر پایه روابط (۳)، (۷)، (۸) و (۱۱) ضرایب مجهول  $\mathbf{a}$  تا  $\mathbf{f}$  به کار رفته به صورت (۱۵) به دست آمد. متغیرهای  $\mathbf{a}$  تا  $\mathbf{f}$  در (۱۶) تعریف شده اند. در ادامه روابط متغیرهای به کار رفته در (۱۵) آورده شده است.

$$\mathbf{K1} = n \left( \frac{R_m}{R_s} \right)^n X_r$$

$$\mathbf{K2} = -n \left( \frac{R_m}{R_s} \right)^n Y_r$$

$$\mathbf{E1} =$$

$$\text{diag} \left( \text{diag} \left( -\frac{m\pi}{2} \left( \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha_r}} + \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha_r}} \right) \right) \right)$$

$$\mathbf{P1} = \text{diag} \left( -\frac{n\pi}{R_s} \left( \frac{R_m}{R_s} \right)^{n-1} \right)$$

$$\mathbf{P2} = \text{diag} \left( \frac{n\pi}{R_s} \left( \frac{R_m}{R_s} \right)^{n-1} \right)$$

$$\mathbf{E2} = \frac{m\pi}{\alpha_r} \left( \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha_r} - 1} - \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha_r}} \right) Y_r^*$$

$$\mathbf{E3} = \frac{m\pi}{\alpha_r} \left( \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha_r} - 1} - \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha_r}} \right) X_r^*$$

$$X_r = \int_{\varphi_{\min-ri}}^{\varphi_{\max-ri}} \sin(n\varphi) \sin \frac{m\pi}{\alpha_r} (\varphi - \varphi_{\min-ri}) d\varphi \quad X_s = \int_{\varphi_{\min-sj}}^{\varphi_{\max-sj}} \sin(n\varphi) \sin \frac{k\pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{\min-sj}) d\varphi$$

$$Y_r = \int_{\varphi_{\min-ri}}^{\varphi_{\max-ri}} \cos(n\varphi) \sin \frac{m\pi}{\alpha_r} (\varphi - \varphi_{\min-ri}) d\varphi \quad Y_s = \int_{\varphi_{\min-sj}}^{\varphi_{\max-sj}} \cos(n\varphi) \sin \frac{k\pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{\min-sj}) d\varphi$$

$$X_r^* = \int_{\varphi_{\min-ri}}^{\varphi_{\max-ri}} \sin(n\varphi) \cos \frac{m\pi}{\alpha_r} (\varphi - \varphi_{\min-ri}) d\varphi \quad X_s^* = \int_{\varphi_{\min-sj}}^{\varphi_{\max-sj}} \sin(n\varphi) \cos \frac{k\pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{\min-sj}) d\varphi$$

$$Y_r^* = \int_{\varphi_{\min-ri}}^{\varphi_{\max-ri}} \cos(n\varphi) \cos \frac{m\pi}{\alpha_r} (\varphi - \varphi_{\min-ri}) d\varphi \quad Y_s^* = \int_{\varphi_{\min-sj}}^{\varphi_{\max-sj}} \cos(n\varphi) \cos \frac{k\pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{\min-sj}) d\varphi$$