



Investigation of Effect of Piezoelectric Placement in the Energy Harvesting Beam on Voltage, Current and Power Output

Rouhollah Hosseini^{1*}, Mohammad Javad Zeinalbeik², Pouya Sarvi³

¹Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran (Correspondence). Email Address: kprhosseini@ihu.ac.ir

² Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran. Email Address: m.zeinalbeik@gmail.com

³ Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran. Email Address: pouyasarvi@gmail.com

HIGHLIGHTS

- Investigation of analytic relations for a cantilever beam consist of a Piezoelectric
- Investigation of Voltage, Current and Power output Changing by changing the Piezoelectric location.
- Derivation of three-dimensional diagrams of the effect of piezoelectric displacement on voltage, current and output power.

ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 20 April 2025

Received in revised form: 03 July 2025

Accepted: 10 September 2025

Available online: 29 September 2025

Keywords:

Energy Harvesting

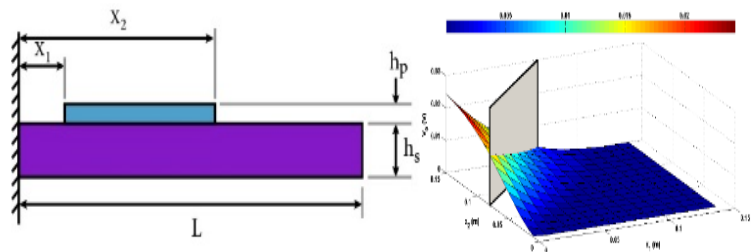
Composite beam

Location of Piezoelectric

Output Power

Mechanical Vibrations

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

Vibration energy harvesting is one of the methods that is used as energy supply for electronic devices that have low power consumption (such as sensors). With the advent of piezoelectrics and due to the properties of piezoelectric materials, they were quickly introduced as one of the most common materials for energy harvesting. Currently, vibration energy harvesting with piezoelectric material can produce more than 300 microwatts per square centimeter of power. Piezopolymers are one of the types of piezoelectric materials. In this work, with the help of EAPap piezopolymer materials, which are a thin film of cellulose, energy-harvesting beams have been made. By changing the location of the piezoelectric along the length of the cantilever beam, the changes in voltage, current and output power have been investigated. It can be seen that by changing the position of the piezoelectric on the beam and getting closer to the end of the beam, the output power, current and voltage have also increased due to the increase in the amount of strain.

Cite this article: Hosseini R, Zeinalbeik M.J, Sarvi P.; Farhad Haji Aboutalebi; Hamid Beheshti Investigation of Effect of Piezoelectric Placement in the Energy Harvesting Beam on Voltage, Current and Power Output.

Aerospace Mechanics. 2025; 21(3):1-9. DOI: <https://doi.org/10.47176/MAJ.2025.1457>

© Author(s) retain the copyright and full publishing rights

Publisher: Imam Hossein University.



OPEN ACCESS



بررسی اثر مکان قرارگیری پیزوالکتریک در تیر کامپوزیتی برداشت کننده انرژی بر روی ولتاژ، جریان و توان خروجی

روح اله حسینی^{۱*}، محمدجواد زینل بیک^۲، پویا سروی^۳

^۱دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران، ایران (نویسنده مسئول). رایانامه: kprhosseini@ihu.ac.ir

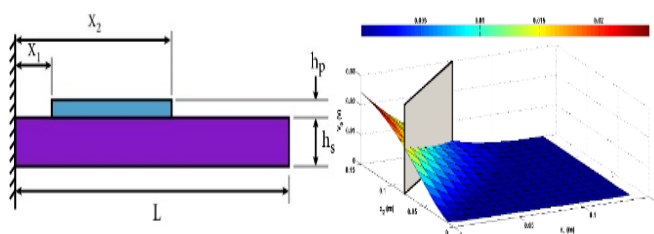
^۲دانشجوی دکتری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران، ایران. رایانامه: m.zeinalbeik@gmail.com

^۳دانشجوی دکتری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران، ایران. رایانامه: pouyasarvi@gmail.com

برجسته‌ها

- بررسی روابط تحلیل برای یک تیر یکسر درگیر با یک پیزوالکتریک
- بررسی توان، ولتاژ و جریان خروجی با تغییر مکان پیزوالکتریک
- استخراج نمودارهای سه بعدی اثر تغییر مکان پیزوالکتریک بر ولتاژ، جریان و توان خروجی

چکیده گرافیکی



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۳۱

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۴/۱۲

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۱۹

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۷/۰۷

کلیدواژه‌ها:

برداشت انرژی
تیر کامپوزیتی
توان خروجی
مکان پیزوالکتریک
ارتعاشات مکانیکی

چکیده

برداشت انرژی ارتعاشی، یکی از روش‌هایی است که به منظور تأمین انرژی برای وسایل الکترونیکی که توان مصرفی بسیار کمی دارند (نظیر حس‌گرها)، مورد استفاده قرار می‌گیرد. با ظهور پیزوالکتریک‌ها و به دلیل خواصی که مواد پیزوالکتریک دارا بودند، به سرعت به عنوان یکی از مرسوم‌ترین مواد جهت برداشت انرژی ارتعاشی معرفی شدند. هم‌اکنون برداشت انرژی ارتعاشی با ماده پیزوالکتریک می‌تواند بیش از ۳۰۰ میکرووات بر سانتی‌متر مربع توان تولید کند. یکی از انواع مواد پیزوالکتریک، پیزوپلیمرها می‌باشند. در این کار به کمک مواد پیزوپلیمری EAPap که فیلم نازکی از سلولز می‌باشند، تیرهای یکسر درگیر برداشت کننده انرژی ساخته شده‌اند. با تغییر محل قرارگیری لایه پیزوالکتریک در طول تیر یکسر درگیر، تغییرات ولتاژ، جریان و توان خروجی بررسی شده است. مشاهده می‌گردد که با تغییر مکان پیزوالکتریک بر روی تیر و نزدیک‌تر شدن به انتهای تیر یکسر درگیر، به دلیل افزایش میزان کرنش، توان، جریان و ولتاژ خروجی نیز افزایش می‌یابد.

استناد: حسینی روح‌اله، زینل بیک محمدجواد، سروی پویا. بررسی اثر مکان قرارگیری پیزوالکتریک در تیر کامپوزیتی برداشت کننده انرژی بر روی ولتاژ، جریان و توان خروجی. هوا فضا، (۱۴۰۴)، ۲۱(۳): ۹-۱. DOI: <https://doi.org/10.47176/MAJ.2025.1457>

نویسنده(گان) حق نشر و حقوق کامل انتشار را برای خود محفوظ می‌دارند. ©



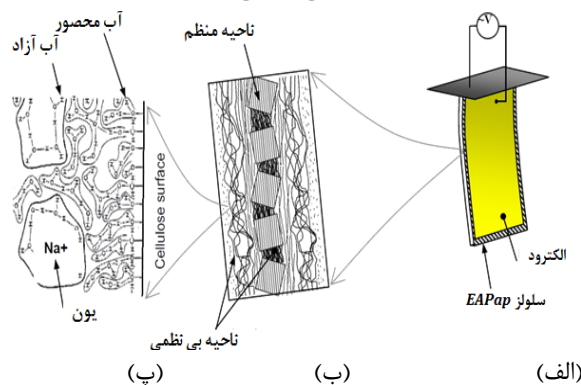
ناشر: دانشگاه جام امام حسین(ع).

OPEN ACCESS

۱- مقدمه

کننده‌های انرژی ارتعاشی مورد استفاده قرار می‌گیرد، هندسه یک تیر یکسر گیردار است. معمولاً تیرهای یکسر گیردار کرنش بیشتری را با تحریک یکسان نسبت به سایر هندسه‌ها ایجاد می‌کنند. همچنین مطالعات زیادی نیز توسط محققین بر روی این هندسه انجام شده است [۱۵-۲۰].

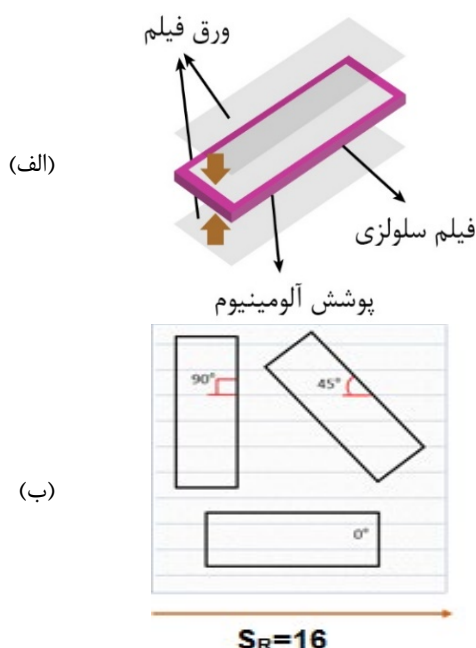
ماده سلولز در ابتدا در سال ۱۹۵۰ میلادی به‌عنوان ماده‌ای با خاصیت کم‌پیزوالکتریسیته شناخته شد که خاصیت پیزوالکتریسیته آن ناچیز بود [۱-۳]. با توسعه علم مواد در دنیا، سلولز به‌عنوان ماده‌ای با خاصیت تغییر شکل و جابجایی زیاد شناخته شد که در اثر اعمال ولتاژ الکتریکی می‌تواند تغییر شکل‌های زیادی را ایجاد نماید و در ادامه بیشتر به پتانسیل این ماده برای ایجاد رفتار الکترومکانیکی پی برده شد [۱-۳]. سلولز به‌عنوان فراوان‌ترین پلیمر طبیعی در دنیا یافت می‌شود. برخی از مزایای عمده این ماده عبارت‌اند از: سادگی ساخت، چگالی کم، قیمت بسیار پایین، دسترسی فراوان، مشخصات مکانیکی مناسب، قابلیت تغییر شکل زیاد و ایجاد ولتاژ خروجی قابل قبول در کاربرد به‌عنوان برداشت کننده انرژی ارتعاشی. در شکل ۱ ساختار این ماده نشان داده شده است. در تحقیقات پیشین چیدمان تیرها بررسی شده و نشان داده شده که استفاده از آرایه‌ای از تیرها چگالی توان خروجی بیشتری از یک تیر با عرضی برابر مجموع عرض‌های تیرها ایجاد می‌کند [۲۱]. در این مقاله برای یک برداشت کننده انرژی پیزوپلیمری EAPap سلولزی، اثر محل قرارگیری پیزوالکتریک روی تیر یکسر در گیر بر ولتاژ، توان و جریان خروجی بررسی شده است. برای این کار با استفاده از روابط تیر برداشت کننده انرژی و همچنین فرض نمودن پیزوالکتریکی با اندازه ۸ سانتی‌متر، تأثیر تغییر محل قرارگیری پیزوالکتریک‌ها بر توان و جریان و ولتاژ خروجی بررسی شده است.



شکل ۱: مفهوم برداشت کننده انرژی EAPap (الف) EAPap از کاغذ سلولزی تشکیل شده که بر روی آن الکترودهایی از طلا لایه‌نشانی شده‌اند (ب) ماده سلولزی از تعدادی نواحی کریستالی منظم و نامنظم تشکیل یافته است (پ) مولکول‌های آب توسط هیدروکسیل‌ها بر روی سطح سلولز محدود شده‌اند و یا به‌صورت خوشه‌ای رها شده‌اند [۲۲].

توسعه و گسترش فناوری علاوه بر مزایای بسیار زیادی که بر زندگی بشر داشته، چالش‌هایی نیز ایجاد نموده است. با گسترش فناوری، افزایش میزان مصرف انرژی امری غیرقابل اجتناب بوده و امروزه یکی از چالش‌ها و دغدغه‌های بسیار مهم در سطح بین‌المللی تأمین انرژی است. هزینه‌ها و پیامدهای منفی که برخی روش‌های تولید انرژی به همراه داشته است سبب شده تا جامعه جهانی به سمت تولید انرژی‌هایی با هزینه و پیامدهای منفی کمتر متمایل شود. یکی از روش‌هایی که با اقبال خوبی مواجه شده است، روش برداشت یا مهار انرژی‌های موجود در محیط اطراف است که امکان تأمین انرژی مورد نیاز برای برخی از دستگاه‌ها با توان مصرفی پایین نظیر حس‌گرها را داشته باشد. چراکه هزینه‌های استفاده از باتری‌های قدیمی برای این دستگاه‌ها به دلایلی نظیر هزینه باتری، عدم امکان دسترسی به محل تعویض باتری و ... نسبتاً بالا است. در زمینه برداشت انرژی ارتعاشی، روش‌های مختلفی استفاده می‌شود که روش‌های الکترواستاتیک، الکترومغناطیس و استفاده از مواد پیزوالکتریسیته از روش‌های متداول مورد استفاده می‌باشند [۱-۳]. عملکرد تجهیزات برداشت انرژی به نوع مواد به کاررفته در آن‌ها وابسته است. از مزایای برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک می‌توان به ساختار مکانیکی ساده، دوستانه محیط زیست بودن، قابلیت حمل و نقل ساده، امکان استفاده در قالب اجزای پوشیدنی، عدم نیاز به منبع تغذیه بیرونی، قابلیت هماهنگ شدن با ساختارهای مِمز، چگالی توان خروجی بالا نسبت به سایر روش‌های برداشت انرژی، هزینه ساخت نسبتاً پایین و قابلیت زیاد کوچک‌سازی به‌منظور برداشت انرژی اشاره نمود [۴]. به همین دلیل برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک کاربرد بیشتری داشته و به‌صورت گسترده‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲]. در زمینه برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک تحقیقات زیادی انجام شده است [۵-۱۴]. انعطاف بیشتر سبب شده است که مواد پیزوپلیمری نسبت به سایر مواد پیزوالکتریک نظیر پیزوسرامیک‌ها بیشتر رواج داشته باشند. این انعطاف سبب می‌شود تا بتوان به‌خوبی از این مواد در برداشت کننده‌های انرژی استفاده نمود. در میان مواد پیزوپلیمری، به‌تازگی موادی به نام کاغذهای الکترو-اکتیو^۱ (EAPap) ابداع شده است. این مواد خاصیت پیزوالکتریسیته داشته و از جنس سلولز ساخته شده‌اند و قابلیت استفاده به‌منظور برداشت انرژی را دارا می‌باشند. هندسه‌ی رایجی که در برداشت

^۱Electro-Active Paper



شکل ۲: دیاگرام شماتیک (الف) فرایند روکش دهی (ب) جهت

برش فیلم EAPap

پس از آماده سازی فیلم نازک پیزوالکتریک، برداشت کننده انرژی ارتعاشی به شکل یک تیر یکسر درگیر ساخته شد. تیر آلومینیومی با طول ۲۰۰ میلی متر، عرض ۵۰ میلی متر و ضخامت ۱ میلی متر به عنوان سازه میزبان مورد استفاده قرار گرفت و فیلم پیزوالکتریک با چسب به زیر لایه آلومینیومی متصل شده است. ۵ سانتیمتر از تیر به عنوان بخش نگهدارنده در داخل فیکسچر استفاده شد که از چهار سوراخ تشکیل یافته است. ابعاد فیلم EAPap، ۸۰ میلی متر در ۵۰ میلی متر است و ۱۰ میلی متر دورتر از تکیه گاه تیر نصب شد (مطابق شکل ۳). دلیل نزدیکی مکان نصب پیزوالکتریک به تکیه گاه، خمش و در نتیجه کرنش بالای این ناحیه به منظور استفاده در کاربردهای برداشت انرژی است.

مشابه این کار برای نمونه هایی از جنس پیزوالکتریک EAPap و زیر لایه آلومینیومی با عرض کمتر تکرار شد و در نهایت شش نمونه با عرض های مختلف ساخته شد. استفاده از عرض های مختلف تیر مستطیلی به منظور بررسی اثر کاهش عرض تیر مستطیلی و بررسی اثر استفاده از دو یا سه تیر با مجموع عرض یکسان با یک تیر مستطیلی انجام گرفت. بنابراین شش نمونه با طول یکسان (۸ سانتی متر) و عرض های متفاوت - یک نمونه با عرض ۵ سانتی متر، دو نمونه با عرض ۲/۵ سانتی متر و سه نمونه با عرض ۱/۶۶ سانتی متر - ساخته شد (شکل ۳).

در تحقیقات پیشین چیدمان تیرها بررسی شده و نشان داده شده که استفاده از آرایه ای از تیرها چگالی توان خروجی بیشتری از یک تیر با عرضی برابر مجموع عرض های تیرها ایجاد می کند [۲۱]. در این مقاله برای یک برداشت کننده انرژی پیزوپلیمری EAPap سلولزی، اثر محل قرارگیری پیزوالکتریک روی تیر یکسر درگیر بر ولتاژ، توان و جریان خروجی بررسی شده است. برای این کار با استفاده از روابط تیر برداشت کننده انرژی و همچنین فرض نمودن پیزوالکتریکی با اندازه ۸ سانتی متر، تأثیر تغییر محل قرارگیری پیزوالکتریک ها بر توان و جریان و ولتاژ خروجی بررسی شده است.

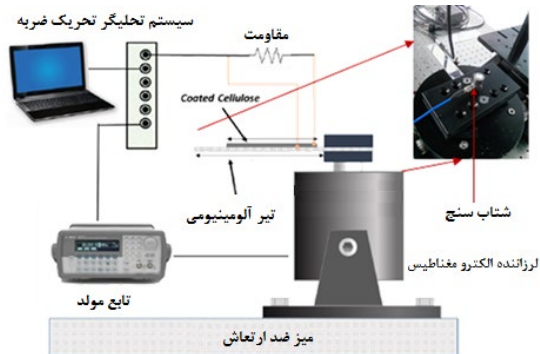
۲- کار تجربی

فیلم پیزوالکتریک EAPap، سلولز فرآوری شده است که از کتان خام با درجه پلیمریزاسیون ۴۵۰۰ ساخته شده است. کتان پس از تبدیل شدن به قطعات کوچک تر، در آن-دیتمیل استامید بی-آب با نسبت خاصی از کلرید لیتیم در 110°C حل شد. برای ایجاد یک محلول همگن، مخلوط حاصل با استفاده از همزن نوار مغناطیسی هم زده شد تا جایی که پالپهای کتان خام و لیتیم کلرید به خوبی در هم حل شدند. سپس با استفاده از دستگاه سانتریفیوژ برای ایجاد محلولی شفاف و فوق العاده چسبناک استفاده شد. پس از آن محلول بر روی صفحه شیشه ای شفاف ریخته شد و با استفاده از ریخته گری نواری^۱ (معروف به روش تیغه دکتر^۲) به صورت یکنواخت پخش گردید. از حلال های آب دی یونیزه شده و الکل ایزوپروپیل برای برداشتن باقیمانده های آند لیتیم استفاده شده است. در حالی که هنوز مرطوب بود، سلولز به نسبت ۱/۶ برابر حالت اولیه کشیده شد و سپس توسط نور مادون قرمز به مدت حدود یک ساعت خشک گردید. در این لحظه یک سلولز فرآوری شده نازک با ضخامت $10^{-5} \times 1/5$ با خواص پیزوالکتریسیته تولید می شود که به فیلم پیزوالکتریک EAPap معروف است. برای انجام کار تجربی، فیلم با زاویه ۴۵ درجه نسبت به جهت کشش با ابعاد مورد نظر بریده شد (شکل ۲-الف). به منظور استفاده در برداشت کننده انرژی، الکترودهای آلومینیومی در دو طرف فیلم با استفاده از روش تبخیر حرارتی لایه نشانی شدند. به منظور جلوگیری از ایجاد اتصال کوتاه بین الکترودها و میزبان و نیز کاهش امکان آسیب، هر فیلم EAPap با استفاده از لایه های شفاف پوشانده شد (شکل ۲-ب) [۹]. نمونه های ساخته شده دارای طول ۸ سانتی متر و عرض ۵ سانتی متر هستند.

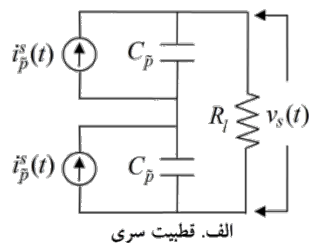
¹ Tape casting

² Doctor blade

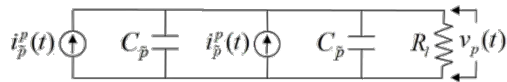
آزمون انفرادی حاصل از اندازه‌گیری بر روی یک نمونه یکسان (ثابت) با روش اندازه‌گیری یکسان در شرایط مشابه (مجری یکسان، دستگاه یکسان، آزمایشگاه یکسان و فاصله زمانی کوتاه بین آزمون‌ها) از آن کوچک‌تر باشد. مقدار پارامتر r را می‌توان از رابطه تجربی محاسبه نمود.



شکل ۴: عکس و شماتیک تیرهای برداشت کننده انرژی ارتعاشی با استفاده از ماده پیزوالکتریک EAPap با عرض‌های مختلف



الف. قطبیت سری



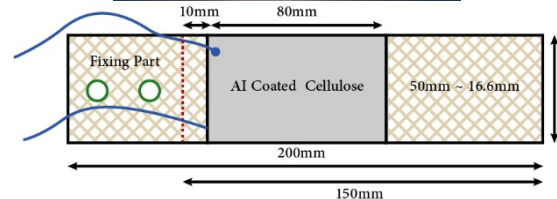
ب. قطبیت موازی

شکل ۵: اتصال سری و موازی دو برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک

لایه پیزوالکتریک پلیمری ایجاد شده دارای چگالی $1/4 \text{ Kg/m}^3$ بوده و مدول یانگ آن برابر 3 GPa است. همچنین ثابت پیزوالکتریک آن $(d_{31} = 25 \text{ pC/N})$ است.

۳- حل تحلیلی

در این بخش به بررسی یک تیر یکسر درگیر پرداخته می‌شود، با این تفاوت که اولاً لایه پیزوالکتریک بخشی از تیر (فاصله x_1 تا x_2) از انتهای گیردار را پوشانده و ثانیاً ضخامت این لایه در قیاس با ضخامت زیر لایه بسیار ناچیز است و می‌توان از اثر ضخامت پیزوالکتریک در رفتار ارتعاشی تیر صرف‌نظر نمود. معمولاً چنین شرایطی زمانی به وقوع می‌پیوندد که از مواد نانوپیزوالکتریک برای پوشش تیر استفاده می‌شود. هندسه چنین تیری در شکل ۶ نشان داده شده است.



شکل ۳: عکس و شماتیک تیرهای برداشت کننده انرژی ارتعاشی با

استفاده از ماده پیزوالکتریک EAPap با عرض‌های مختلف

نمونه تیر یکسر درگیر پیزوپلیمری ساخته شده با فیلم نازک EAPap، با سفت کردن جیگ^۱ بر روی بوبین^۲ شیکر^۳ الکترومغناطیسی Eliezer HEV-50 نصب شد. تیر پیزوالکتریک با ولتاژ ورودی ۱۰۰ میلی ولت تحریک و با سیگنال ژنراتور Agilent 33220A و تقویت کننده Eliezer EA157 در بازه فرکانسی مدنظر کنترل گردید. یک شتاب‌سنج برای مانیتور کردن جابجایی ورودی و خروجی بکار گرفته شد. چیدمان تجهیزات آزمایشی در شکل ۴ نشان داده شده است.

از یک پتانسیومتر به صورت سری در مدار با فیلم پیزوالکتریک، به عنوان مقاومت الکتریکی خارجی و برای اندازه‌گیری توان خروجی استفاده شد. از پیکوآمتر^۴ Keithley 6485 برای اندازه‌گیری جریان در مدار و از پالس آنالایزر Bruel & Kjaer 35360B-030 برای نشان دادن ولتاژ خروجی استفاده گردید. امپدانس فیلم EAPap با استفاده از متر LCR HP 4282A و به نسبت مقادیر مختلف فرکانس، اندازه‌گیری شد.

هر لایه از پیزوالکتریک به عنوان یک منبع جریان الکتریکی موازی با یک خازن ذاتی در نظر گرفته می‌شود. لذا اتصال الکتریکی سری و موازی برداشت کننده‌ها را می‌توان به صورت شکل ۵ نمایش داد.

بررسی تکرارپذیری یکی از گام‌های اولیه در بررسی یک روش آزمایشگاهی بوده و به منظور تخمین میزان عدم دقت یا خطای اتفاقی آزمایش بکار می‌رود. تکرارپذیری نتایج با تکرار آزمایش برای هر حالت به تعداد حداقل دو بار انجام گردید. تکرارپذیری (r) مقداری است که پیش‌بینی می‌شود با یک احتمال معین (مثلاً ۹۵٪)، قدر مطلق اختلاف بین دو نتیجه

^۱ Jig

^۲ Bobbin

^۳ Shaker

^۴ Picoammeter

$$EI \frac{\partial^4 z_{rel}(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 z_{rel}(x,t)}{\partial t^2} + \eta v(t) \left[\frac{d\delta(x-x_1)}{dx} - \frac{d\delta(x-x_2)}{dx} \right] = -m \frac{\partial^2 z_p(x,t)}{\partial t^2} \quad (7)$$

بار الکتریکی انباشته شده در لایه پیزوالکتریک با انتگرال گیری از جابجایی الکتریکی در طول پیزوالکتریک از x_1 تا x_2 محاسبه می گردد:

$$q(t) = \int \vec{D}_3 \cdot \vec{n} dA = - \int_{x=x_1}^{x=x_2} \left(d_{31} E_p \left(\frac{h_s}{2} + h_p \right) B \frac{\partial^2 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2} + \epsilon_{33}^s B \frac{v(t)}{h_p} \right) dx \quad (8)$$

لذا جریان تولیدی توسط لایه پیزوالکتریک با مشتق گیری از بار الکتریکی تولیدی در واحد زمان به دست می آید:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = - \int_{x=x_1}^{x=x_2} \left(d_{31} \left(\frac{h_s}{2} + h_p \right) E_p B \frac{\partial^3 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) dx - \frac{\epsilon_{33}^s B (x_2 - x_1)}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} \quad (9)$$

ولتاژ دو سر مقاومت الکتریکی نیز از ضرب مقدار مقاومت در جریان الکتریکی تولیدی محاسبه می گردد:

$$v(t) = R_L i(t) = -R_L \left[\int_{x=x_1}^{x=x_2} \left(d_{31} \left(\frac{h_s}{2} + h_p \right) E_p B \frac{\partial^3 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) dx + \frac{\epsilon_{33}^s B (x_2 - x_1)}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} \right] \quad (10)$$

با چینش مجدد این رابطه، معادله دیفرانسیل مدار الکتریکی حاصل می گردد:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{h_p}{\epsilon_{33}^s B (x_2 - x_1) R_L} v(t) = \frac{d_{31} \left(\frac{h_s}{2} + h_p \right) E_p h_p}{\epsilon_{33}^s (x_2 - x_1)} \int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\partial^3 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx \quad (11)$$

این رابطه معادله دیفرانسیل الکترومکانیکی پارامتر گسترده عمومی برای تیرهای یکسر درگیر برداشت انرژی که به صورت تکه ای و یا کامل با لایه پیزوالکتریک پوشانده شده است. با جداسازی متغیرها و ساده سازی، عبارت انتگرالی رابطه (۱۱) به صورت زیر درمی آید:

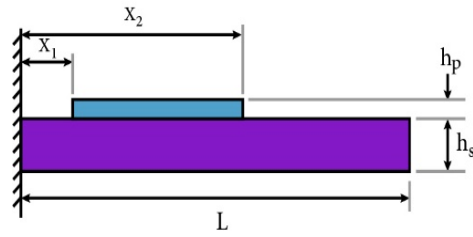
$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\partial^3 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dq_k(t)}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 w_k(x)}{dx} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dq_k(t)}{dt} \left[\frac{dw_k(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} - \frac{dw_k(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} \right] \quad (12)$$

بنابراین می توان رابطه (۱۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{h_p}{\epsilon_{33}^s B (x_2 - x_1) R_L} v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \frac{dq_k(t)}{dt} \quad (13)$$

که در آن:

$$\psi_k(x) = - \frac{d_{31} E_p h_p \left(\frac{h_s}{2} + h_p \right)}{\epsilon_{33}^s (x_2 - x_1)} \left[\frac{dw_k(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} - \frac{dw_k(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} \right] \quad (14)$$



شکل ۶: شماتیک تیر برداشت کننده انرژی ارتعاشی با تکه ای

پیزوالکتریک با ضخامت ناچیز

برای یک تیر ساده یکسر درگیر مقدار فرکانس طبیعی از روش رایلی و طبق رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\omega_1 = \frac{0.5678}{L^2} \sqrt{\frac{E_s h_s^3 + 2E_p h_p^3 + \frac{E_p h_p h_s^2}{2} + E_p h_s h_p^2}{\rho_s h_s + 2\rho_p h_p}} \quad (1)$$

همان طور که از روی شکل هم مشخص است، L طول زیر لایه تیر بوده و اندیس های s و p به ترتیب بیانگر زیر لایه فلزی و لایه پیزوالکتریک هستند. h بیانگر ضخامت بوده و E و ρ نیز به ترتیب بیانگر مدول یانگ و چگالی هستند. برای یک تیر ساده با صرف نظر از ضخامت لایه پیزوالکتریک، رابطه (۱) به شکل زیر درمی آید:

$$\omega_1 = 0.1639 \frac{h_s}{L^2} \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s}} \quad (2)$$

لازم به ذکر است که اولین فرکانس طبیعی سیستم از نظر عددی از بقیه فرکانس های طبیعی کوچک تر است و در تیرهای یکسر درگیر موجب تغییر شکل بیشتر شده و لذا توان بیشتری در مود اول رخ می دهد. مقدار فرکانس طبیعی سیستم در مود k ام را می توان از رابطه زیر یافت:

$$\omega_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (3)$$

در این رابطه، λ_k مقدار ویژه و m و EI نیز به ترتیب جرم بر واحد طول و سختی تیر می باشند. m را می توان به شکل زیر نوشت:

$$m = B \rho_s h_s \quad (4)$$

معادله فرکانسی برای یافتن مقادیر ویژه λ_k تیر بدین شکل است:

$$1 + \cos \lambda_k \cosh \lambda_k = 0 \quad (5)$$

با استفاده از تابع پله هویساید، ممان خمشی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2} + \eta v(t) [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \quad (6)$$

تابع پله هویساید برای اطمینان از حفظ عبارت دوم رابطه (۶) به هنگام استفاده در معادله دیفرانسیل حرکت، به آن افزوده شده است. تابع پله هویساید، انتگرال تابع دلتای دیراک، $\delta(x)$ ، است. با جایگذاری رابطه (۶) در معادله حاکم بر حرکت داریم:

$$\left(\frac{1+j\omega\tau_c}{\tau_c}\right)V_0e^{j\omega t} = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k \frac{j\omega\left[m\omega^2Y_0\int_0^L w_k(x)dx - \vartheta_k V_0\right]e^{j\omega t}}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2j\zeta_k\omega_k\omega} \quad (22)$$

در نهایت FRF ولتاژ به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\frac{v(t)}{\omega^2 Y_0 e^{j\omega t}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j m \omega \psi_k \left(\int_0^L w_k(x) dx\right)}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 j \zeta_k \omega_k \omega}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j \omega \vartheta_k \psi_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 j \zeta_k \omega_k \omega}\right) + \frac{1 + j \omega \tau_c}{\tau_c}} \quad (23)$$

اساساً برداشت کننده‌های انرژی ارتعاشی طوری طراحی می‌گردند تا در فرکانس طبیعی اول کار کنند ($k=1$). لذا وقتی فرکانس‌های طبیعی سیستم به خوبی از هم مجزا باشند، بهتر است تا مقادیر بالا را برای فرکانس طبیعی اصلی سیستم ساده‌سازی نمود. بنابراین ولتاژ دو سر بار مقاوم الکتریکی به صورت زیر قابل بیان است:

$$v^1(t) = \frac{j m \tau_c \omega^3 \psi_1 \left(\int_0^L w_1(x) dx\right)}{j \omega \vartheta_1 \psi_1 \tau_c} Y_0 e^{j\omega t} + (1 + j \omega \tau_c) (\omega_1^2 - \omega^2 + 2 j \zeta_1 \omega_1 \omega) \quad (24)$$

که اندیس ۱ بیانگر فرکانس طبیعی اصلی سیستم است. عبارت ولتاژ خروجی را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$v^1(t) = |V_0^1| e^{j(\omega t + \theta_v)} \quad (25)$$

که در آن اندازه ولتاژ خروجی، زاویه فاز بین ولتاژ خروجی، جابجایی پایه، جریان و توان خروجی از روابط زیر محاسبه می‌گردد:

$$|V_0^1| = \frac{Y_0 m \tau_c \omega^3 \left|\psi_1 \left(\int_0^L w_1(x) dx\right)\right|}{\sqrt{\left[\omega_1^2 - \omega^2 (1 + 2\tau_c \zeta_1 \omega_1)\right]^2 + \left[2\zeta_1 \omega_1 \omega + \tau_c \omega (\vartheta_1 \psi_1 + \omega_1^2 - \omega^2)\right]^2}} \quad (26)$$

$$\theta_v = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\left(\psi_1 \left(\int_0^L w_1(x) dx\right)\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta_1 \omega_1 \omega + \tau_c \omega (\vartheta_1 \psi_1 + \omega_1^2 - \omega^2)}{\omega_1^2 - \omega^2 (1 + 2\tau_c \zeta_1 \omega_1)}\right) \quad (27)$$

$$i^1(t) = |I_0^1| e^{j(\omega t + \theta_i)} \quad (28)$$

$$|I_0^1| = \frac{Y_0 m \tau_c \omega^3 \left|\psi_1 \left(\int_0^L w_1(x) dx\right)\right|}{R_L \sqrt{\left[\omega_1^2 - \omega^2 (1 + 2\tau_c \zeta_1 \omega_1)\right]^2 + \left[2\zeta_1 \omega_1 \omega + \tau_c \omega (\vartheta_1 \psi_1 + \omega_1^2 - \omega^2)\right]^2}} \quad (29)$$

رابطه (۱۳) یک معادله دیفرانسیل است که با ضرب فاکتور انتگرال زیر قابل حل است:

$$\varpi(t) = e^{t/\tau_c} \quad (15)$$

که در آن ثابت زمانی مدار است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_c = \frac{R_L \varepsilon_{33}^s B(x_2 - x_1)}{h_p} \quad (16)$$

با ترکیب رابطه (۷) و (۱۲) می‌توان نوشت:

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) q_k(t) \right] + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) q_k(t) \right] + \eta v(t) \left[\frac{d\delta(x-x_1)}{dx} - \frac{d\delta(x-x_2)}{dx} \right] = -m \frac{\partial^2 z_b(x,t)}{\partial t^2} \quad (17)$$

با استفاده از روش گالکین، ابتدا دو طرف رابطه (۱۶) را در تابع وزنی $w_p(x)$ ضرب کرده و شرایط تعامد بکار گرفته می‌شوند. در نهایت می‌توان ضریب میرایی را افزود [۲۳] و خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 q_k(t)}{dt^2} + 2\zeta_k \omega_k \frac{dq_k(t)}{dt} + \omega_k^2 q_k(t) + \vartheta_k v(t) = - \int_0^L w_k(x) m \frac{\partial^2 z_b(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (18)$$

که عبارت کوپلینگ مودال بوده و به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\vartheta_k = \eta \left[\left. \frac{dw_k(x)}{dx} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{dw_k(x)}{dx} \right|_{x=x_1} \right] \quad (19)$$

ضریب میرایی را می‌توان با استفاده از روش‌های بیان شده محاسبه کرد. معمولاً برای یافتن میرایی در فرکانس طبیعی اول تیر از روش کاهش لگاریتمی استفاده می‌شود [۲۴]. اگر نوسانات تیر برحسب زمان هماهنگ باشد، حرکت پایه، ولتاژ خروجی و بار

الکتریکی را می‌توان به ترتیب به صورت $z_b = Y_0 e^{i\omega t}$

و $q_k(t) = Q_k e^{i\omega t}$ بیان کرد. بنابراین $v(t) = V_0 e^{i\omega t}$ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$q_k(t) = \frac{\left[m\omega^2 Y_0 \int_0^L w_k(x) dx - \vartheta_k V_0\right] e^{j\omega t}}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega} \quad (20)$$

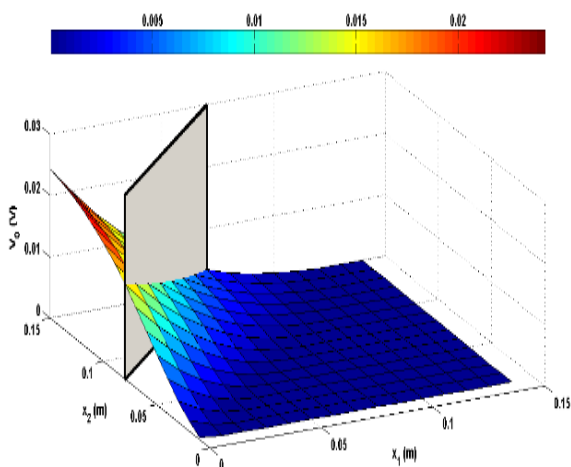
که در آن z نماد عدد موهومی و ω فرکانس تحریک است.

همچنین با جایگذاری $v(t) = V_0 e^{j\omega t}$ در (۱۳) داریم:

$$\left(\frac{1+j\omega\tau_c}{\tau_c}\right)V_0e^{j\omega t} = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k \frac{dq_k(t)}{dt} \quad (21)$$

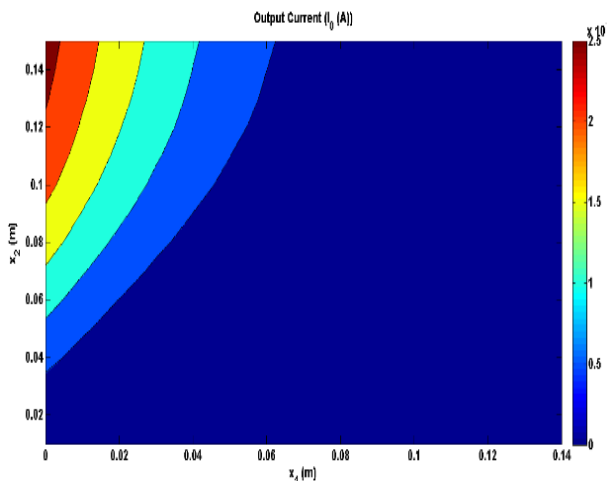
با مشتق‌گیری از بار الکتریکی تولیدی برحسب زمان در رابطه (۱۹) و جایگذاری در (۲۰) داریم:

با فرض اینکه طول لایه پیزوالکتریک برابر ۸ cm باشد، خواهیم داشت $x_2 - x_1 = 0.08 m$ که در نمودار سه بعدی بیانگر معادله یک صفحه است. مقادیر مختلف ولتاژ خروجی به ازای مکان‌های مختلف قرارگیری لایه پیزوالکتریک به صورت سه بعدی به همراه صفحه بیانگر مکان قرارگیری لایه پیزوالکتریک ۸ سانتیمتری در شکل ۸ نشان داده شده است. همان طور که انتظار می رود در نقاط مختلف تقاطع صفحه و کانتور رنگی، مقادیر ولتاژ خروجی متفاوت می باشد و هر چه لایه پیزوالکتریک به انتهای گیردار تیر نزدیک تر باشد، ولتاژ خروجی بالاتر خواهد بود. به عبارت دیگر به ازای $x_1=0$ حداکثر ولتاژ خروجی به دست می آید.



شکل ۸: مقادیر مختلف ولتاژ خروجی و صفحه بیانگر طول ۸ سانتیمتری لایه پیزوالکتریک

همین روند برای جریان خروجی تکرار می شود و به ازای مکان‌های مختلف قرارگیری لایه پیزوالکتریک و طول‌های مختلف این لایه، شکل ۹ حاصل می شود. ملاحظه می شود که حداکثر جریان خروجی به ازای پوشش کامل کل تیر یکسر درگیر حاصل شده است.



شکل ۹: مقادیر مختلف جریان خروجی به ازای مکان‌های مختلف قرارگیری لایه پیزوالکتریک بر روی تیر یکسر درگیر

$$|P_0^1| = \frac{\left(Y_0 m \tau_c \omega^3 \left| \psi_1 \left(\int_0^L w_1(x) dx \right) \right|^2 \right)}{R_L \left(\left[\omega_1^2 - \omega^2 (1 + 2\tau_c \zeta_1 \omega_1) \right]^2 + \left[2\zeta_1 \omega_1 \omega + \tau_c \omega (\vartheta_1 \psi_1 + \omega_1^2 - \omega^2) \right]^2 \right)} \quad (30)$$

۴- نتایج و بحث

میزان توان و ولتاژ خروجی در سازه‌های مبتنی بر پیزوالکتریک متناسب با میزان جابجایی این نوع سازه‌ها است. با توجه به اینکه میزان جابجایی در فرکانس تشدید بیشینه است، لذا در این فرکانس بیشترین توان و ولتاژ خروجی قابل استحصال است [۱۰].

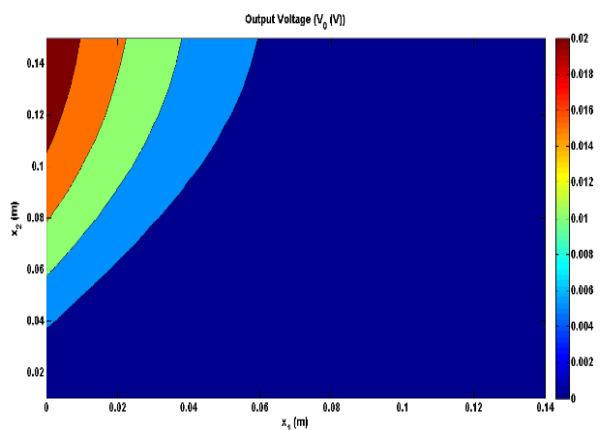
با مقایسه نتایج تجربی و تحلیلی، نتایج جدول ۱ استخراج می شوند:

جدول ۱: مقایسه و اعتبارسنجی نتایج تجربی و تحلیلی

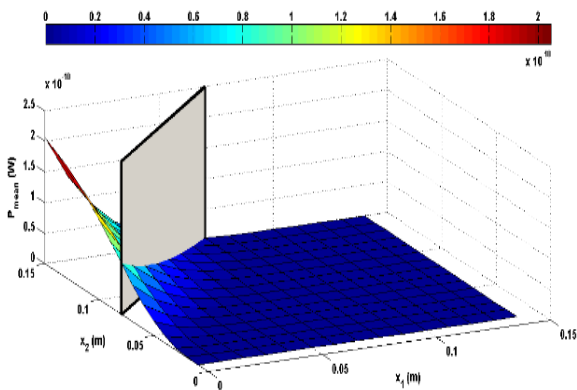
$P_{mean}(nW)$	$I_{pp}(nA)$	$V_{pp}(mV)$	
۰/۹۰۷۱	۲۸۴	۲۵/۶	کار تجربی
۰/۹۸۳۱	۲۹۵	۲۶/۶	کار تحلیلی
۸/۴	۳/۹	۳/۹	درصد خطا %

که درصد خطا، قابل قبول بوده و نتایج از دقت مناسبی برخوردار هستند.

با توجه به روابط به دست آمده برای تیر برداشت کننده انرژی می توان به ازای مکان‌های قرارگیری و اندازه تکه پیزوالکتریک، حالت بهینه را یافت. بدین منظور فرض می شود مکان قرارگیری ابتدای لایه پیزوالکتریک از سر گیردار برابر x_1 و مکان قرارگیری انتهای لایه پیزوالکتریک از سر گیردار برابر x_2 باشد. با تغییر مکان لایه پیزوالکتریک بر روی تیر، مکان x_1 و x_2 جابجا شده و انتظار می رود مقادیر ولتاژ، جریان و توان خروجی تغییر کنند. در شکل ۷، مقادیر مختلف ولتاژ خروجی به ازای مکان‌های مختلف قرارگیری لایه پیزوالکتریک به نمایش درآمده است.

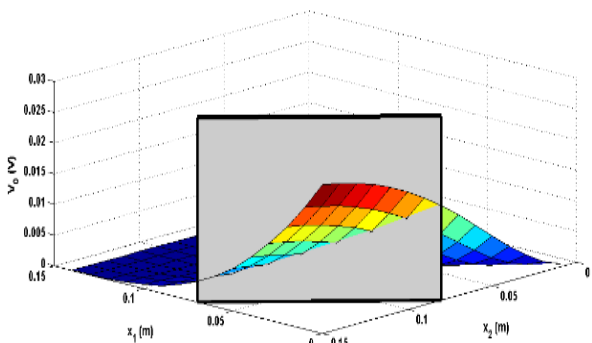


شکل ۷: مقادیر مختلف ولتاژ خروجی به ازای مکان‌های مختلف قرارگیری لایه پیزوالکتریک بر روی تیر یکسر درگیر



شکل ۱۲: مقادیر مختلف توان خروجی و صفحه بیانگر طول ۸ سانتیمتری لایه پیزوالکتریک

با تغییر زاویه دید و نگاه از روبرو به صفحه ملاحظه می‌گردد تغییرات ولتاژ در طول صفحه مربوط به لایه پیزوالکتریک با طول ۸ cm به صورت خطی است. یعنی همان رفتاری که طبق روابط انتظار می‌رود از کرنش ماده مشاهده شود.



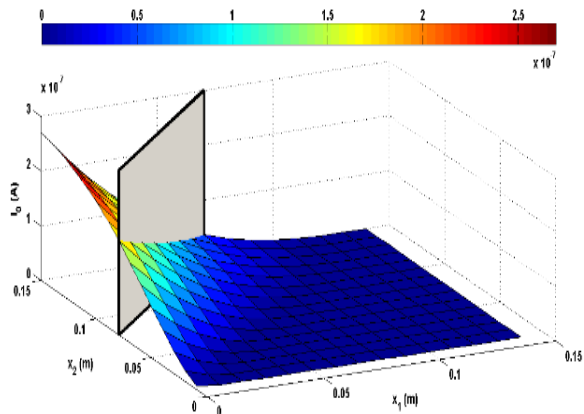
شکل ۱۳: مقادیر مختلف توان خروجی و صفحه بیانگر طول ۸ سانتیمتری لایه پیزوالکتریک

۵- نتیجه گیری

یکی از موادی که در برداشت انرژی ارتعاشی مورد استفاده قرار می‌گیرد، پیزوپلیمرها می‌باشند. در این پژوهش یک پیزوپلیمر *EAPap* به عنوان تیر یکسر درگیر انتخاب شده است و با استفاده از روابط تحلیلی، اثر تغییر مکان پیزوالکتریک بر روی ولتاژ، جریان و توان خروجی بررسی شده است. برای هر پارامتریک نمودار سه بعدی ترسیم شده و محل تلاقی نمودار با صفحه $x_2 - x_1 = 0.08$ ترسیم شده است. با توجه به نتایج حاصل شده، مشخص شده است که هر چه پیزوالکتریک به انتهای تیر یکسر درگیر نزدیک تر شود، به علت افزایش کرنش، ولتاژ، جریان و توان خروجی بیشتری حاصل می‌شود.

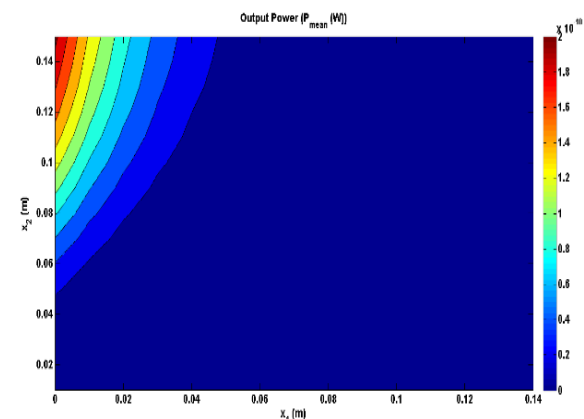
همچنین تغییرات ولتاژ در طول صفحه مربوط به لایه پیزوالکتریک به صورت خطی است. لازم به ذکر است هر چند با نزدیک تر کردن تکه پیزوالکتریک به تکیه‌گاه انتظار توان خروجی بیشتری می‌رود، باین وجود به دلیل افزایش بیش از اندازه تنش و

برای لایه پیزوالکتریک با طول ۸ cm مجدداً صفحه بیانگر این طول رسم شده و با کانتور رنگی تقاطع داده می‌شود. نقاط تقاطع بیانگر جریان خروجی این طول از پیزوالکتریک در مکان‌های مختلف می‌باشند (شکل ۱۰).



شکل ۱۰: مقادیر مختلف جریان خروجی و صفحه بیانگر طول ۸ سانتیمتری لایه پیزوالکتریک

به همین ترتیب به ازای مکان‌های مختلف قرارگیری لایه پیزوالکتریک و طول‌های مختلف این لایه، توان خروجی متفاوت خواهد بود. روند تغییرات به صورت دوبعدی در شکل ۱۱ نشان داده شده است. همانند کانتورهای پیشین و مطابق انتظار ملاحظه می‌شود که حداکثر توان خروجی به ازای پوشش کامل کل تیر یکسر درگیر حاصل می‌شود. با توجه به شکل می‌توان دریافت که بیشترین نرخ تغییرات در قسمت‌های ابتدایی تیر رقم می‌خورد و هر چه مقدار x_1 کمتر باشد، نرخ تغییرات بیشتر می‌گردد.



شکل ۱۱: مقادیر مختلف توان خروجی به ازای مکان‌های مختلف قرارگیری لایه پیزوالکتریک بر روی تیر یکسر درگیر

با رسم صفحه بیانگر لایه پیزوالکتریک با طول ۸ cm و تقاطع آن با کانتور رنگی، توان خروجی به ازای مکان‌های قرارگیری لایه پیزوالکتریک به دست می‌آید (شکل ۱۲). مشابه رفتاری که برای ولتاژ و جریان مشاهده گردید و مطابق انتظار، هنگامی که لایه پیزوالکتریک به انتهای گیردار تیر نزدیک تر است، به دلیل اعمال کرنش‌های بیشتر، توان خروجی نیز بیشتر خواهد بود.

- [11] Su W-J, Tseng C-H. Design and analysis of an extended simply supported beam piezoelectric energy harvester. *Sensors*. 2023;23(13):5895.
- [12] González J, Ghaffarinejad A, Ivanov M, Ferreira P, Vilarinho PM, Borrás A, et al. Advanced Cellulose–Nanocarbon Composite Films for High-Performance Triboelectric and Piezoelectric Nanogenerators. *Nanomaterials*. 2023;13(7):1206.
- [13] Trelu H, Le Scornec J, Leray N, Moreau C, Villares A, Cathala B, et al. Flexoelectric and piezoelectric effects in micro-and nanocellulose films. *Carbohydrate Polymers*. 2023;321:121305.
- [14] Pradeesh E, Udhayakumar S, Vasundhara M, Kalavathi G. Experimental and numerical analysis on different beam geometries for vibration based piezoelectric energy harvester. *Ferroelectrics*. 2023;606(1):219-38.
- [15] Arafa M, Akl W, Aladwani A, Aldraihem O, Baz A, editors. Experimental implementation of a cantilevered piezoelectric energy harvester with a dynamic magnifier. *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2011*; 2011: SPIE.
- [16] Hosseini R, Hamed M. Improvements in energy harvesting capabilities by using different shapes of piezoelectric bimorphs. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2015;25(12):125008.
- [17] Hosseini R, Hamed M. An investigation into resonant frequency of trapezoidal V-shaped cantilever piezoelectric energy harvester. *Microsystem Technologies*. 2016;22:1127-34.
- [18] Hosseini R, Hamed M. An investigation into resonant frequency of triangular V-shaped cantilever piezoelectric vibration energy harvester. 2016.
- [19] Hosseini R, Hamed M. Resonant frequency of bimorph triangular V-shaped piezoelectric cantilever energy harvester. *Journal of Computational & Applied Research in Mechanical Engineering (JCARME)*. 2016;6(1):65-73.
- [20] Ou Q, Chen X, Gutschmidt S, Wood A, Leigh N, editors. A two-mass cantilever beam model for vibration energy harvesting applications. 2010 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering; 2010: IEEE.
- [21] Kim J. Improvement of piezoelectricity in piezoelectric paper made with cellulose. DTIC Document. 2009.
- [22] Dayou J, Liew W, Chow M-S. Increasing the bandwidth of the width-split piezoelectric energy harvester. *Microelectronics Journal*. 2012;43(7):484-91.
- [23] Meirovitch L. *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan Publishing Co., Inc; 1967.
- [24] Rao SS, Yap FF. *Mechanical vibrations*: Addison-Wesley New York; 1995.

کرنش در حوالی تکیه‌گاه، بخصوص در مورد پیزوسرامیک‌ها احتمال شکست افزایش یافته و قابلیت اعتماد سیستم، کاهش می‌یابد. لذا با داشتن یک منحنی بهینه بجای یک نقطه، می‌توان تعادل خوبی بین افزایش توان خروجی و قابلیت اطمینان سیستم یافت.

۶- مراجع

- [1] Arms S, Townsend C, Churchill D, Galbreath J, Corneau B, Ketcham R, et al., editors. Energy harvesting, wireless, structural health monitoring and reporting system. *Proceedings of the 2nd Asia Pacific Workshop on SHM*; 2008.
- [2] Erturk A, Inman DJ. *Piezoelectric energy harvesting*: John Wiley & Sons; 2011.
- [3] Hamed M, Hosseini R, *Mechanical energy generators*, Mechanical Engineering Promotional Scientific Journal. 2012.
- [4] Adebzadeh H, Mohammadi MM, Ghazanfarian J. Energy harvesting from water waves with finned and finless piezoelectric beam: an experimental study. *Amirkabir Mechanical Engineering Journal*. 2023;55(10):1195-206.
- [5] Mamandi A, Jafari Y. Investigating the vibration energy harvesting efficiency of the piezoelectric beam using the finite element method. *Mechanical Engineering, University of Tabriz*. 2021;51(1):209-18.
- [6] Farhani S, Shushtri A. Investigating leaf-stem-like structures that harvest energy from wind flow using piezoelectric materials. *Sharif Mechanical Engineering Journal*. 2021;37.3(2):81-95.
- [7] Zhou X, Parida K, Chen J, Xiong J, Zhou Z, Jiang F, et al. 3D Printed Auxetic Structure-Assisted Piezoelectric Energy Harvesting and Sensing. *Advanced Energy Materials*. 2023;13(34):2301159.
- [8] Chen W, Zheng Q, Lv YA, Chen Y, Fan Q, Zhou X, et al. Piezoelectric energy harvesting and dissipating behaviors of polymer-based piezoelectric composites for nanogenerators and dampers. *Chemical Engineering Journal*. 2023;465:142755.
- [9] Hosseini R, Hamed M, Im J, Kim J, Dayou J. Analytical and experimental investigation of partially covered piezoelectric cantilever energy harvester. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*. 2017;18:415-24.
- [10] Hosseini R, Hamed M, Golparvar H, Zargar O. Analytical and experimental investigation into increasing operating bandwidth of piezoelectric energy harvesters. *AUT Journal of Mechanical Engineering*. 2019;3(1):113-22.