

Dynamic response of cantilever beam made of shape memory alloy by differential quadrature method in contact with fluid

S. Yousefzadeh^{1*}, A.H. Nasrollah Barati², M. M. Doustdar³

^{1*} Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Al.C., Islamic Azad University, Aligudarz, Iran. Email: sh.yousefzadeh@gmail.com

² Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Al.C., Islamic Azad University, Aligudarz, Iran. Email: amir.barati@iau.ac.ir

³ Professor, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran. Email: mdostdar@ihu.ac.ir

HIGHLIGHTS

- Derivation of governing equations for cantilever beam made of shape memory alloy in contact with fluid.
- Solving the obtained equations by the differential quadrature method.
- Investigating the effect of different problem parameters on the dynamic response of cantilever beam.

ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 30 March 2025

Received in revised form: 11 May 2025

Accepted: 10 June 2025

Available online: 08 July 2025

Keywords:

Forced Vibration

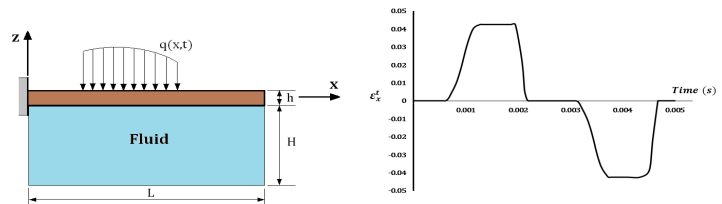
Cantilever Beam

Shape Memory Alloy

Pseudo-Elastic

Differential Quadrature Method

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

In this research, the forced vibration of a cantilever beam made of shape memory alloy in contact with fluid was investigated. The governing equations are derived based on the first-order shear theory and Hamilton's principle, and the Boyd-Lagodas three-dimensional model was used to model the behavior of superelastic material. The pressure applied from the fluid to the beam was obtained by solving Laplace's equation and satisfying its boundary conditions. Also, in the state without phase change (pure Austenite), the investigated cantilever beam was analyzed in linear conditions and compared with the results of other researchers. In the following, to analyze the vibrations of the cantilever beam made of shape memory alloy and to solve the equations in the state where the phase transformation was performed, the method of square differences, Newmark, and the return mapping algorithm were used. At the end, the effect of different geometric parameters on the beam is studied. The results show that the numerical method used to analyze the time and frequency response of the shape memory alloy beam has high convergence and predicts well the nonlinear effects of the material due to phase transformation during motion.

Cite this article: Yousefzadeh S, Nasrollah Barati A.H, Doustdar M.M. Dynamic response of cantilever beam made of shape memory alloy by differential quadrature method in contact with fluid. *Aerospace Mechanics*. 2025; 21(2):81-98. **DOI** <https://doi.org/10.47176/MAJ.2025.1492>

Introduction

In recent years, Shape Memory Alloys (SMAs) have attracted significant attention due to their nonlinear mechanical behavior and their ability to recover original shape under changes in temperature or stress. These materials are widely used in smart structures and adaptive systems. On the other hand, the dynamic behavior of beams in contact with fluid is of great importance in various engineering applications such as marine structures, turbine blades, and micro-actuators operating in fluidic or biological environments. The present study aims to investigate the dynamic response of a cantilever beam made of SMA interacting with an incompressible fluid, employing the Differential Quadrature Method (DQM) as a high-accuracy numerical approach.

Methodology

The beam is modeled according to Euler–Bernoulli beam theory, subjected to external forces and pressure resulting from the surrounding fluid. The governing equations are derived based on the first-order shear theory and Hamilton's principle, and the Boyd- Lagodas three-dimensional model was used to model the behavior of superelastic material. The pressure applied from the fluid to the beam was obtained by solving Laplace's equation and satisfying its boundary conditions. Also, in the state without phase change (pure Austenite), the investigated cantilever beam was analyzed in linear conditions and compared with the results of other researchers. In the following, to analyze the vibrations of the cantilever beam made of shape memory alloy and to solve the equations in the state where the phase transformation was performed, the method of square differences, Newmark, and the return mapping algorithm were used. At the end, the effect of different geometric parameters on the beam is studied.

Results and Discussion

The results show that the numerical method used to analyze the time and frequency response of the shape memory alloy beam has high convergence and predicts the vibration behavior of the beam well by considering the nonlinear effects of the material due to the phase change during movement. The transverse displacement of the SMA beam in contact with the fluid decreases with the presence of the fluid. This is because the presence of the fluid increases the equivalent mass of the beam and leads to a decrease in its displacement. With increasing fluid height, the transverse displacement of the SMA beam increases slightly and further increase in fluid height does not have much effect on the transverse displacement of the beam. With increasing fluid density (heavier fluid), the transverse displacement of the beam decreases. This is because the fluid is assumed to be inviscid and has only inertia that is equivalent to the mass added to the beam. Therefore, with increasing fluid density, the mass added to the beam increases, which leads to a decrease in its displacement. The transverse displacement of the beam increases with increasing excitation load amplitude. Because increasing the load amplitude increases the

vibration amplitude and increasing the vibration amplitude leads to increasing the transverse displacement. When the excitation frequency increases, the transverse displacement amplitude of the SMA beam decreases and the maximum transverse displacement occurs with a time delay.

Conclusion

The study confirms that the Differential Quadrature Method provides a highly efficient and accurate tool for analyzing the dynamic response of SMA beams in fluid-structure interaction problems. The coupling between the fluid domain and the nonlinear thermo- mechanical behavior of the SMA introduces complexity in the system's dynamics, but also offers an opportunity for smart vibration control by tuning temperature or stress. Future work may extend this approach to doubly clamped beams, two-dimensional SMA structures, or compressible fluid environments.

پاسخ دینامیکی یک تیر یکسر گیردار از جنس آلیاژ حافظه‌دار در تماس با سیال با استفاده از روش

تفاضلات مربعی

شهرروز یوسف‌زاده^{۱*}، امیرحسین نصراله براتی^۲، محمدمهدی دوستدار^۳

^{۱*} استادیار، گروه مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز، ایران. رایانامه: sh.yousefzadeh@iau.ac.ir

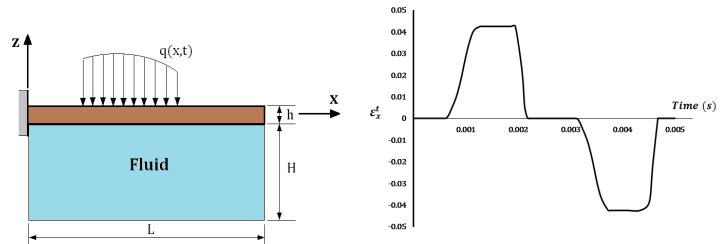
^۲ استادیار، گروه مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز، ایران. رایانامه: amir.barati@iau.ac.ir

^۳ استاد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران. رایانامه: mdostdar@ihu.ac.ir

برجسته‌ها

- استخراج معادلات حاکم بر تیر کنسولی از جنس آلیاژ حافظه‌دار در تماس با سیال
- حل معادلات به‌دست‌آمده با روش تفاضلات مربعی
- بررسی تأثیر پارامترهای مختلف مسأله بر پاسخ دینامیکی تیر کنسولی

چکیده گرافیکی



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:
 نوع مقاله: علمی پژوهشی
 دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۱۰
 بازنگری: ۱۴۰۴/۰۲/۲۱
 پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۲۱
 ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۴/۱۷

چکیده

در این تحقیق به بررسی ارتعاش اجباری یک تیر کنسولی از جنس آلیاژ حافظه‌دار در تماس با سیال پرداخته شده است. معادلات حاکم بر اساس تئوری کلاسیک و با بهره‌گیری از اصل همیلتون استخراج شده و برای مدل‌سازی رفتار ماده سوپرالاستیک از مدل سه‌بعدی بوید-لاگوداس استفاده شده است. فشار وارد شده از سیال به تیر با حل معادله لاپلاس و ارضای شرایط مرزی آن به‌دست‌آمده است. همچنین در حالت بدون تغییر فاز (آستنتیت خالص) تیر کنسولی مورد مطالعه در شرایط خطی بررسی و با نتایج سایر محققان مورد مقایسه قرار گرفته است. در ادامه برای تحلیل ارتعاش تیر کنسولی از جنس آلیاژ حافظه‌دار و حل معادلات در حالتی که تغییر فاز انجام می‌شود از روش تفاضلات مربعی، نیومارک و الگوریتم نگاشت برگشتی بهره گرفته شده است. در پایان اثر پارامترهای مختلف هندسی بر روی تیر مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که روش عددی به کار گرفته شده برای تحلیل پاسخ زمانی و فرکانسی تیر آلیاژ حافظه‌دار دارای همگرایی بالایی بوده و تأثیرات غیرخطی ماده ناشی از تغییر فاز هنگام حرکت را به‌خوبی پیش‌بینی می‌کند.

کلیدواژه‌ها:
 ارتعاش اجباری
 تیر کنسولی
 آلیاژ حافظه‌دار
 سوپرالاستیک
 روش تفاضلات مربعی

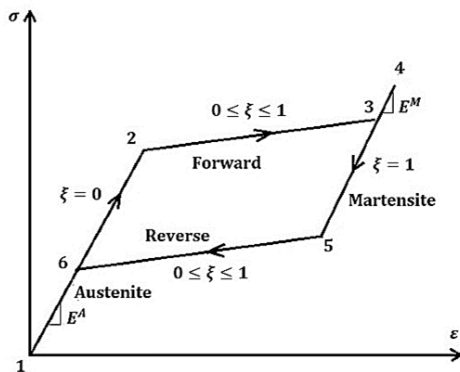
.. **استناد:** یوسف زاده شهرروز، نصراله براتی امیرحسین، دوستدار محمد مهدی. پاسخ دینامیکی یک تیر یکسر گیردار از جنس آلیاژ حافظه‌دار در تماس با سیال با استفاده از روش تفاضلات مربع مکانیک هوافضا. (۱۴۰۴) ۲۱(۲): ۹۹-۸۱. <https://doi.org/10.47176/MAJ.2025.1492>

ناشر: دانشگاه جام امام حسین (ع).

© نویسندگان.



مدول یانگ ماده در فاز مارتنزیت خالص است. (5 → 4): مسیر باربرداری الاستیک - فاز مارتنزیت خالص که شیب آن E^M است. (6 → 5): مسیر انتقال فاز پسر-ترکیبی از فاز آستنیت و مارتنزیت. (1 → 6): مسیر باربرداری الاستیک-فاز آستنیت خالص که شیب آن E^A است [۲].



شکل ۱: نمودار رفتار سوپرالاستیک آلیاژ حافظه‌دار [۱]

محققان بسیاری به مطالعه رفتار پیچیده دینامیکی سیستم‌های دارای آلیاژهای حافظه‌دار پرداخته‌اند که شامل رفتار ارتعاشی تیرها و ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده باسیم آلیاژ حافظه‌دار می‌شود. برای نمونه کولت و همکاران [۵] در سال ۲۰۰۱، ارتعاشات تیر یکسر گیردار SMA تحت یک تحریک الکترومغناطیس سبک را مورد مطالعه قرار دادند. در این بررسی از دو روش المان محدود و روش آزمایشگاهی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر در دو فاز آستنیت و مارتنزیت استفاده شد. نتایج مربوط به پاسخ‌های فرکانسی نشان می‌دهد رفتار نرم شوندگی در پاسخ فرکانسی تیر مورد مطالعه به خوبی مشاهده می‌شود.

سیلکه [۶] در سال ۲۰۰۲، به مطالعه ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم یک درجه آزادی جرم صلب آویزان شده توسط لوله آلیاژ حافظه‌دار تحت بارگذاری پیچشی پرداخت. در این تحقیق از مدل اصلاح‌شده مولر-آخنباخ برای بررسی رفتار آلیاژ حافظه‌دار در حالت شبه پلاستیسیته و سوپرالاستیسیته استفاده شد. تحلیل ارتعاشات آزاد نشان می‌دهد که ماده در حالت شبه پلاستیسیته میرایی بیشتری از خود نشان می‌دهد.

اورتین و دیلای [۷] در سال ۲۰۰۲، مروری بر رفتار هیستریزیس در آلیاژهای حافظه‌دار داشتند. هان و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۳، به ارائه یک دمپر بر پایه سیم‌های

۱- مقدمه

آلیاژهای حافظه‌دار^۱ (SMA) گروهی از آلیاژها هستند که در مقایسه با سایر آلیاژها دارای خواص متمایزی هستند. در طی چند دهه اخیر، ویژگی‌های منحصر به فرد آلیاژهای حافظه‌دار مانند حافظه شکلی و سوپرالاستیک توجه بسیاری از محققین را برای استفاده در کاربردهای مختلف به خود جلب کرده است [۱]. همچنین خاصیت ارتجاعی بالا، حافظه شکلی حرارتی سبب شده است که از آلیاژهای حافظه‌دار در کاربردهای پزشکی استفاده شود [۲]. از ویژگی‌های آلیاژهای حافظه‌دار مقاومت قابل توجه در برابر خستگی تحت چرخه‌های کرنشی بزرگ، پایداری و دوام-پذیری زیاد، مقاومت قابل توجه در برابر خوردگی است. از آنجایی که این آلیاژها می‌تواند ارتعاشات موجود را کاهش دهد و باعث شود فرکانس‌های طبیعی ساختار تنظیم گردد، استفاده از آنها سبب تقویت سازه‌ها و مقاوم‌سازی آنها می‌شود [۳].

رفتار تنش کرنش این مواد دو پدیده غیرخطی، اثر حافظه-داری و اثر شبه الاستیک را در برمی‌گیرد و دارای دوفاز دما بالا به نام آستنیت و دما پایین به نام مارتنزیت هستند [۴]. در آلیاژ حافظه‌دار اثر حافظه شکلی به خاطر تغییر فاز ناشی از تغییر دما به وجود می‌آید و اثر سوپرالاستیسیته به علت اعمال تنش در یک دمای ثابت بالاتر از A_f ایجاد خواهد شد. در این تحقیق تنها رفتار سوپرالاستیک ماده آلیاژ حافظه‌دار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۱ نمودار تنش-کرنش برای اثر شبه الاستیک به صورت شماتیک رسم شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود در اثر بارگذاری و باربرداری یک سیکل هیستریزیس در ماده به وجود می‌آید که سطح محصور داخل آن انرژی میرا شده را نشان می‌دهد [۳].

مسیرهای پیموده شده در هنگام یک سیکل کامل بارگذاری - باربرداری بدین شرح است: (1 → 2): مسیر بارگذاری الاستیک - فاز آستنیت خالص که خطی بوده و شیب آن E^A برابر مدول یانگ ماده در فاز آستنیت خالص است. (2 → 3): مسیر انتقال فاز پیشرو - ترکیبی از فاز آستنیت و مارتنزیت. (3 → 4): مسیر بارگذاری الاستیک-فاز مارتنزیت خالص که خطی بوده و شیب آن E^M برابر

1. Shape Memory Alloys

گرفت و اثرات میرایی سازه‌ای، شرایط مرزی و سرعت سیال بر ارتعاشات بحث شد.

شیائو و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۱۱ تأثیر آلیاژهای حافظه‌دار بر رفتار ارتعاش آزاد و کماتش ورق‌های کامپوزیتی چندلایه را با تغییر فاصله فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی و مطالعه قراردادند. نتایج حاصله از این تحقیق نشان داد که افزایش کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار منجر به کاهش جابه‌جایی‌های پس کماتش ورق و اصلاح فرکانس‌های طبیعی آن به‌طور چشمگیری می‌شود.

ونگ و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۲، به طراحی یک سیستم نوسانگر شامل جرم متمرکز متصل به انتهای میله آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. در این بررسی به‌منظور تحلیل ارتعاشی سیستم، یک مدل غیرخطی دینامیکی و نیز یک روش حل عددی پربازده پیشنهاد شد. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد که در دماهای پایین، میله آلیاژ حافظه‌دار به‌صورت یک دمپر رفتار می‌کند.

اسدی و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۳، ارتعاشات با دامنه بالا و پس کماتش حرارتی تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده توسط فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار با لایه‌چینی متقارن و غیرمتقارن را مورد بررسی قراردادند. در این تحقیق از تئوری تیر اولر-برنولی و مدل تک‌بعدی برینسون جهت شبیه‌سازی رفتار آلیاژ حافظه‌دار استفاده و حل فرم بسته‌ای برای تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی و پس کماتش حرارتی چنین تیرهایی ارائه شد.

اسدی و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۱۳، ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده با آلیاژ حافظه‌دار را در محدوده پیش و پس کماتش حرارتی مورد بررسی قراردادند. در این بررسی معادلات غیرخطی حرکت بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و معادلات وون کارمن با استفاده از اصل همیلتون استخراج‌شده و از مدل برینسون جهت مدل‌سازی رفتار SMA استفاده شد. نتایج نشان داد که وجود سیم‌های SMA در تیر باعث افزایش دمای کماتش و فرکانس پایه در محدوده پیش کماتش می‌شود.

خلیلی و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۱۳، به مطالعه پاسخ دینامیکی غیرخطی یک تیر ساندویچی با ورق‌های سطحی آلیاژ حافظه‌دار در حالت سوپرلاستیک با استفاده از مدل برینسون و تئوری المان محدود مرتبه بالا پرداختند. خلیلی

آلیاژ حافظه‌دار جهت کنترل ارتعاشات سازه‌ای پرداختند. نتایج تجربی نشان داد که افت ارتعاشات سازه‌های مورد مطالعه با بکارگیری دمپر ارائه‌شده بسیار سریع‌تر بوده است. پیکزیکا و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۵، ویژگی‌های میرایی و ذخیره انرژی در آلیاژهای حافظه‌دار نیکل-تیتانیوم را به‌صورت تجربی بر اساس ویژگی‌های سوپر الاستیک تحت شرایط بارگذاری ترمومکانیکی مختلف مورد مطالعه قراردادند.

هاشمی و خادم [۱۰] در سال ۲۰۰۶ مدل ریاضی بر اساس مدل آریکیو ارائه کردند که عدم تقارن در کشش و فشار و نیز اثرات دما بر هیستریزس ماده در شرایط سوپرلاستیسیته را در نظر می‌گیرد. ایشان همچنین به تحلیل رفتار دینامیکی یک تیر نیکل - تیتانیوم با شرایط مرزی یکسر آزاد - یکسر گیردار و دوسر مفصل در ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری تحت بارهای ضربه‌ای و سینوسی پرداختند.

ماکادو [۱۱] در سال ۲۰۰۷، دینامیک غیرخطی یک دستگاه میراگر و عایق ارتعاشی را با استفاده از شبیه‌سازی عددی و تست‌های تجربی مورد بررسی قرار داد. دستگاه مورد مطالعه شامل جرم متصل به بدنه با استفاده از سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار بود که تحت مجموعه‌ای از توابع شتاب پیوسته به فرم سینوسی قرار داشت.

جعفری و غیاثوند [۱۲] در سال ۲۰۰۸، به ارائه پاسخ دینامیکی تیرهای آلیاژ حافظه‌دار تحت بار متمرکز متحرک پرداختند. در این تحقیق از مدل توسعه‌یافته آریکیو-مولر، معادلات لاگرانژ و تابع آزمون چند جمله‌ای که بیانگر تغییر شکل تیر است، استفاده شد و رفتار نرم شونده‌ی تیر ناشی از تغییر فاز ماده به‌خوبی مشاهده شد.

چنک [۱۳] در سال ۲۰۱۱ ویژگی‌های میرایی آلیاژهای حافظه‌دار نیکل-منگنز-تیتانیوم را برای اولین بار مورد مطالعه قراردادند. نتایج این بررسی نشان داد که این آلیاژ حافظه‌دار دارای میرایی بالا برای کاربردهای با دمای بالاست.

رینالدی و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۱۰ آنالیز تحلیلی لوله‌های با مقیاس میکرو عبور دهنده سیال و اثرات سرعت سیال بر میرایی، پایداری و شیفیت فرکانسی را مورد بررسی قراردادند. تحلیل بر اساس مکانیک پیوسته کلاسیک صورت

ساختاری اصلاح شده یک بعدی برینسون برای توصیف رفتار آلیاژ حافظه‌دار استفاده کردند.

رضویار و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۸، تجزیه و تحلیل دینامیکی یک تیر آلیاژ حافظه‌دار شبه الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها معادلات حاکم بر حرکت را با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی و با استفاده از اصل همپلتون استخراج کردند و معادلات دیفرانسیل بدست آمده را با استفاده از روش گالرکین و نیومارک حل کردند. نتایج عددی حاصل از کار آن‌ها نشان داد که به دلیل اثر میرایی ناشی از هیستریزس، دامنه ارتعاش در مقایسه با یک تیر الاستیک معادل کوچکتر است و در نتیجه، تیر آلیاژ حافظه‌دار رفتار پایدارتری در فرکانس‌های رزونانس از خود نشان می‌دهد.

خیرخواه و خسروی [۲۷] در سال ۲۰۱۸، به تجزیه و تحلیل کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی کامپوزیتی تقویت شده توسط سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. آن‌ها روش المان محدود سه بعدی را برای مدلسازی و تحلیل ورق ساندویچی مورد استفاده قرار دادند. همچنین بر اساس نتایج ارائه شده نتیجه گرفتند که جاسازی سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار در ورق‌های صفحات ساندویچی رفتارهای مکانیکی را بهبود می‌بخشد و ظرفیت بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی را افزایش می‌دهد.

نکویی و همکاران [۲۸] در سال ۲۰۱۹، به تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی چندلایه تقویت شده با فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. آن‌ها از خاصیت وابسته به دمای فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار استفاده کردند و با استفاده از قانون ساختاری یک بعدی برینسون، خواص حرارتی مکانیکی مانند تنش‌های بازبایی، مدول الاستیسیته و مدول برشی با تغییر دمای یکنواخت برای الیاف آلیاژ حافظه‌دار را محاسبه کردند. نتایج کار آن‌ها حاکی از آن بود که استفاده مناسب از الیاف آلیاژ حافظه‌دار به‌طور قابل توجهی فرکانس و کنترل ارتعاش پوسته مخروطی کامپوزیتی شامل آلیاژ حافظه‌دار را افزایش می‌دهد.

کریمی اصل و همکاران [۲۹] در سال ۲۰۱۹، رفتار ارتعاشی غیرخطی آزاد و اجباری پوسته‌های مرکب کامپوزیتی منحنی چند مقیاسی تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار را

و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۳، مدل المان محدود غیر-خطی جدیدی را برای تحلیل دینامیکی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی شامل فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار ارائه کردند.

خلیلی و دهکردی [۲۱] در سال ۲۰۱۵، به ارائه تحلیل فرکانسی ورق ساندویچی با صفحات کامپوزیتی حاوی سیم‌های SMA و هسته وابسته به دما پرداختند. در این بررسی از کرنش‌های غیرخطی و مدل برینسون جهت مدل‌سازی رفتار SMA استفاده شد. نتایج آن‌ها نشان داد که افزایش دما منجر به کاهش فرکانس‌های طبیعی در ورق‌های ساندویچی کلاسیک بدون سیم‌های تقویت کننده SMA می‌شود.

فروزش و جعفری [۲۲] در سال ۲۰۱۵، به تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای از جنس آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. نتایج نشان داد که فرمولاسیون و روش‌های حل عددی ارائه شده برای تحلیل پاسخ زمانی و فرکانسی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس آلیاژ حافظه‌دار دارای صحت و سرعت همگرایی بالایی بوده و به خوبی رفتار ارتعاشی چنین پوسته‌های را با در نظر گرفتن تأثیرات غیرخطی ماده ناشی از انتقال فاز هنگام حرکت، پیش‌بینی می‌کنند.

مجبایی و خیری خواه [۲۳] در سال ۲۰۱۷، مدل‌سازی و کنترل هوشمند ارتعاشات ورق کامپوزیتی یکسر گیردار مسلح با سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار را مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که کنترل کننده‌های طراحی شده دامنه جابه‌جایی پایدار ورق را بطور چشمگیری کاهش می‌دهند و در این بین کنترل کننده ترکیبی فازی-کلاسیک بهترین عملکرد را داراست.

کومبهار و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۱۸، به صورت تجربی و تحلیلی به بررسی پاسخ دینامیکی سیستمی پرداختند که در آن آلیاژ حافظه‌دار و الاستومر مغناطیسی با هم ترکیب شدند تا به عنوان یک سیستم دمپر جرم فنری هوشمند در یک جاذب ارتعاشی تنظیم شده عمل کنند. آن‌ها از کامپوزیت به عنوان عنصر تنظیم سختی دوطرفه در جاذب ارتعاشی برای به حداقل رساندن اثرات نامطلوب دمای پایین، با افزایش سختی معادل استفاده کردند.

والدر استفن و همکاران [۲۵] در سال ۲۰۱۸، تأثیر آلیاژهای حافظه‌دار بر رفتار دینامیکی روتورهای انعطاف پذیر را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها به منظور ارزیابی عملکرد سیستم بررسی عددی و تجربی انجام دادند و از مدل

تحقیق آن‌ها نشان داد که تغییر فاز آلیاژ موجب کاهش استحکام ماده می‌شود و رفتار غیرخطی نرم شوندگی در آلیاژ حاصل می‌شود.

در سال ۲۰۲۳، محمودآبادی و همکاران [۳۴] یک روش نیمه-تحلیلی برای مطالعه ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ساخته شده از آلیاژ حافظه‌دار با در نظر گرفتن رفتار سوپرالاستیک ارائه دادند. آن‌ها از روش گالرکین برای حل معادلات حاکم بر تیر بهره گرفتند. نتایج عددی نشان داد که تیر SMA رفتار دینامیکی بسیار غیرخطی از خود نشان می‌دهد و می‌تواند به‌عنوان یک محرک برای اتلاف انرژی استفاده شود.

باسکار و همکاران [۳۵] در سال ۲۰۲۴، یک مدل تحلیلی برای ارزیابی فرکانس‌های طبیعی یک تیر تقویت‌شده با آلیاژ حافظه‌دار را ارائه دادند. آن‌ها اثرات پارامترهای مختلف طراحی برای الیاف SMA بلند (پیوسته) و کوتاه (ناپیوسته) تعبیه شده در کامپوزیت‌ها را بررسی کردند. مشاهده شد که الیاف SMA کوتاه با نسبت ابعاد بالاتر می‌توانند فرکانس‌های خود را مشابه کامپوزیت‌های فیبر SMA بلند تنظیم کنند.

از کاربردهای بارز این تحقیق می‌توان به جداسازی پایه‌لرزه-ای ساختمان‌ها برای مقاومت در برابر زلزله و حفاظت از ساختمان در برابر نیروها، مته‌های نایتینول در پزشکی و فریم‌های عینک اشاره کرد. مرور کارهای گذشته محققان که بخشی از آن‌ها در بالا اشاره شد نشان می‌دهد که تاکنون تحقیقی در زمینه تحلیل ارتعاشات اجباری تیر کنسولی از جنس آلیاژ حافظه‌دار در تماس با سیال صورت نگرفته است. از این‌رو در این مقاله برای نخستین بار به بررسی رفتار ارتعاشی یک تیر کنسولی از جنس آلیاژ حافظه‌دار در حالت سوپرالاستیک تحت نیروی هارمونیک پرداخته شده است. در این پژوهش از تئوری کلاسیک و اصل همپلتون برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است و رفتار آلیاژ حافظه‌دار توسط مدل سه‌بعدی بوید-لاگوداس مدل شده است. همچنین برای بررسی پاسخ‌های زمانی و فرکانسی تیر از روش‌های تفاضلات مربعی، روش زمانی نیومارک و الگوریتم نگاشت برگشتی صفحه برنده محذب استفاده شده است. در پایان برای صحت‌گذاری نتایج

مورد مطالعه قراردادند. آن‌ها کرنش‌ها و تنش‌ها را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روابط غیرخطی فون-کارمن تعیین کردند. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون استخراج گردید و با استفاده از روش اغتشاش چند مقیاسی حل شد. نتایج حاصل کار آن‌ها نشان داد که شکل موده‌های ارتعاشی تأثیر قابل‌توجهی بر فرکانس غیرخطی پوسته مرکب دارد.

فرج پور و همکاران [۳۰] در سال ۲۰۱۹، تأثیر پیش‌بار دو محوره بر رفتار ارتعاشی ورق‌های کامپوزیتی در مقیاس کوچک تقویت‌شده توسط نانو الیاف آلیاژ حافظه‌دار را مورد تجزیه و تحلیل قراردادند. آن‌ها از مدل برینسون، الاستیسیته غیرخطی و مدل پایه پاسترناک برای در نظر گرفتن اثرات آلیاژ حافظه‌دار، تأثیر وابسته بودن به اندازه و تأثیر ماتریس الاستیک بر رفتار ارتعاشی استفاده کردند. همچنین اصل همپلتون را برای استخراج معادلات حرکت به کار بردند و با استفاده از روش گالرکین فرکانس‌های طبیعی را تعیین کردند.

گل زردیان و همکاران در سال ۲۰۲۰ [۳۱]، به‌طور تجربی ویژگی‌های خمشی و ارتعاش آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده باسیم‌های آلیاژ حافظه‌دار را مورد بررسی قراردادند. آن‌ها از فیبرهای آلیاژ حافظه‌دار به‌عنوان ابزاری برای تأثیر گذاری و تنظیم پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی سازه استفاده کردند.

اشرفی و همکاران [۳۲] در سال ۲۰۲۰، میرایی و ارتعاش آزاد غیرخطی میکرو تیر با لایه آلیاژ حافظه‌دار شبه الاستیک را بر اساس تئوری تنش اصلاح‌شده مورد بررسی قراردادند. آن‌ها معادله حاکم بر حرکت را با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی همراه با تئوری تنش اصلاح‌شده از طریق اصل همپلتون استخراج کردند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که افزایش مقیاس طول مواد نسبت به ضخامت اثر کاهشی بر ظرفیت میرایی دارد.

نصراله براتی و همکاران در سال ۱۴۰۰ [۳۳] به بررسی ارتعاشات اجباری ورق دایروی تو خالی از جنس آلیاژ حافظه‌دار با لبه‌های گیردار تحت نیروی هارمونیک پرداختند. میدان جابجایی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دست آمد. معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون استخراج‌شده و برای مدل سازی رفتار ماده سوپر الاستیک از مدل، بوید-لاگوداس استفاده کردند. نتایج

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

با جایگذاری روابط (۱) در روابط (۲) و صرفنظر از ترم‌های غیرخطی، رابطه کرنش-تغییر مکان به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (3)$$

رابطه تنش-کرنش برای آلایژ حافظه‌دار به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(\xi)(1-\vartheta)}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)} [\varepsilon_{xx} - \varepsilon_x^t] \quad (4)$$

که E و ν به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون و ε^t مولفه‌های کرنش برگشتی و ξ کسر حجمی مارتنزیت برای آلایژ حافظه‌دار می‌باشد. با جایگذاری از رابطه (۳) در رابطه (۴) می‌توان تنش‌ها را بر حسب جابه‌جایی‌ها تعیین کرد:

$$\sigma_x = \frac{E(\xi)(1-\vartheta)}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \varepsilon_x^t \right] \quad (5)$$

نیروها و ممان‌های منتهی به صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۶]

$$(N_x, M_x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z) \sigma_x dz \quad (6)$$

که N نیروی منتهی و M گشتاور منتهی می‌باشد. با جایگذاری از رابطه (۵) در رابطه (۶) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت، نیروها و تنش‌های منتهی به صورت زیر تعیین خواهد شد:

$$\begin{aligned}N_x &= E_1 h \left[(1-\vartheta) \frac{\partial u_0}{\partial x} - (1-\vartheta) \varepsilon_x^t \right] \\ M_x &= -\frac{E_1 h^3}{12} \left[(1-\vartheta) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right]\end{aligned} \quad (7)$$

که E_1 به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$E_1 = \frac{E(\xi)(1-\vartheta)}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)} \quad (8)$$

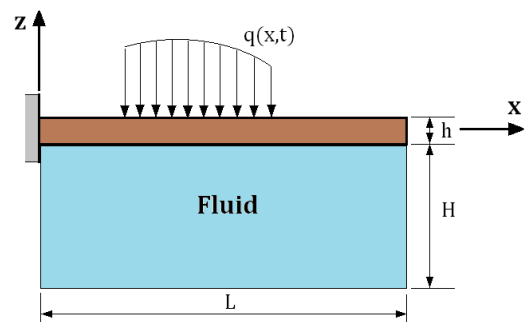
برای تعیین معادلات حرکت حاکم از اصل همپلتون استفاده می‌گردد. طبق این اصل [۱۵]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_{n.c}) dt = 0 \quad (9)$$

در حالت آستنیت خالص که شرایط ایزوتروپیک دارد (تمامی مولفه‌های کرنش انتقال حذف می‌شوند و $\xi = 0$) قرار داده خواهد شد) و در حالت غیرخطی نتایج با مرجع [۳۶] مقایسه شده است. همچنین به منظور اعتبارسنجی نتایج این تحقیق با در نظر گرفتن رفتار آلایژ حافظه‌دار و بدون تماس با سیال، نتایج حاصل با نرم‌افزار آباکوس مورد مقایسه قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم

در این پژوهش ارتعاشات اجباری یک تیر کنسولی از جنس آلایژ حافظه‌دار تحت فشار هارمونیک در تماس با سیال مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابق شکل ۲ تیر دارای طول L ، ارتفاع h و پهنای b است که در تماس با سیال به ارتفاع H است.



شکل ۲: تیر کنسولی آلایژ حافظه‌دار تحت فشار هارمونیک در تماس با سیال و نحوه استقرار محورهای مختصات

مولفه‌های جابجایی هر نقطه در تئوری کلاسیک بصورت رابطه (۱) تعریف می‌شود [۱۸].

$$\begin{aligned}U(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ W(x, z, t) &= w_0(x, t)\end{aligned} \quad (1)$$

که z فاصله یک نقطه از لایه میانی و U و W به ترتیب جابجایی ورق در راستای محورهای x و z است. همچنین u_0 و w_0 به ترتیب بیانگر جابجایی صفحه میانی تیر در راستای محورهای x و z است.

با استفاده از روابط غیرخطی ون کارمن، روابط کرنش-تغییر مکان در مختصات دکارتی به صورت زیر بیان می‌گردد [۱۷]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2\end{aligned} \quad (2)$$

برای به دست آوردن مدل ریاضی یک سیال فرضیات زیر برای رفتار مدل دینامیکی آن در نظر گرفته می‌شود: جابجایی‌ها و سرعت سیال کوچک فرض می‌شود (به همین دلیل می‌توان از اثر نیروهای درگ و لیفت سیال صرف‌نظر نمود). رفتار سیال به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود. سیال ایده‌آل فرض می‌شود به نحوی که برای آن یک تابع پتانسیل می‌توان یافت. شرایط اولیه سیال صفر و فرمول‌بندی براساس تابع پتانسیل سرعت در نظر گرفته می‌شود. در نظر گرفتن دامنه محدود برای سیال، صرف‌نظر کردن از اثر امواج، تراکم ناپذیری، غیر ویسکوز و غیر چرخشی بودن سیال از دیگر فرضیات است. با توجه به فرضیات گفته شده برای سیال در تماس با تیر، تابع پتانسیل سرعت Φ باید معادله لاپلاس را در دامنه سیال ارضا کند. این معادله در مختصات دکارتی به فرم زیر می‌باشد [۳۸ و ۳۹]:

$$\nabla^2 \Phi(x, z, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (17)$$

مولفه‌های سرعت در دو راستا (x, z) به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (18)$$

با توجه به مطالب بیان شده در قسمت قبل، سرعت سیال و تیر در سطح تماس در راستای عمود بر سطح تیر (راستای z) برابر است، بنابراین:

$$V_z = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=-h/2} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (19)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها تابع پتانسیل سیال را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Phi = F(z)G(x, t) \quad (20)$$

با جایگذاری از رابطه (۲۰) در رابطه (۱۹) داریم:

$$G(x, t) = \frac{1}{F'(-h/2)} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (21)$$

بنابراین تابع پتانسیل به صورت زیر خواهد شد:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(z)}{F_n'(-h/2)} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (22)$$

برای تعیین $F(z)$ ، رابطه (۲۰) در رابطه (۱۷) قرار داده می‌شود و روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} F_n'' - \lambda_n^2 F_n &= 0 \\ G_n'' + \lambda_n^2 G_n &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

که T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و $W_{n.c}$ کار نیروهای خارجی غیر پایستار می‌باشد. انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر از رابطه زیر تعیین می‌شود [۴۰]

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \int_0^L \sigma_x \varepsilon_x dx d\theta dz \end{aligned} \quad (10)$$

با جایگذاری از روابط (۳) و (۵) در رابطه (۱۰) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت و اعمال عملگر δ و با استفاده از انتگرال جز به جز روی عبارت حاصل، تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر خواهد شد:

$$\delta U = - \int_0^b \int_0^L \{N_{x,x} \delta u_0 + M_{x,xx} \delta w_0\} dx dy \quad (11)$$

انرژی جنبشی تیر از رابطه زیر تعیین می‌شود [۶۳]

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dV \quad (12)$$

با جایگذاری از رابطه (۱) در رابطه (۱۲) انرژی جنبشی به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \int_0^L \rho \left(\dot{u}_0^2 - 2z\dot{u}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + z^2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \dot{w}_0^2 \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (13)$$

با انتگرال‌گیری در راستای ضخامت در رابطه (۱۳) و اعمال عملگر δ و با استفاده از انتگرال جزء‌به‌جزء و صرف‌نظر از ترم‌های چرخش، تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^L -\rho h (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) dx dy dt \quad (14)$$

کار ناشی از نیروهای خارجی ناپایستار شامل دو قسمت می‌باشد: الف- ناشی از بار گسترده روی تیر. ب- ناشی از تماس با سیال. اگر $q(x, t)$ بار گسترده اعمالی و $p(x, t)$ فشار اعمالی ناشی از سیال به تیر باشد، تغییرات کار نیروهای خارجی ناپایستار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta W_{n.c} = \int_0^b \int_0^L (p(x, t) - q(x, t)) \delta w_0 dx dy \quad (15)$$

با جایگذاری از روابط (۱۰)، (۱۳) و (۱۵) در رابطه (۹) و استفاده از اصل حساب تغییرات، معادلات حاکم بر حرکت تیر مفروض به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} N_{x,x} &= \rho h \ddot{u}_0 \\ M_{x,xx} - q(x, t) &= \rho h \ddot{w}_0 - p(x, t) \end{aligned} \quad (16)$$

۳- فشار دینامیکی سیال

$$\begin{aligned}
 & E_1 \left[(1 - \vartheta) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - (1 - \vartheta) \varepsilon_{x,x}^t \right] \\
 & + E_{1,x} \left[(1 - \vartheta) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right. \\
 & \left. - (1 - \vartheta) \varepsilon_x^t \right] = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
 & - \frac{E_1 h^3}{12} \left[(1 - \vartheta) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right] \\
 & - \frac{E_{1,x} h^3}{6} \left[(1 - \vartheta) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right] \\
 & - \frac{E_{1,xx} h^3}{12} \left[(1 - \vartheta) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] \\
 & - q(x, t) \\
 & = \left(\rho h \right. \\
 & \left. + \rho_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth\left(\frac{n\pi}{L} H\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{۲۹}$$

۴- روش‌های عددی

در این پژوهش برای بررسی ارتعاشات تیر کنسولی از دو روش عددی استفاده شده است. برای حل عددی معادلات حاکم بر حرکت از نظر مکانی، روش تفاضلات مربعی که یک روش سریع و دقیق است استفاده گردیده است. نقاط انتخابی در روش تفاضلات مربعی با فاصله مساوی در نظر گرفته شده است که در راستای ۲ به صورت رابطه (۳۰) است [۲]:

$$r_i = \frac{i-1}{N_r-1}(b-a) ; \quad i = 1, \dots, N_r \tag{۳۰}$$

با اعمال روش تفاضلات مربعی در معادلات (۲۹) معادله ماتریسی (۳۱) به دست می‌آید:

$$M\ddot{\Delta} + k\Delta = F_1 + F_2, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \{\Delta_b\} \\ \{\Delta_d\} \end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

که در آن Δ بردار جابجایی (در راستای محور Z) همه نقاط شامل بردارهای Δ_b و Δ_d است که به ترتیب بردار جابجایی مربوط به نقاط مرزی و بردار جابجایی مربوط به سایر نقاط هستند. همچنین M و K به ترتیب ماتریس‌های جرم و سختی هستند که تابع ξ بوده و هنگام تغییر فاز ماده عوض می‌شوند. F_2 بردار فشار خارجی و F_1 بردار ناشی از کرنش انتقال است.

همچنین روش‌های عددی متفاوتی برای تقریب‌های زمانی معادلات دیفرانسیل در دسترس قرار دارد که به انتگرال-گیری مستقیم شهرت دارد. رایج‌ترین این روش‌ها عبارتند از روش تفاضل مرکزی، روش ویلسون، روش رانگ-کوتا و

که λ_n مقدار ثابت مثبت می‌باشد. شرایط مرزی برای تابع G با توجه به صفر بودن سرعت سیال در ابتدا و انتهای تیر به فرم زیر است:

$$G'_n(0) = G'_n(L) = 0 \tag{۲۴}$$

با حل معادلات (۲۳) و اعمال شرایط مرزی F_n به فرم زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 F_n(z) = C_1 \left(\cosh\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \right. \\
 \left. + \tanh\left(\frac{n\pi}{L} H\right) \left(H \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{h}{2} \right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \right)
 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

که C_1 مقداری ثابت بوده و با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شود. با جایگذاری از رابطه (۲۵) در رابطه (۲۲) تابع پتانسیل به صورت زیر خواهد شد:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{L} \left(z + H + \frac{h}{2}\right)\right) \partial w}{\left(\frac{n\pi}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L} H\right) \partial t} \tag{۲۶}$$

با استفاده از معادله برنولی و صرفنظر از عبارات غیرچرخشی، فشار سیال در سطح تماس سیال-سازه اینگونه می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 p = p|_{in \text{ contact surface}} \\
 = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{in \text{ contact surface}}
 \end{aligned} \tag{۲۷}$$

با استفاده از روابط (۲۶) و (۲۷) می‌توان فشار دینامیکی اعمالی از سیال به تیر را تعیین کرد:

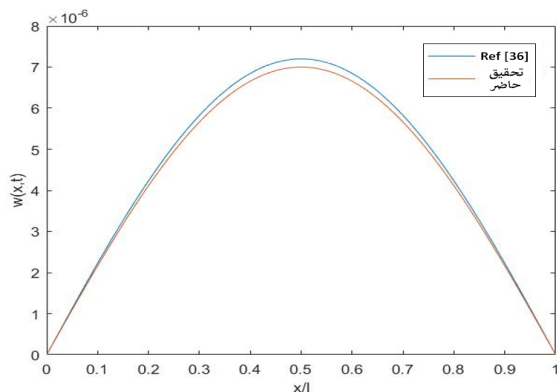
$$\begin{aligned}
 p = -\rho_f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=-h/2} \\
 = -\rho_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth\left(\frac{n\pi}{L} H\right) \partial^2 w}{\left(\frac{n\pi}{L}\right) \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{۲۸}$$

اکنون می‌توان با جایگذاری از روابط (۷) و (۲۸) در رابطه (۱۶) معادله حرکت تیر را برحسب جابه‌جایی‌ها تعیین کرد [۲]:

بعد از این مرحله با توجه به محاسبه مقادیر جدید ξ و ε^t ماتریس‌های K و M و بردار \vec{F}_1 به‌روزرسانی می‌شوند. در ادامه با توجه به مقادیر بروز رسانی شده، روش نیومارک بردار جابه‌جایی را در گام بعدی محاسبه می‌کند سپس با مقایسه جابه‌جایی‌ها در دومین گام و اولین گام اگر تفاوت آن‌ها از مقدار مشخصی کمتر باشد فرآیند تکرار متوقف می‌شود و بردار جابه‌جایی به‌عنوان پاسخ نهایی در نظر گرفته می‌شود در غیر این صورت فرآیند تا زمانی که اختلاف جابه‌جایی‌ها از مقدار تolerانس مشخصی کمتر باشد ادامه می‌یابد.

۵- بحث بر روی نتایج

در این بخش نتایج عددی حاصل از تحلیل ارتعاشات اجباری تیر کنسولی از جنس آلایژ حافظه‌دار نیکل-تیتانیوم که خواص آن در جدول (۱) ارائه شده است بررسی می‌شود. تیر ابتدا در فاز آستینیت کامل قرار دارد که در این شرایط تیر بدون تنش بوده و دمای آن ۲۵ درجه سانتی‌گراد است که با توجه به خواص ماده، بالاتر از A_f است. به‌منظور صحت‌سنجی نتایج بدست آمده از پژوهش حاضر، از نتایج مرجع [۳۶] استفاده شده است. در این مرجع ارتعاش اجباری یک تیر ایزوتروپ در تماس با سیال بررسی شده است. در شکل ۳ نتایج به‌دست‌آمده از پژوهش حاضر با نتایج به‌دست‌آمده از مرجع [۳۶] مقایسه شده است که انطباق خوبی بین پاسخ ارتعاشی در زمان $\frac{T}{2}$ در طول تیر وجود دارد.



شکل ۳: مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج به‌دست‌آمده از مرجع [۳۶]

همچنین، به‌منظور اعتبارسنجی نتایج بدست آمده از پژوهش حاضر با در نظر گرفتن رفتار آلایژ حافظه‌دار،

روش نیومارک. از آنجایی که در معادلات حرکت مشتق زمانی وجود دارد در این پژوهش از روش نیومارک بهره گرفته شده است. در این روش بردارهای سرعت و شتاب بصورت زیر تخمین زده می‌شود [۲۳]:

$$\vec{\Delta}_{q+1} = a_0(\vec{\Delta}_{q+1} - \vec{\Delta}_q) - a_2\vec{\Delta}_q - a_3\vec{\Delta}_q \quad (32)$$

$$\vec{\Delta}_{q+1} = \vec{\Delta}_q + a_6\vec{\Delta}_q + a_7\vec{\Delta}_{q+1}$$

که $\vec{\Delta}_{q+1}$ بردار جابه‌جایی، $\vec{\Delta}_{q+1}$ بردار سرعت و $\vec{\Delta}_{q+1}$ بردار شتاب است. همچنین $t_{q+1} = t_q + \Delta t$ که t_q زمان پیشین و Δt گام زمانی است که زیر نویس q معرف گام زمانی q است. همچنین ضرایب a_i بصورت رابطه (۳۳) بیان می‌شود [۱۴]:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{2} - 2 \right) \quad (33)$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta \Delta t$$

که δ و α پارامترهایی برای کنترل صحت و پایداری روش می‌باشند که به ترتیب طبق مرجع [۲۳] برابر ۰/۵ و ۰/۲۵ هستند. جایگذاری روابط (۳۲) در رابطه (۳۱) منجر به رابطه (۳۴) می‌شود.

$$\vec{K}_{q+1}\vec{\Delta}_{q+1} = \vec{F}_{q,q+1}, \quad \vec{K}_{q+1} = a_0M_{q+1} + K_{q+1}$$

$$\vec{F}_{q,q+1} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)_{q+1} + M_{q+1}(a_0\vec{\Delta}_q + a_2\vec{\Delta}_q + a_3\vec{\Delta}_q) \quad (34)$$

بر اساس رابطه (۳۴) بردار جابه‌جایی مربوط به زمان حال با مشخص بودن بردارهای جابه‌جایی، سرعت و شتاب مربوط به زمان قبل محاسبه می‌شود. در این تحقیق برای محاسبه بردارهای جابه‌جایی و شتاب در هر لحظه از زمان از یک فرآیند تکرار شونده استفاده می‌شود. روند کار بدین صورت است که ابتدا مقادیر کسر حجمی مارتنزیت و تانسور کرنش انتقال به‌عنوان حدس اولیه در نظر گرفته می‌شود و این حدس برای محاسبه ماتریس‌های K و ماتریس‌های M و بردار \vec{F}_1 در زمان موردبررسی استفاده می‌شود و بردار جابه‌جایی در گام بعدی با استفاده از روش نیومارک محاسبه می‌گردد سپس با استفاده از معادلات کرنش-جابه‌جایی تانسور کرنش مربوط به بردار جابه‌جایی زمان موردبررسی به دست می‌آید. سپس با مشخص شدن تانسور کرنش با توجه به الگوریتم نگاشت برگشتی ξ و ε^t محاسبه می‌گردد.

$$c^A = c^M = \frac{-\rho \Delta s_0}{H} \left(\frac{J}{kgK} \right)$$

$$\frac{7/4E\epsilon}{\Delta c}$$

*بالا نویسی‌های A و M به ترتیب مربوط به فاز آستنیت و مارتنزیت است

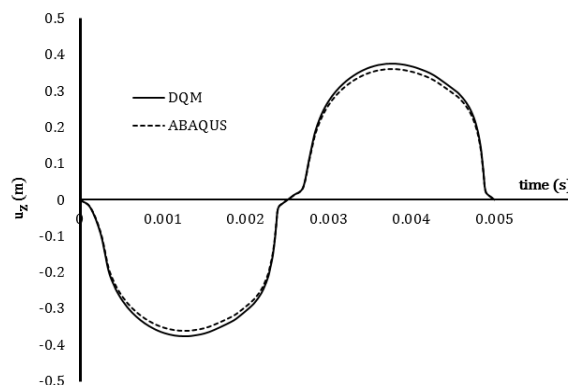
جهت بررسی ارتعاشات اجباری تیر، فرض می‌شود که تیر تحت یک بار یکنواخت سرتاسری هارمونیک به فرم زیر قرار گرفته است:

$$q(x, t) = p \sin(2\pi f t) \quad (35)$$

که p دامنه نیروی تحریک و f فرکانس تحریک است. در این مطالعه، برای تعیین پاسخ ارتعاشی تیر و بررسی پارامترهای موثر، یک فرایند تکراری برای محاسبه بردارهای جابجایی و شتاب در هر زمان انجام می‌شود. ابتدا، مقادیر کسر حجمی مارتنزیت و تانسور کرنش انتقال به‌عنوان یک فرض اولیه در نظر گرفته می‌شود که برای محاسبه ماتریس‌های K ، M و بردار \vec{F}_1 در زمان حال استفاده می‌شوند. در مرحله بعدی، بردار جابجایی از طریق روش نیومارک محاسبه می‌شود. سپس، با استفاده از معادلات کرنش-جابجایی، تانسور کرنش مربوط به بردار جابجایی در زمان حاضر بدست می‌آید. در ادامه، ξ و ϵ^t با تعیین تانسور کرنش با توجه به الگوریتم نگاشت برگشتی محاسبه می‌شوند. پس از این مرحله، ماتریس‌های K و M و بردار \vec{F}_1 با توجه به محاسبه مقادیر جدید ξ و ϵ^t به‌روزرسانی می‌شوند. با توجه به مقادیر به‌روز شده، روش نیومارک بردار جابجایی را در مرحله بعدی محاسبه می‌کند. سپس، اگر اختلاف بین جابجایی‌ها در مرحله اول و دوم کمتر از یک مقدار خاص باشد، روند تکرار متوقف می‌شود، و بردار جابجایی به‌عنوان پاسخ نهایی در نظر گرفته خواهد شد. در غیر این صورت، روند ادامه می‌یابد تا زمانی که اختلاف جابجایی کمتر از یک تیرانس خاص باشد.

در شکل ۵ نتایج مربوط به تنش-کرنش محوری در نقطه میانی تیر آلیاژ حافظه‌دار تحت فشار خارجی در نیم سیکل نشان داده شده است که در آن دوره تناوب $0.005 s$ و دامنه فشار $P_0 = 900 kPa$ در نظر گرفته شده است. با توجه به این نمودار، شدت فشار انتخاب‌شده به میزانی است که منجر به تغییر فاز در ماده نشده و همچنان در فاز آستنیت خالص باقی‌مانده است.

جابجایی عرضی تیر در حالت بدون تماس با سیال با نتایج به‌دست‌آمده از نرم‌افزار آباکوس مطابق شکل ۴ مورد مقایسه قرار گرفته است. در این مدل‌سازی، از خواص جدول ۱ برای آلیاژ حافظه‌دار و $P_0 = 2MPa$ استفاده شده است. همان‌گونه که این شکل نشان می‌دهد انطباق خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود.

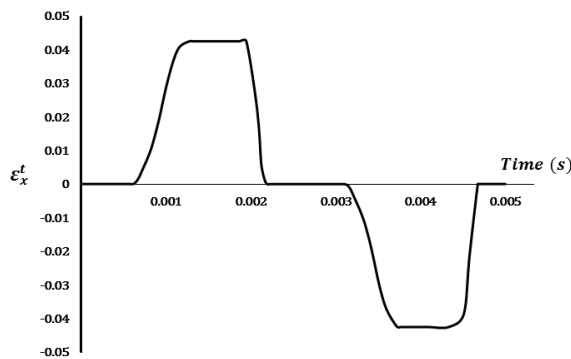


شکل ۴: مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج به‌دست‌آمده از نرم‌افزار آباکوس.

در مطالعه حاضر به‌منظور تحلیل ارتعاشات اجباری تیر یکسر گیردار و مطالعه رفتار غیرخطی پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ورق از کد SMA، DQM و نیومارک استفاده شده است که توسط نرم‌افزار MATLAB آماده شده است. همچنین کد SMA مربوط به الگوریتم نگاشت برگشتی بر اساس مدل سه‌بعدی بوید-لاگوداس نوشته شده است. تعداد نقاط مناسب در روش تفاضلات مربعی از تست همگرایی پاسخ‌ها بدست آمده است که بر اساس آن $N=20$ در تحلیل ارتعاشات اجباری تیر استفاده شده است.

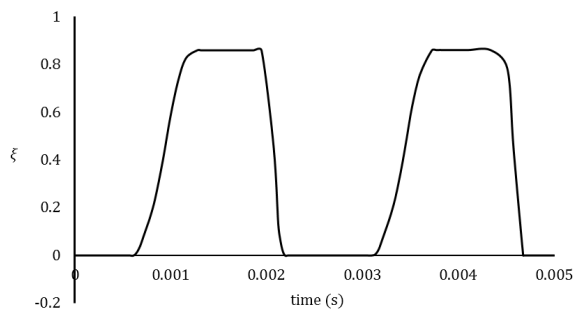
جدول ۱: خواص آلیاژ حافظه‌دار نیکل-تیتانیوم [۱]

مقدار	خواص ماده (واحد)
۱	$L(m)$
۲۷۰	$A_s(K)$
۲۸۰	$A_f(K)$
۲۴۵	$M_s(K)$
۲۳۰	$M_f(K)$
۰/۳	ν
۶۵۰۰	$\rho \left(\frac{kg}{m^3} \right)$
۵۵	$E^A(GPa)^*$
۴۶	$E^M(GPa)^*$
۲۲E-۶	$\alpha \left(\frac{1}{K} \right)$



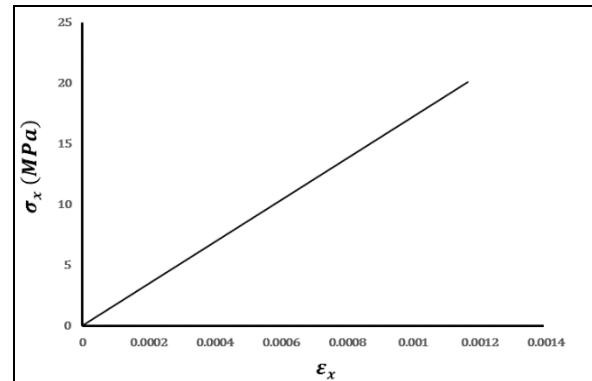
شکل ۷: نمودار کرنش انتقال-زمان برای دامنه فشار $P_0 = 2MPa$

در شکل ۸ نمودار کسر حجمی مارتنزیت-زمان مربوط به نقطه میانی تیر آلیاژ حافظه‌دار تحت فشار خارجی در یک سیکل کامل نشان داده شده است که در آن دوره تناوب 0.005 s و دامنه فشار $P_0 = 2MPa$ در نظر گرفته شده است.



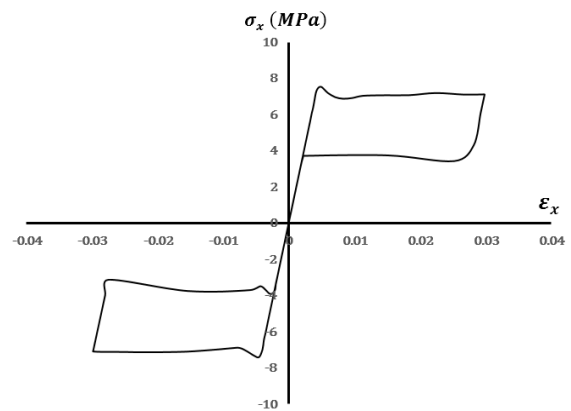
شکل ۸: نمودار کسر حجمی مارتنزیت-زمان برای دامنه فشار $P_0 = 2MPa$

برای بررسی پارامترهای موثر بر رفتار ارتعاشی تیر با توجه به فرکانس تحریک ($f = \omega/2\pi = 190Hz$)، پاسخ ارتعاشی سیستم در یک بازه زمانی 0.005 s و برای نقطه میانی تیر بررسی می‌گردد. در شکل ۹ اثرات تغییر ارتفاع سیال بر روی پاسخ دینامیکی تیر در تماس با سیال را برای دوره تناوب 0.005 s نشان داده شده است. همانطور که نشان داده شده است، با افزایش ارتفاع سیال، جابجایی عرضی تیر افزایش می‌یابد و این تغییرات با افزایش بیشتر ارتفاع سیال ناچیز شده و افزایش ارتفاع آن از یک حدی به بعد، تأثیر چندانی بر جابجایی عرضی تیر ندارد. علت این پدیده را می‌توان به دور شدن دیواره صلب کف مخزن از تیر و کاهش امواج بازگشتی از آن نسبت داد.



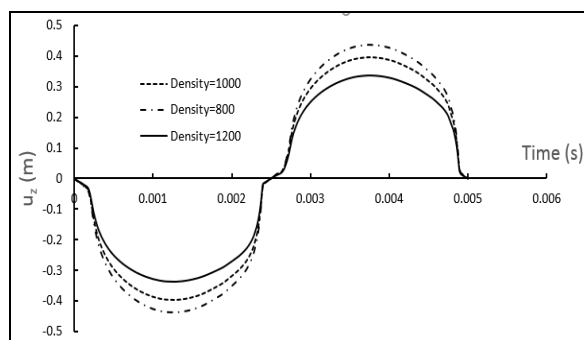
شکل ۵: نمودار تنش-کرنش محوری برای دامنه فشار $P_0 = 900kPa$

در شکل ۶ نتایج مربوط به تنش-کرنش محوری در نقطه میانی تیر آلیاژ حافظه‌دار تحت فشار خارجی در یک سیکل کامل نشان داده شده است که در آن دوره تناوب 0.005 s و دامنه فشار $P_0 = 2MPa$ در نظر گرفته شده است. با توجه به این نمودار، تأثیر میرایی به وجود آمده در ماده به دلیل تغییر فاز از آستنیت به فاز کم‌استحکام‌تر مارتنزیت و در نتیجه ایجاد سیکل هیستریزس حین یک سیکل بارگذاری و باربرداری را به نمایش گذاشته است.



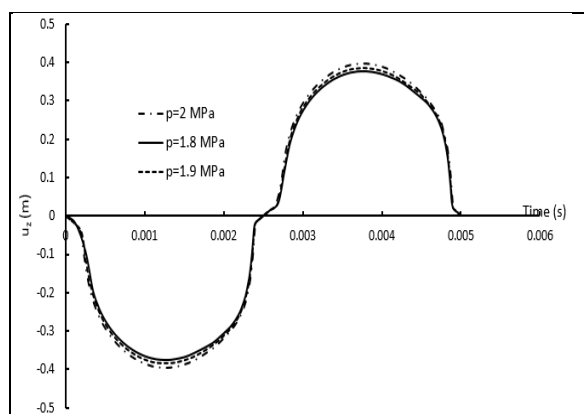
شکل ۶: نمودار تنش-کرنش محوری برای دامنه فشار $P_0 = 2MPa$

در شکل ۷ تغییرات مربوط به کرنش انتقال-زمان در نقطه میانی تیر آلیاژ حافظه‌دار تحت فشار خارجی در یک سیکل کامل نشان داده شده است که در آن دوره تناوب 0.005 s و دامنه فشار $P_0 = 2MPa$ در نظر گرفته شده است.



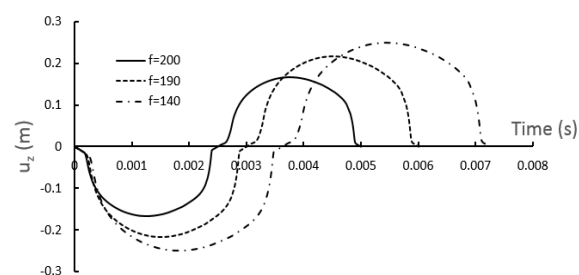
شکل ۱۱: پاسخ دینامیکی تیر کنسولی SMA تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف چگالی سیال.

شکل ۱۲ اثر تغییرات دامنه بار خارجی بر روی پاسخ دینامیکی تیر آلیاژ حافظه‌دار در تماس با سیال را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است، با افزایش دامنه بار دامنه ارتعاش افزایش یافته و افزایش دامنه ارتعاش منجر به افزایش جابجایی عرضی تیر می‌شود.

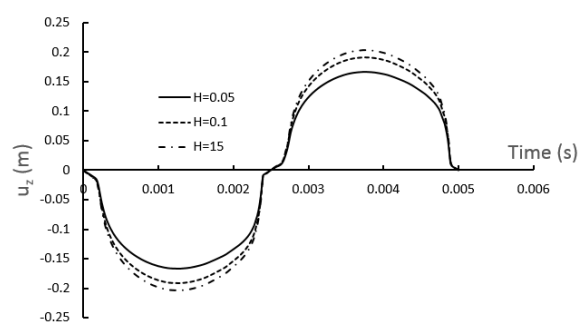


شکل ۱۲: پاسخ دینامیکی تیر کنسولی SMA تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف دامنه بار تحریک.

برای بررسی تأثیر فرکانس تحریک بر پاسخ تیر آلیاژ حافظه‌دار در تماس با سیال، شکل ۱۳ رسم شده است. همانطور که مشخص است، هنگامی که فرکانس تحریک کاهش می‌یابد، دامنه جابجایی عرضی تیر افزایش می‌یابد و حداکثر جابجایی عرضی با تأخیر در زمان اتفاق می‌افتد.

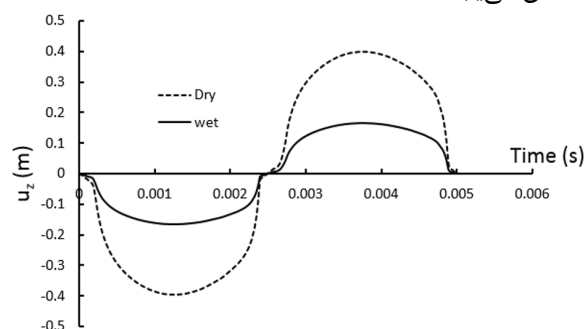


شکل ۱۳: پاسخ دینامیکی تیر کنسولی SMA تحت بار



شکل ۹: پاسخ دینامیکی تیر کنسولی SMA تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف ارتفاع سیال.

جهت بررسی تأثیر حضور سیال بر پاسخ ارتعاشی تیر از جنس آلیاژ حافظه‌دار، شکل ۱۰ ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود حضور سیال به طرز قابل توجهی دامنه پاسخ ارتعاشی را کاهش می‌دهد. به علت اینکه سیال غیرلزج فرض شده و فقط دارای اینرسی است که معادل جرم افزوده شده^۲ به تیر عمل می‌کند. لذا با وجود سیال جرم معادل تیر افزایش یافته و در نهایت جابجایی آن کاهش می‌یابد.



شکل ۱۰: تأثیر حضور سیال بر پاسخ دینامیکی تیر یکسر گیردار ساخته شده از آلیاژ حافظه‌دار تحت بار هارمونیک.

شکل ۱۱ برای بررسی تأثیر چگالی سیال بر روی پاسخ دینامیکی تیر آلیاژ حافظه‌دار در تماس با سیال رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش چگالی سیال (سنگین تر شدن سیال) جابجایی عرضی تیر کاهش می‌یابد. همانطوری که در شکل ۱۰ توضیح داده شده سیال غیرلزج فرض شده و فقط دارای اینرسی است که معادل جرم افزوده شده به تیر عمل می‌کند. لذا با افزایش چگالی سیال، جرم اضافه شده به تیر افزایش یافته که منجر به کاهش جابجایی آن می‌شود.

2. Added Mass

[2] Nasrollah Barati AH, Etemadi Haghighi AA, Haghighi S, Maghsoudpour A. Free and forced vibration analysis of shape memory alloy annular circular plate in contact with bounded fluid. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*. 2022;1-16. DOI 10.1007/s40997-021-00477-7

[3] Świtoński E, Mężyk A, Klein W. Application of smart materials in vibration control systems. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*. 2007;24(1):291-6. DOI 10.1007/s1254-021-87541-2

[4] Schwartz M. *Encyclopedia of smart materials*, 2 volume set 2002.

[5] Collet M, Foltête E, Lexcelent C. Analysis of the behavior of a shape memory alloy beam under dynamical loading. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2001;20(4):615-30. DOI 10.1016/S0997-7538(01)01159-7

[6] Seelecke S. Modeling the dynamic behavior of shape memory alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002;37(8):1363-74. DOI 10.1016/S0020-7462(02)00030-6

[7] Ortín J, Delaey L. Hysteresis in shape-memory alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002;37(8):1275-81. DOI 10.1016/S0020-7462(02)00027-6

[8] Han YL, Li Q, Li AQ, Leung A, Lin PH. Structural vibration control by shape memory alloy damper. *Earthquake engineering & structural dynamics*. 2003;32(3):483-94. DOI 10.1002/eqe.243

[9] Pieczyska E, Gadaj S, Nowacki W, Hoshio K, Makino Y, Tobushi H. Characteristics of energy storage and dissipation in TiNi shape memory alloy. *Science and Technology of Advanced Materials*. 2005;6(8):889-94. DOI 10.1016/j.stam.2005.07.008

[10] Hashemi S, Khadem S. Modeling and analysis of the vibration behavior of a shape memory alloy beam. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2006;48(1):44-52. DOI 10.1016/j.ijmecsci.2005.09.011

[11] Machado LG. *Shape memory alloys for vibration isolation and damping*; Texas A&M University; 2007. DOI 10.1088/0964-1526/25/15/10LV32

[12] Jafari A, Ghiasvand H. Dynamic response of a pseudoelastic shape memory alloy beam to a moving load. *Journal of Sound and Vibration*. 2008;316(1-5):69-86. DOI 10.1016/j.jsv.2008.02.042

هارمونیک برای مقادیر مختلف فرکانس بار تحریک.

۶- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر ارتعاشات اجباری یک تیر یکسر گیردار از جنس آلیاژ حافظه دار در تماس با سیال مورد بررسی قرار گرفت و جهت تحلیل تیر از تئوری کلاسیک استفاده شد. برای تعیین رفتار نوسانی سیال از حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت استفاده شد. برای حل معادلات حاکم بر تیر از روش عددی تفاضلات مربعی بهره گرفته شد. با بررسی نتایج عددی به طور خلاصه نتایج زیر حاصل شد:

۱- نتایج نشان می دهد که روش عددی به کار گرفته شده برای تحلیل پاسخ زمانی و فرکانسی تیر آلیاژ حافظه دار دارای همگرایی بالایی بوده و رفتار ارتعاشی تیر را با در نظر گرفتن تأثیرات غیرخطی ماده ناشی از تغییر فاز هنگام حرکت به خوبی پیش بینی می کند.

۲- جابجایی عرضی تیر SMA در تماس با سیال با وجود سیال کاهش می یابد. چون وجود سیال جرم معادل تیر را افزایش داده و منجر به کاهش جابجایی آن می شود.

۳- با افزایش ارتفاع سیال، جابجایی عرضی تیر SMA به طرز ناچیزی افزایش می یابد و افزایش بیشتر ارتفاع سیال تأثیر چندانی بر جابجایی عرضی تیر ندارد.

۴- با افزایش چگالی سیال (سنگین تر شدن سیال) جابجایی عرضی تیر کاهش می یابد. چون سیال غیرلزج فرض شده و فقط دارای اینرسی است که معادل جرم افزوده شده به تیر عمل می کند. لذا با افزایش چگالی سیال، جرم اضافه شده به تیر افزایش یافته که منجر به کاهش جابجایی آن می شود.

۵- جابجایی عرضی تیر با افزایش دامنه بار تحریک، افزایش می یابد. چون افزایش دامنه بار، دامنه ارتعاش را افزایش داده و افزایش دامنه ارتعاش منجر به افزایش جابجایی عرضی می گردد.

۶- هنگامی که فرکانس تحریک افزایش می یابد، دامنه جابجایی عرضی تیر SMA کاهش می یابد و حداکثر جابجایی عرضی با تأخیر در زمان اتفاق می افتد.

۷- مراجع

[1] Lagoudas DC. *Shape memory alloys: modeling and engineering applications*; Springer; 2008. DOI 10.1007/978-0-387-47685-8

- method. *Thin-Walled Structures*. 2015;93:158-68. DOI 10.1016/j.tws.2015.03.022
- [23] Mojabi SS, Kheirikhah MM. Modeling and intelligent control of vibration of cantilever composite plate embedded with shape memory alloy wires. 2018. DOI 10.1016/as.jsv.2008.02.145
- [24] Kumbhar SB, Chavan S, Gawade S. Adaptive tuned vibration absorber based on magnetorheological elastomer-shape memory alloy composite. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2018;100:208-23. DOI 10.1016/j.ymsp.2017.07.027
- [25] Alves MTS, Steffen Jr V, Castro dos Santos M, Savi MA, Enemark S, Santos IF. Vibration control of a flexible rotor suspended by shape memory alloy wires. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2018;29(11):2309-23. DOI 10.1177/1045389X18758179
- [26] Razavilar R, Fathi A, Dardel M, Arghavani Hadi J. Dynamic analysis of a shape memory alloy beam with pseudoelastic behavior. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2018;29(9):1835-49. DOI 10.1177/1045389X17754268
- [27] Kheirikhah M, Khosravi P. Buckling and free vibration analyses of composite sandwich plates reinforced by shape-memory alloy wires. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2018;40(11):515. DOI 10.1007/s40430-018-1438-4
- [28] Nekouei M, Raghebi M, Mohammadi M. Free vibration analysis of laminated composite conical shells reinforced with shape memory alloy fibers. *Acta Mechanica*. 2019;230:4235-55. DOI 10.1007/s00707-019-02501-z
- [29] Karimiasl M, Ebrahimi F, Mahesh V. Nonlinear free and forced vibration analysis of multiscale composite doubly curved shell embedded in shape-memory alloy fiber under hygrothermal environment. *Journal of Vibration and Control*. 2019;25(13):1945-57. DOI 10.1177/1077546319842426
- [30] Farajpour M, Shahidi A, Farajpour A. Influences of non-uniform initial stresses on vibration of small-scale sheets reinforced by shape memory alloy nanofibers. *The European Physical Journal Plus*. 2019;134(5):218. DOI 10.1140/epjp/i2019-12539-8
- [31] Gol Zardian M, Moslemi N, Mozafari F, Gohari S, Yahya MY, Burvill C, Ayob A. Flexural and free vibration control of smart epoxy composite beams using shape memory alloy wires actuator. [13] Chang S-H. Low frequency damping properties of a NiMnTi shape memory alloy. *Materials letters*. 2011;65(1):134-6. DOI 10.1016/j.matlet.2010.09.073
- [14] Rinaldi S, Prabhakar S, Vengallatore S, Païdoussis MP. Dynamics of microscale pipes containing internal fluid flow: Damping, frequency shift, and stability. *Journal of Sound and Vibration*. 2010;329(8):1081-8. DOI 10.1016/j.jsv.2009.10.025
- [15] Shiau L-C, Kuo S-Y, Chang S-Y. Free vibration of buckled SMA reinforced composite laminates. *Composite Structures*. 2011;93(11):2678-84. DOI 10.1016/j.compstruct.2011.06.008
- [16] Wang L, Melnik RV. Nonlinear dynamics of shape memory alloy oscillators in tuning structural vibration frequencies. *Mechatronics*. 2012;22(8):1085-96. DOI 10.1016/j.mechatronics.2012.09.004
- [17] Asadi H, Bodaghi M, Shakeri M, Aghdam M. An analytical approach for nonlinear vibration and thermal stability of shape memory alloy hybrid laminated composite beams. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2013;42:454-68. DOI 10.1016/j.euromechsol.2013.07.011
- [18] Asadi H, Bodaghi M, Shakeri M, Aghdam M. On the free vibration of thermally pre/post-buckled shear deformable SMA hybrid composite beams. *Aerospace Science and Technology*. 2013;31(1):73-86. DOI 10.1016/j.ast.2013.09.008
- [19] Khalili SMR, Dehkordi MB, Carrera E, Shariyat M. Non-linear dynamic analysis of a sandwich beam with pseudoelastic SMA hybrid composite faces based on higher order finite element theory. *Composite Structures*. 2013;96:243-55. DOI 10.1016/j.compstruct.2012.08.020
- [20] Khalili SMR, Dehkordi MB, Carrera E. A nonlinear finite element model using a unified formulation for dynamic analysis of multilayer composite plate embedded with SMA wires. *Composite Structures*. 2013;106:635-45. DOI 10.1016/j.compstruct.2013.07.006
- [21] Dehkordi MB, Khalili S. Frequency analysis of sandwich plate with active SMA hybrid composite face-sheets and temperature dependent flexible core. *Composite Structures*. 2015;123:408-19. DOI 10.1016/j.compstruct.2014.12.068
- [22] Forouzesh F, Jafari AA. Radial vibration analysis of pseudoelastic shape memory alloy thin cylindrical shells by the differential quadrature

- [42] Reddy JN. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics: Oxford university press; 2015.
- [43] Zhang H, Zhu R, Shi D, Wang Q. A simplified plate theory for vibration analysis of composite laminated sector, annular and circular plate. *Thin-Walled Structures*. 2019;143:106252. DOI 10.1016/j.tws.2019.106252
- [32] Ashrafi MJ, Ghaffari I, Elahinia M, Nematollahi MR. Nonlinear free vibration and damping analysis of a microbeam with pseudoelastic shape memory alloy layer based on the modified couple stress theory. *Journal of Vibration and Control*. 2021;27(7-8):957-68. DOI 10.1177/1077546320935284
- [33] Nasrollah Barati AH, Jafari AA, Etemadi Haghghi S, Maghsoudpour A. Nonlinear Forced Vibration of Annular Plate Made of Shape Memory Alloy. *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of ISME*. 2022;23(4):178-204. DOI 10.30506/IJMEP.2021.521999.1756
- [34] Danesh, N., Mahmoodabadi, M. J., & Fathi, A. R. (2023). Investigation of the damping performance of a shape memory alloy beam. *International Journal of Engineering*, 36(7), 1369-1382.
- [35] Bhaskar, J., Gupta, V., Sharma, A. K., & Bhattacharya, B. (2024). Vibration analysis of active composite structures embedded with long and short shape memory alloy (SMA) fibers. *Engineering Research Express*, 6(2), 025517.
- [36] Eftekhari S, Jafari A. A mixed modal-differential quadrature method for free and forced vibration of beams in contact with fluid. *Meccanica*. 2014;49:535-64. DOI 10.1007/s11012-013-9810-z
- [37] Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The finite element method: solid mechanics*: Butterworth-heinemann; 2000.
- [38] Askari E, Jeong K-H, Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface. *Journal of sound and vibration*. 2013;332(12):3064-85. DOI 10.1016/j.jsv.2013.01.007
- [39] Tariverdilo S, Shahmardani M, Mirzapour J, Shabani R. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Applied Mathematical Modelling*. 2013;37(1-2):228-39. DOI 10.1016/j.apm.2012.02.025
- [40] Bert CW, Malik M. *Differential quadrature method in computational mechanics: a review*. 1996. DOI 10.1115/1.3101882
- [41] Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering*: Springer Science & Business Media; 2012.