

## Development of a Low-Cost Subgrid Model Based on Fractal Theory for Turbulent Flow

A. Bagheri<sup>1</sup>, M.A. Jozvaziri<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> Researcher, NofanavaranPazhooheshMehvarKowthar, Mashhad, Iran Email:amirbagheri@chmail.ir

<sup>2</sup> Assistant Professor, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran. Email:mohamad.ali.vaziri@chmail.ir

### Article history:

Article Type: Research Paper

Received: 06 April 2025

Received in Revised form: 09 July 2025

Accepted: 03 August 2025

Available Online: 01September 2025

### GRAPHICAL

Most fluid systems involve turbulent flows, which require the use of turbulence models for numerical simulation. These models are generally classified into two main groups, namely Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) models and Large Eddy Simulation (LES) models. Despite their high accuracy, existing turbulence models typically involve significant computational costs. In this study, a novel and accurate method with low computational complexity is proposed for modeling subgrid scales based on fractal theory within the LES framework. This model belongs to the category of non-eddy-viscosity models and operates through the artificial reconstruction of the velocity field. It has been implemented within the open-source OpenFOAM package. The proposed model utilizes simple assumptions to derive subgrid effects from the behavior of larger-scale grid eddies. Fractal interpolation is employed to improve accuracy and reduce computational costs. The main innovation of the present study is the development of a new and simplified subgrid-scale model utilizing fractal interpolation, making it more efficient for use within the LES approach. To validate the model's capabilities, turbulent flow in a three-dimensional periodic channel at various Reynolds numbers has been simulated. Turbulent flow parameters have been accurately predicted and compared with strong subgrid-scale (SGS) models such as the Dynamic Smagorinsky Model (DSM) and the Deardorff Stress Model, as well as with a model-free laminar flow solution. The results indicate that the proposed model can significantly reduce computational costs while maintaining the required accuracy.

### Keywords:

Fractal Interpolation

Large Eddy Simulation (LES)

Turbulent Flow

Turbulence Modeling

Subgrid Eddies

**Cite this article:** Bagheri<sup>®</sup> A, Jozvaziri M.A. Development of a Low-Cost Subgrid Model Based on Fractal Theory for Turbulent Flow. Fluid Mechanics and Aerodynamics 2025; 14 (1): 35-50.

**DOR:** <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.23223278.1404.14.1.3.6>

© The Author(s).

**Publisher:** Imam Hossein University.



## ارائه یک مدل زیر شبکه‌ای کم‌هزینه بر پایه‌ی نظریه‌ی فرکتال برای جریان آشفته

امیر باقری<sup>۱</sup>، محمدعلی جزووزیری<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> پژوهشگر، شرکت نو فن‌آوران پژوهش محور کوثر، مشهد، ایران (amirbagheri@chmail.ir)  
<sup>۲</sup> استادیار دانشگاه جامع امام حسین (ع) (نویسنده مسئول: mohamad.ali.vaziri@chmail.ir)

### چکیده

اکثر سیستم‌های سیالاتی دارای جریان‌هایی از نوع آشفته هستند و برای شبیه‌سازی عددی آن‌ها باید از مدل‌های آشفتگی استفاده شود. مدل‌های آشفتگی به دو دسته‌ی اصلی مدل‌های متوسط‌گیری رینولدز ناویر-استوکس رینولدز (RANS) و مدل‌های شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ (LES) تقسیم می‌شوند. در این مطالعه یک روش جدید و دقیق با پیچیدگی محاسباتی کم برای مدل‌سازی مقیاس‌های زیر شبکه‌ای بر پایه نظریه فرکتال برای رهیافت LES ارائه شده است. این مدل از دسته مدل‌های غیر لزجت-گردابه‌ای و به روش بازسازی مصنوعی میدان سرعت عمل می‌کند که در بسته منبع‌باز اپن‌فوم (OpenFoam) پیاده‌سازی شده است. در این مدل از فرضیات ساده‌ای برای به دست آوردن اثرات زیر شبکه‌ای از رفتار گردابه‌های مقیاس شبکه‌ای بزرگ‌تر استفاده شده است. در این مدل، از درونیایی فرکتال (Fractal) برای بهبود دقت و کاهش هزینه‌های محاسباتی استفاده شده است. نوآوری اصلی مطالعه‌ی حاضر گسترش یک مدل جدید و ساده تر زیر شبکه‌ای با بهره‌گیری از یک درونیایی فرکتال است که توانسته است هزینه‌ی محاسباتی رهیافت LES را به مقدار قابل توجهی کاهش دهد. برای اعتبارسنجی توانایی مدل، جریان آشفته درون کانال سه بعدی متناوب و اعداد رینولدز مختلف مدل‌سازی شده است. پارامترهای جریان آشفته به‌طور دقیق پیش‌بینی شده و با مدل‌های قوی مقیاس‌های زیر شبکه‌ای (SGS) مانند مدل دینامیک اسمگورینسکی (DSM) و مدل تنش دیردورف (Deardorf) مرتبط با حل بدون مدل جریان آرام مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که مدل پیشنهادی، با حفظ دقت لازم، می‌تواند هزینه‌های محاسباتی را به میزان قابل توجهی کاهش دهد.

### مشخصات مقاله

#### تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۱۷

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۴/۱۸

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۱۲

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۶/۱۰

#### کلید واژه‌ها:

درونیایی فرکتال

شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ

جریان آشفته

مدلسازی آشفتگی

گردابه‌های زیر شبکه‌ای

**استناد:** باقری، امیر، جزووزیری، محمدعلی. ارائه یک مدل زیر شبکه‌ای کم‌هزینه بر پایه‌ی نظریه‌ی فرکتال برای جریان آشفته. مکانیک سیالات و آیرودینامیک (۱۴۰۴): ۱۴ (۱): ۳۵-۵۰.

<https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.23223278.1404.14.1.3.6>



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع).

## ۱- مقدمه

تنش زیرشبکه‌ای نمایان می‌شود، که از طریق مدل‌سازی این مقیاس‌ها محاسبه و تعیین می‌گردد. مدل‌های لزجت گردابه‌ای یک رابطه تناسبی بین تانسور زیرشبکه‌ای و تانسور نرخ کرنش با استفاده از یک ثابت تناسب به نام لزجت آشفته ( $\nu_t$ ) در نظر می‌گیرند [۲].

مدل اسمگورینسکی<sup>۴</sup> (SM) مشهورترین مدل لزجت گردابه‌ای است که برای اولین بار توسط اسمگورینسکی در سال ۱۹۶۳ [۸] برای پیش‌بینی جریان‌های جوی معرفی شد و سپس توسط دیردورف<sup>۵</sup> توسعه یافت [۹]. یکی از مشکلات پیش‌بینی‌های SM برای جریان‌های آرام، ظاهر شدن مقداری از اتلاف گردابه‌ای<sup>۶</sup> است که به دلیل رابطه نامناسب برای محاسبه لزجت زیرشبکه‌ای SGS ایجاد می‌شود. دیردورف [۹] از یک معادله دیفرانسیل جزئی برای تانسور تنش زیرشبکه‌ای استفاده کرد که هزینه محاسباتی زیادی را به حل مسئله تحمیل می‌کرد، در حالی که همچنان دقت پیش‌بینی پارامترهای اصلی جریان آشفته بهبود نیافته بود. جرمانو<sup>۷</sup> و همکاران [۱۰] و مویین<sup>۸</sup> و همکاران [۱۱] این مشکل را با معرفی مدل اسمگورینسکی دینامیکی<sup>۹</sup> (DSM) حل کردند که در آن ضریب لزجت گردابه‌ای به صورت محلی محاسبه می‌شود. علاوه بر این، پورته-آجل<sup>۱۰</sup> و همکاران [۱۲، ۱۳] یک مدل دینامیکی جدید پیشنهاد دادند که در آن ضرایب مدل به مقیاس‌های جریان آشفته وابسته هستند. مدل DSM یک مدل قدرتمند و دقیق زیرشبکه‌ای برای پیش‌بینی پارامترهای جریان آشفته است؛ اما هزینه محاسباتی زیادی را به روش‌های عددی تحمیل می‌کند [۱۴]. همچنین انواع استاتیکی و دینامیکی مدل‌های لزجت-گردابه‌ای توسط محققان در منابع توسعه و ارزیابی شده‌اند [۱۵-۱۷]. روزما<sup>۱۱</sup> و همکاران [۱۸] مدل جدیدی به نام مدل استاتیکی و ناهمسانگرد با حداقل اتلاف<sup>۱۲</sup> (AMD) پیشنهاد کردند که از روابط ساده‌تری با هزینه محاسباتی کمتر نسبت به مدل DSM بهره می‌برد. ظهیری و روحی [۱۴، ۱۹] این مدل را به جریان‌های پیچیده‌تر همراه با جدایش و تغییر فاز گسترش دادند. اخیراً، انواع استاتیکی و دینامیکی مدل‌های غیر لزجت-گردابه‌ای با دقت مناسب برای پارامترهای آشفتگی نیز توسعه و ارزیابی شده‌اند [۲۰-۲۲].

با توجه به محدودیت‌های مدل‌های فعلی در شبیه‌سازی دقیق مقیاس‌های مختلف آشفتگی و هزینه‌های بالای محاسباتی،

جریان آشفته یکی از پیچیده‌ترین پدیده‌های فیزیکی است که به دلیل تغییرات ناگهانی و غیرخطی در سرعت و فشار سیال، مطالعه و مدل‌سازی آن چالش‌برانگیز است. تحلیل جریان لایه‌مرزی آشفته بر روی اکثر مکانیسم‌های سیالاتی مانند ایرفویل‌ها و مقاطع بال در صنایع هوایی، هواپیماهای نظامی، پهبادها و توربین‌های بادی، نقش بسزایی در شناخت پدیده‌های فیزیکی حاکم و بهبود عملکرد و طراحی این سامانه‌ها ایفا می‌کند. در این نوع جریان‌ها، به دلیل بالا بودن عدد رینولدز، جریان‌ها به‌طور عمده آشفته هستند، که این امر پیچیدگی‌های محاسباتی زیادی را به همراه دارد و نیازمند مدل‌سازی دقیق و محاسبات زمان‌بر است. اگرچه روش‌های عددی موجود دقت بالایی ارائه می‌دهند، اما غالباً به دلیل هزینه‌های بالای محاسباتی چالش‌برانگیز هستند. از این رو، رویکردهایی که بتوانند مقیاس‌های مختلف آشفتگی را با دقت مطلوب و هزینه‌های محاسباتی مقرون‌به‌صرفه مدل‌سازی کنند، مورد نیاز است. جریان‌های آشفته طیف گسترده‌ای از مقیاس‌ها را شامل می‌شوند؛ از گردابه‌های بزرگ و ناهمسانگرد که تحت تأثیر شرایط مرزی قرار دارند، تا گردابه‌های کوچک‌تر که مستقل از این شرایط هستند. این طیف گسترده از مقیاس‌های آشفتگی را می‌توان با استفاده از شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) به‌صورت مستقیم و با هزینه محاسباتی بسیار زیاد حل کرد [۱].

یک رویکرد کاربردی‌تر، روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ (LES) است که در آن فقط نوسانات مقیاس بزرگ به‌طور مستقیم محاسبه می‌شوند. برخلاف روش متوسط‌گیری رینولدز ناوبر-استوکس رینولدز (RANS) که تمام گردابه‌های بزرگ و کوچک آشفتگی را مدل می‌کند، در روش LES گردابه‌های بزرگ مقیاس شبکه به‌طور مستقیم حل می‌شوند و فقط گردابه‌های کوچک‌تر زیرشبکه‌ای که همسانگرد تر بوده و مستقل از شرایط مرزی مسئله هستند را مدل‌سازی می‌کنند [۲]. بر این اساس با وجود بالاتر بودن هزینه محاسباتی، پیش‌بینی‌های دقیق‌تر و جامع‌تری نسبت به پیش‌بینی‌های RANS می‌توان با استفاده از روش‌های LES به دست آورد [۳-۵]. با توجه به توانایی LES در نظر گرفتن مکانیسم‌های مختلف جریان آشفته، این روش در مدل‌سازی جریان‌های آشفته کارآمد است و می‌تواند جایگزین مناسبی برای DNS در مسائل مهندسی باشد [۶، ۷]. محققان مدل‌های مختلفی از مدل‌های زیرشبکه‌ای<sup>۱</sup> (SGS) ارائه کرده‌اند که به دو دسته اصلی مدل‌های لزجت گردابه‌ای<sup>۲</sup> و غیرلزجت گردابه‌ای<sup>۳</sup> تقسیم می‌شوند. تأثیر مقیاس‌های زیرشبکه‌ای SGS به صورت تانسور

<sup>4</sup> Smagorinsky

<sup>5</sup> Deardorff

<sup>6</sup> Eddy-dissipation

<sup>7</sup> Germano

<sup>8</sup> Moin

<sup>9</sup> Dynamic Smagorinsky model (DSM)

<sup>10</sup> Porte-Agel

<sup>11</sup> Rozema

<sup>12</sup> Anisotropic Minimum Dissipation (AMD)

<sup>1</sup> Subgrid-scale (SGS)

<sup>2</sup> Eddy-viscosity

<sup>3</sup> Non-eddy-viscosity

اخیران نیز انجام شده اند به دلیل همین نقایص مدل پایه‌ای فرکتال نتوانسته‌اند حل‌های عددی از جریان سیال ارائه دهند و صرفاً به بررسی نتایج بدست آمده از اعمال درونیابی‌های فرکتال به داده‌های آشفتگی و یا بررسی جریان آیرودینامیکی بر روی سطوح و هندسه‌های فرکتال پرداخته‌اند [۳۴، ۳۵]. بنابر این نوآوری اصلی مطالعه‌ی حاضر ارائه‌ی یک مدل جدید زیرشبکه‌ای برای جریان‌های آشفته است که از پیچیدگی و هزینه‌ی محاسباتی کمتری در مقایسه با سایر مدل‌های زیرشبکه‌ای برخوردار است. فرضیه‌ی فرکتال، با توجه به ساختار خودمتمشابه‌ی گردابه‌های جریان آشفته، این امکان را فراهم می‌کند که مقیاس‌های مختلف آشفتگی را با دقت بیشتری مدل‌سازی کنیم. این امر به ویژه در مدل‌های زیرشبکه‌ای (SGS) مفید است که با استفاده از ساختار فرکتالی می‌توان به بهبود دقت محاسبات و کاهش هزینه‌های محاسباتی دست یافت [۳۰-۳۳]. در این مطالعه، فرض شده است که گردابه‌ها با استفاده از یک ساختار فرکتال به گردابه‌های کوچکتر شکسته می‌شوند. در نتیجه در اینجا بر بازسازی مصنوعی گردابه‌های کوچکتر با استفاده از ساختارهای بزرگتر و قابل حل جریان تمرکز شده است و برای این منظور رهیافت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ (LES) در نظر گرفته شده است. بنابر این، مدل حاضر از دسته مدل‌های غیر لزجت-گردابه‌ای رهیافت LES است که به روش بازسازی مصنوعی میدان سرعت عمل می‌کند. در این مدل، برای شبیه‌سازی اثرات زیرشبکه‌ای با استفاده از رفتار گردابه‌های بزرگ‌تر از تکنیک درونیابی فرکتال استفاده شده است و با توجه به سادگی روابط این درونیابی‌ها، بهبود دقت محاسبات و کاهش هزینه‌های محاسباتی مشاهده شده است. به منظور ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی، آزمایش‌هایی شامل جریان در یک کانال سه‌بعدی متناوب و در اعداد رینولدز مختلف صورت گرفته است. همچنین، نتایج حاصل از این مدل با مدل‌های شناخته‌شده مقیاس‌های زیرشبکه‌ای مانند مدل اسمگورینسکی دینامیکی (DSM)، مدل تنش دیردورف و نتایج دقیق شبیه‌سازی عددی مستقیم DNS مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که مدل پیشنهادی، ضمن حفظ دقت محاسبات، توانسته هزینه‌های محاسباتی را به شکل چشمگیری کاهش دهد.

## ۲- معادلات و قوانین حاکم بر جریان

در این قسمت به بررسی معادلات ممنوم و بقا جرم سیال در حالت کلی و چگونگی تاثیر مدل‌سازی زیرشبکه‌ای در آن‌ها پرداخته می‌شود. برای جریان تراکم ناپذیر معادله بقا جرم و مومنوم در حالت اندیسی به ترتیب به شکل زیر قابل تعریف است.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

استفاده از رویکردهای نوین مانند فرضیه‌ی فرکتال می‌تواند به بهبود دقت مدل‌سازی و کاهش هزینه‌های محاسباتی کمک کند. مطالعات در زمینه‌ی استفاده از فرضیه‌ی فرکتال در مدل‌سازی آشفتگی جریان سیال از دهه‌ی ۱۹۸۰ آغاز شده است. منویا و همکارانش [۲۳، ۲۴] از اولین پژوهشگرانی بودند که به بررسی تطابق رفتار داده‌های جریان آشفته با نظریه‌ی فرکتال پرداختند. آن‌ها در سال ۱۹۹۹ یک مدل فرکتال<sup>۱</sup> (FM) سه‌بعدی ارائه دادند [۲۵] که برای شبیه‌سازی آشفتگی مضمحل‌شونده<sup>۲</sup> استفاده شد. با این حال، این مدل برای مسائل پیچیده‌تر توسعه نیافت و به علاوه روابط آن بسیار پیچیده بود. در سال‌های بعد، پژوهشگران متعددی از جمله با سو و همکاران [۲۶] و ضیائی و همکاران [۲۷] با استفاده از رهیافت LES به توسعه و بررسی درونیابی‌های فرکتالی پرداختند. پژوهش‌های بیشتری نیز در زمینه‌ی درونیابی فرکتال داده‌های جریان آشفته توسط هگمن و همکاران [۲۸] و سالوتی و همکاران [۲۹] صورت گرفت که امکان بازسازی مصنوعی میدان‌های سرعت با وضوح بالاتر را فراهم ساخت. اما در این مطالعات منجر به ارائه حل‌های عددی منجر نشد. دینگ و همکارانش [۳۰] در سال ۲۰۱۰ با استفاده از یک مدل درونیابی فرکتال تصادفی به بازسازی مصنوعی<sup>۳</sup> میدان‌های سرعت آشفته پرداختند. ژانگ و همکاران [۳۱] کار انجام شده توسط دینگ و همکاران [۳۰] را برای حالت سه‌بعدی گسترش دادند و به درونیابی داده‌های آشفته‌ی داخل کانال پرداختند. آکینابی و همکاران [۳۲] در سال ۲۰۱۸ با استفاده از درونیابی ارائه شده توسط اسکاتی و منویا [۲۵] داده‌های آشفته را با درونیابی فرکتال بازسازی مصنوعی کردند ولی حل عددی ارائه ندادند. آنها برخی پارامترهای درونیابی مذکور را ارتقاء دادند. آکینابی و همکاران [۳۳] در سال ۲۰۱۹ کار خود را برای حالت سه‌بعدی گسترش داده و نتایج بدست آمده را با داده‌های DNS مقایسه کردند.

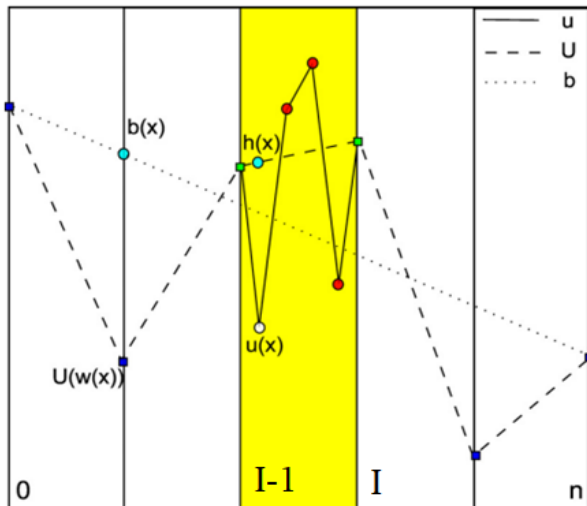
در مقاله‌ی حاضر، با الهام از مطالعات پیشین، یک مدل سه‌بعدی جدید مشابه مدل اسکاتی و منویا [۲۵] اما با پیچیدگی محاسباتی کمتر توسعه داده شده است تا به حل عددی مسائل پیچیده‌تر پردازیم. برخلاف مدل فرکتال ارائه شده توسط اسکاتی و منویا مدل حاضر علاوه بر اینکه پیچیدگی محاسباتی بسیار کمتری دارد، خاصیت همسانگردی گردابه‌های زیرشبکه‌ای را نیز در نظر گرفته است. یک مشکل اصلی مدل ابتدایی اسکاتی و منویا این است که خاصیت ناهمسانگردی گردابه‌های بزرگ را به همان صورت در گردابه‌های زیرشبکه‌ای منتقل می‌کند و در نتیجه برای جریان در کانال جواب‌های قابل قبولی را ارائه نمی‌کند. اکثر مطالعاتی که

<sup>1</sup> Fractal Model

<sup>2</sup> Decay turbulence

<sup>3</sup> synthetic field models

سرعت زیرشبکه‌ای به راحتی می‌توان جمله‌ی مجهول دربردارنده-ی اثر گردابه‌های آشفتگی زیرشبکه‌ای موجود در معادله‌ی ممتمنی یعنی رابطه‌ی (۹) را محاسبه نمود و یک مدل آشفتگی کم هزینه-ی فرکتال ارائه داد. اساس کار درونیایی فرکتال در شکل (۱) توضیح داده شده است. همانطور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود میدان سرعت در داخل سلول زرد رنگ (خط تو پر) حدس زده شده است. اگر دقت شود این خط توپر دارای الگوی مشابه خطچین سلول‌های اطراف است. به عبارت دیگر میدان سرعت مجهول داخل سلول محاسباتی (همان میدان سرعت زیرشبکه‌ای مورد نیاز برای محاسبه‌ی رابطه‌ی (۹) با استفاده از الگوی موجود در سلول‌های اطراف (در اینجا ۶ سلول اطراف) درونیایی شده است که این همان مفهوم ریشه‌ای درونیایی فرکتال است.



شکل ۱: درونیایی سرعت زیرشبکه‌ای با استفاده از نظریه‌ی فرکتال

در ابتدا درونیایی را مشابه روش اسکاتی و منویا [۲۵] و مطابق شکل (۲) انجام می‌دهیم. در این شکل میدان سرعت زیرشبکه‌ای در داخل سلول I درونیایی شده است. درونیایی فرکتال به این صورت انجام می‌شود که میدان سرعت حل شده در سه سلول محاسباتی I-1، I، و I+1 در داخل سلول I درونیایی شده است. گام اول درونیایی بصورت خطچین نشان داده شده است. می‌توان این فرآیند را تا بی‌نهایت و برای بازه‌های کوچکتر ادامه داده و به نمودار نوسانی نشان داده شده در شکل (۲) رسید. اندازه‌ی هر سلول محاسباتی برابر  $\Delta$  در نظر گرفته شده است. مقدار گام اول درونیایی یا همان خطچین نشان داده شده در شکل با استفاده از رابطه‌ی (۱۰) بر حسب سرعت‌های  $\tilde{u}_{i-1}$ ،  $\tilde{u}_i$ ، و  $\tilde{u}_{i+1}$  برای مولفه‌ی افقی میدان سرعت محاسبه شده است. به همین ترتیب مولفه‌ی عمودی نیز در رابطه‌ی (۱۱) محاسبه شده است.  $u\left(\frac{\Delta}{2}\right)$  و  $u\left(-\frac{\Delta}{2}\right)$  مقدار میدان سرعت در مکان‌های  $x = \frac{\Delta}{2}$  و  $x = -\frac{\Delta}{2}$  است و نیز از رابطه‌ی (۱۲) قابل محاسبه است.

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

که در رابطه (۲)،  $p$  و  $u_i$  به ترتیب بیانگر فشار و بردار سرعت سیال می‌باشد و برای  $D_{ij}$  که نشان‌دهنده تانسور نرخ کرنش است می‌توان گفت:

$$D_{ij} = 0.5 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

بردار سرعت در روش LES وابسته به زمان و مکان بوده و در دو جمله مجزای سرعت فیلترشده ( $\bar{u}$ ) و سرعت نوسانی ( $u'$ ) تقسیم می‌شود.

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + u'(x,t) \quad (4)$$

منظور از فیلتراسیون در اینجا برای یک متغیر دلخواه  $\phi$  استفاده از یک تابع فیلتر دو متغیره  $G = G(X, \Delta)$  بوده؛ بطوریکه  $\Delta = \sqrt{\Delta x \Delta y \Delta z}$  مقیاس زیرشبکه‌ای و  $X$  یک متغیر مکانی است [۲].  $\Delta x$ ،  $\Delta y$ ،  $\Delta z$  ابعاد شبکه‌ی محاسباتی در جهات مختلف محورهای مختصات هستند. با این کار اثر مقیاس‌های کمتر از  $\Delta$  از متغیر  $\phi$  حذف می‌شود و تابع فیلترشده به صورت زیر قابل بیان است:

$$\bar{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r) G(x-r) dr \quad (5)$$

بنابراین  $\phi$  متشکل از جمله فیلترشده ( $\bar{\phi}$ ) و جمله زیرشبکه‌ای ( $\phi'$ ) است که به ترتیب اثر گردابه‌های بزرگ و کوچک را نشان می‌دهد.

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (6)$$

با اعمال عملگر فیلتر معرفی شده بر معادلات بقای جرم و مومنوم، شکل جدید این روابط از ترکیب جملات فیلترشده و زیرشبکه‌ای بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (8)$$

که در رابطه بالا،  $\tau_{ij}$  مجهول است و تانسور تنش زیرشبکه‌ای نام دارد. این تانسور با استفاده از رابطه‌ی (۹) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (9)$$

برای محاسبه‌ی رابطه‌ی (۹) با استفاده از فرضیه‌ی فرکتال باید ابتدا میدان سرعت جریان را با استفاده از درونیایی فرکتال بصورت مصنوعی بازسازی نماییم. به عبارت دیگر با استفاده از درونیایی فرکتال می‌توان مقیاس‌های زیرشبکه‌ای میدان سرعت را با استفاده از اطلاعات میدان سرعت شبکه‌ای محاسبه کرد. با داشتن میدان

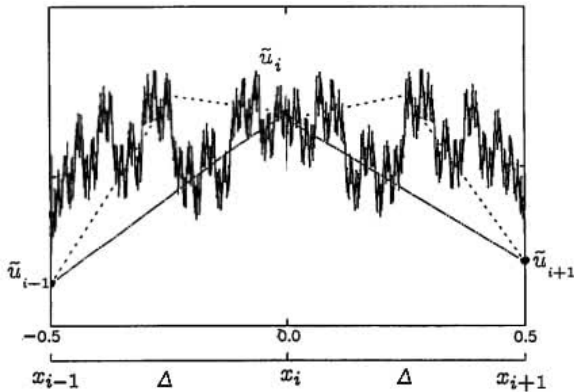
$$u(x) = \begin{cases} \frac{u\left(\frac{\Delta}{2}\right) - \bar{u}(I)}{\frac{\Delta}{2}}x + \bar{u}(I) = Ax + \bar{u}(I) & 0 < x < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{\bar{u}(I) - u\left(-\frac{\Delta}{2}\right)}{\frac{\Delta}{2}}x + \bar{u}(I) = Bx + \bar{u}(I) & -\frac{\Delta}{2} < x < 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{v\left(\frac{\Delta}{2}\right) - \bar{v}(I)}{\frac{\Delta}{2}}x + \bar{v}(I) = \hat{A}x + \bar{v}(I) & 0 < x < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{\bar{v}(I) - v\left(-\frac{\Delta}{2}\right)}{\frac{\Delta}{2}}x + \bar{v}(I) = \hat{B}x + \bar{v}(I) & -\frac{\Delta}{2} < x < 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u\left(\frac{\Delta}{2}\right) &= \frac{\bar{u}(I+1) + \bar{u}(I)}{2} + \left(\bar{u}(I) - \frac{\bar{u}(I+1) + \bar{u}(I-1)}{2}\right) \times d \\ u\left(-\frac{\Delta}{2}\right) &= \frac{\bar{u}(I-1) + \bar{u}(I)}{2} + \left(\bar{u}(I) - \frac{\bar{u}(I+1) + \bar{u}(I-1)}{2}\right) \times d \end{aligned} \quad (12)$$

(۱۴) محاسبه کرد. مقادیر غیر قطری  $\tau_{ij}$  نیز با استفاده از رابطه‌ی

(۱۵) قابل محاسبه است.



شکل ۲: درونیابی یک بعدی میدان سرعت با استفاده از داده‌های سه سلول  $i-1$ ،  $i$ ، و  $i+1$

که در رابطه‌ی بالا پارامتر  $d$  تعیین کننده‌ی بعد فرکتال  $D$  است و از این جهت دارای اهمیت است. اسکاتی و منویا [۲۵] با استفاده از رابطه‌ی (۱۳) ارتباط میان پارامتر  $d$  و بعد فرکتال  $D$  را نشان داده‌اند:

$$D = \log_2 4|d| \quad ; \quad 0 < |d| < 1 \quad (13)$$

بر اساس کار انجام شده توسط دینگ و همکاران [۳۰] مقدار  $d$  برابر  $2^{-1/3}$  در نظر گرفته شده است و در نتیجه مقدار  $D$  نیز برابر ۱.۶۶۶ اعمال شده است. اکنون که مقدار سرعت درونیابی شده‌ی فرکتال زیرشبکه‌ای را بدست آمده است باید به محاسبه‌ی تانسور تنش زیرشبکه‌ای  $\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$  بپردازیم. با توجه به روابط (۵) و (۹) و در نظر گرفتن تابع فیلتر  $G = 1/\Delta$  برای بازه‌ی  $-\Delta/2$  تا  $\Delta/2$  و  $G = 0$  خارج آن، می‌توان مقادیر قطری  $\tau_{ij} \delta_{ij}$  (در اینجا  $\delta_{ij}$  تانسور یکه است) را با استفاده از رابطه‌ی

$$\tau_{11} = \overline{u^2} - \bar{u}^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} u^2(x) dx - \left( \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} u(x) dx \right)^2 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{\Delta^2}{24} (A^2 + B^2) + \frac{\Delta}{4} \bar{u}(I)(A - B) + \bar{u}(I)^2 \right] - \left[ \frac{\Delta}{8} (A - B) + \bar{u}(I)^2 \right]^2 = \frac{\Delta^2}{32} \left[ \frac{5}{6} (A^2 + B^2) + AB \right] \\ \tau_{12} &= \overline{u(x)v(x)} - \bar{u}(x)\bar{v}(x) \\ &= \left[ \frac{\Delta^2}{64} (A - B)(A' - B') + \bar{u}(I)\bar{v}(I) + \frac{\Delta}{8} (A - B)\bar{v}(I) + \frac{\Delta}{8} (A' - B')\bar{u}(I) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta^2}{32} \left[ \frac{5}{6} (AA' + BB') + \frac{AB' + BA'}{2} \right] = \frac{\Delta^2}{32} \left[ \frac{5}{6} (AA' + BB') + \frac{AB' + BA'}{2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

محاسباتی بالا پیچیدگی برنامه‌نویسی آن مشکل ساز بود. در نتیجه در اینجا از میانگین سه درون‌یابی یک‌بعدی ذکر شده در بالا بجای یک درون‌یابی سه بعدی استفاده شده است و داریم:

تا این مرحله از کار تانسور تنش زیرشبکه‌ای  $\tau_{ij}$  از درون‌یابی‌های فرکتال یک بعدی در جهت  $x$  مختصات بدست آمده است، در حالیکه اسکاتی و منویا [۲۵] از یک درون‌یابی سه بعدی فرکتال با بیش از  $2^7$  جمله استفاده می‌کردند که علاوه‌بر هزینه

$2\pi \times 2 \times \pi$	$62 \times 90 \times 78$
$2\pi \times 2 \times \pi$	$80 \times 136 \times 100$

در ابتدا برای صحت سنجی مدل عددی استفاده شده در سه عدد رینولدز مختلف ۳۲۵۰، ۶۶۷۵ و ۱۲۵۰۰ عملکرد روش حل بررسی شده است. مقدار نصف ارتفاع کانال به عنوان طول مشخصه و مقدار ویسکوزیته سینماتیکی برابر  $2 \times 10^{-5}$  برای محاسبه‌ی عدد رینولدز استفاده شده است. این مقادیر، نیز با تعریف پارامتر جدیدی به نام رینولدز اصطکاکی<sup>۱</sup> ( $Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu}$ ) که بر اساس داده‌های مرجع [۱] به ترتیب ۱۸۰، ۳۹۵ و ۵۹۰ برای سه عدد رینولدز مورد بررسی گزارش شده، بدست آمده است. در رابطه‌ی که برای محاسبه‌ی رینولدز برشی ارائه شده است،  $\nu$  ویسکوزیته سینماتیکی،  $h$  ارتفاع کانال و  $u_\tau$  سرعت اصطکاکی است. سرعت اصطکاکی ( $u_\tau$ ) در  $y=0$  طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$u_\tau = \sqrt{(1/\rho) \times \partial \bar{u} / \partial y} \quad (19)$$

با جایگزینی  $u_\tau$  و بدست آوردن ابعاد یک سلول با استفاده از داده‌های قسمت شبکه‌بندی می‌توان پارامترهای بی‌بعد شبکه سه جهت مختلف طبق روابط ذیل بدست آورد:

$$\begin{aligned} \Delta x^+ &= \frac{u_\tau \Delta x}{\nu}, \\ \Delta y^+ &= \frac{u_\tau \Delta y}{\nu}, \\ \Delta z^+ &= \frac{u_\tau \Delta z}{\nu} \end{aligned} \quad (20)$$

مقادیر پارامترهای بی‌بعد بالا برای روش‌های DSM، مدل دیردرف<sup>۲</sup>، مدل شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ ضمنی<sup>۳</sup> (ILES)، و مدل فرکتال FM در جدول‌های (۲) تا (۶) در سه عدد مختلف رینولدز آمده است. در حالت استفاده از ILES هیچ مدل زیرشبکه‌ای استفاده نمی‌شود و مدلسازی بصورت ضمنی توسط خطاهای عددی تولید شده توسط طرح‌های گسسته سازی انجام می‌شود. در کنار این روش‌ها جهت بررسی بیشتر، از یک شبکه متراکم‌تر با سلول‌های محاسباتی  $80 \times 136 \times 100$  برای  $Re = 6675$  و  $Re = 12500$  استفاده شده است.

جدول (۲): مقادیر پارامترهای بی‌بعد شبکه برای مدل‌های عددی

مختلف به ازای  $Re=3250$

SGS Model	$\Delta y^+$
DSM	0.531
Deardorff	0.536
Fractal Model	0.537

<sup>۱</sup> Frictional Reynolds

<sup>۲</sup> Deardorff

<sup>۳</sup> Implicit LES model

$$\tau_{ijf} = \frac{1}{3} (\tau_{ijx} + \tau_{ijy} + \tau_{ijz}) \quad (16)$$

در پایان فرض می‌کنیم که مقدار بدست آمده برای تانسور تنش زیرشبکه‌ای با استفاده از فرضیه‌ی فرکتال ( $\tau_{ij}^{fractal}$ ) دارای یک رابطه‌ی خطی با تانسور تنش زیرشبکه‌ای واقعی است. مقدار ضریب تناسب این رابطه‌ی خطی را نیز برابر اندازه‌ی تانسور نرخ کرنش یعنی  $|S|$  در نظر می‌گیریم. بعلاوه در مطالعاتی که انجام گرفت مشخص شد که تانسور فرکتال بدست آمده در مقایسه با تانسور تنش زیرشبکه‌ای واقعی مقداری غیر همسانگرد تر است. تانسور تنش فرکتال بدست آمده، قادر به رهگیری خاصیت همسانگرد بودن گردابه‌های ریز زیر شبکه‌ای نیست چرا که شکل گردابه‌های ریز زیر شبکه‌ای را با استفاده از الگوی رفتاری گردابه‌های غیرهمسانگرد و بزرگتر شبکه‌ای رهگیری می‌کند و برای حل این مشکل از روابط اصلاح شده زیر برای محاسبه تانسور زیر شبکه‌ای استفاده می‌کنیم:

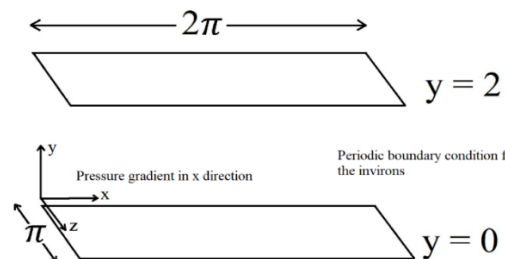
$$\tau_{11} = \left( |S| / \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \tau_{11f} \quad (17)$$

$$\tau_{12} = \left( |S| / \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right)^{0.5} \left( |S| / \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)^{0.5} \tau_{12f} \quad (18)$$

که در آن  $|S|$  اندازه تانسور نرخ کرنش است. اکنون با داشتن کلیه‌ی مولفه‌های قطر و غیر قطری تانسور تنش زیرشبکه‌ای می‌توان معادلات ممنتم و بقای جرم را بصورت عددی حل کرد.

### ۳- معرفی مسئله و شرایط حل

هندسه سه بعدی برای یک کانال با مشخصات ابعادی مشخص در شکل (۳) قابل مشاهده است. سیال با فرض عدم لغزش در سطوح بالا ( $y = 2$ ) و پایین ( $y = 0$ ) با اعمال گرادیان فشار مجازی در راستای  $x$  جریان داشته و برای سایر سطوح نیز از شرایط مرزی تناوبی استفاده شده است.



شکل ۳: محیط محاسباتی و ابعاد هندسی کانال به همراه شرایط مرزی

همانطور که در جدول (۱) آمده است از دو شبکه‌ی محاسباتی برای انجام حل‌های عددی استفاده شده است.

جدول (۱): تعداد گره‌های محاسباتی و ابعاد هندسی کانال

تعداد گره‌ها ( $N_x \times N_y \times N_z$ )	ابعاد کانال ( $L_x \times L_y \times L_z$ )
--	---

موجود در بسته‌ی نرم‌افزاری اپن‌فم حل شده است. در این حلگر از الگوریتم حل پیمپل استفاده شده است. حلگر پیمپل یک حلگر تفکیک شده‌ی فشار مینا است که در آن از گسسته‌سازی ضمنی استفاده می‌شود. در این حلگر از یک تکنیک کوپل فشار-سرعت استفاده می‌شود. در این حلگر از یک پیش‌بینی کننده‌ی ممنتم برای میدان سرعت که با استفاده از میدان فشار گام زمانی قبلی عمل می‌کند به همراه یک حلگر پواسون برای اصلاح میدان فشار و یک اصلاح کننده‌ی ممنتم استفاده می‌شود [۱۴]. برای انجام حل عددی گام زمانی مطابق با عدد کورانت بیشینه‌ای که برابر ۰/۴ است در نظر گرفته شده است.

در اینجا، جمله‌های گرادیان با استفاده از روش تفاضل-مرکزی گسسته‌سازی شده است و جملات دیورژانس<sup>۳</sup> و لاپلاس<sup>۴</sup> نیز مشابه مرجع [۱۴] ابتدا با استفاده از تئوری گوس طبق روابط زیر ابتدا از حالت انتگرال‌های یک متغییر دلخواه  $\phi_p$  حجم کنترل سلول p به حالت انتگرال‌هایی برای متغییرهای موجود بر روی سطح f سلول تبدیل می‌شوند:

$$\int_{V_p} \frac{\partial(u_j \phi_p)}{\partial x_j} dV = \sum_f s_f (u_j \phi)_f \quad (21)$$

$$\int_{V_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_p dV = \sum_f s_f \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_f \quad (22)$$

در روابط بالا s بردار نرمال سطح f است و  $V_p$  حجم سلول است. سپس متغییر  $\phi$  و مشتقش  $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$  مطابق با مرجع [۱۴] و به روشهای آپویند<sup>۵</sup> و تفاضل مرکزی گسسته می‌شوند.

مقادیر رینولدز اصطکاکی ( $Re_\tau$ ) به دست آمده از مدل‌های مختلف زیرشبکه‌ای در مقایسه با DNS در اعداد رینولدز متفاوت در جدول‌های جدول (۵) الی جدول (۷) گزارش شده است. همانطور که در جدول (۵) مشاهده می‌شود، تفاوت در عدد رینولدز پایین ۳۲۵۰ قابل توجهی مسان نتایج مدل‌های زیرشبکه‌ای با نتایج حالت ILES یا همان حالت بدون اعمال مدل آشفتگی وجود ندارد چراکه در این عدد رینولدز شدت مکانیزم‌های آشفتگی بسیار پایین است و جریان در حالت گذار به آشفتگی است. بعلاوه مشاهده می‌شود که مدل فعلی پیش‌بینی بهتری را در اعداد رینولدز مختلف در مقایسه با سایر مدل‌های SGS نشان می‌دهد. البته همه مدل‌های مورد مطالعه یک پیش‌بینی کمتر از مقدار DNS را در رینولدزهای تمامی رینولدزها برای  $Re_\tau$  نشان می‌دهد.

جدول (۷) افزایش قابل توجهی در مقدار تنش دیواره را برای مدل‌های DSM و FM با شبکه مترام در  $Re=12500$  را نشان می‌دهد. همانطور که قبلاً ذکر شد، شبکه سبک تر، گرادیان

ILES	0.533
------	-------

جدول (۳): مقادیر پارامترهای بی‌بعد شبکه برای مدل‌های عددی مختلف به ازای  $Re=6675$

SGS Model	$\Delta y^+$
DSM	0.99
Deardorff	0.98
FM	0.995
FM(dense grid)	0.673
ILES	0.97

همانطور که در جدول‌های (۲) و (۳) آمده، شبکه به کار گرفته شده باعث  $\Delta y^+$  کمتر از ۱ در اعداد رینولدز برابر با ۳۲۵۰ و ۶۶۷۵ می‌شود که حاصل این امر ایجاد اطمینان کافی برای حل دقیق لایه زیرین چسبنده<sup>۱</sup> می‌باشد.

جدول (۴): مقادیر پارامترهای بی‌بعد شبکه برای مدل‌های عددی مختلف به ازای  $Re=12500$

SGS Model	$\Delta y^+$
DSM	1.65
Deardorff	1.69
FM	1.69
FM (dense grid)	1.16
ILES	1.62

با توجه به داده‌های جدول (۴)،  $\Delta y^+$  کمتر از ۱٫۷ برای عدد رینولدز برابر با ۱۲۵۰۰ به دست می‌آید و لایه زیرین چسبنده را با استفاده از سه شبکه‌بندی در این ناحیه حل می‌کند. با این حال، شبکه مترام برای  $Re=12500$  نیز باعث کاهش این مقدار تا  $\Delta y^+ = 1.1$  شده است.

همه نتایج ارائه شده پس از رسیدن جریان به حالت پایدار<sup>۲</sup>، از نظر مکانی و زمانی میانگین‌گیری شدند. شرایط حالت پایدار پس از شروع حل عددی  $10 \times T$  در نظر گرفته شده که در آن T مدت زمانی است که در آن سیال از سراسر حوزه محاسباتی عبور می‌کند ( $T = L_x / u_b$ ). فرآیند میانگین‌گیری در یک دوره  $20 \times T$  انجام شده تا از استقلال مقادیر میانگین در مقیاس‌های زمانی کوچک نیز اطمینان حاصل شود. بعلاوه نتایج با استفاده از انجام یک میانگین‌گیری فضایی بر روی صفحات موازی با دیواره‌های کانال ارائه می‌شود. مسئله‌ی حاضر با استفاده از حلگر پیمپل فم

<sup>3</sup> Divergence

<sup>4</sup> Laplacian

<sup>5</sup> upwind

<sup>1</sup> Viscous sublayer

<sup>2</sup> steady state condition

مقایسه شده‌اند. مدل پیشنهادی حاضر دقت بیشتری در تطابق با داده‌های DNS در تمامی اعداد رینولدز نشان می‌دهد، در حالی که مدل ILES ضعیف‌ترین پیش‌بینی را ارائه می‌دهد که می‌توان آن را به عدم مدل‌سازی مستقیم گردابه‌های SGS نسبت داد.

همچنین مقداری ناسازگاری برای روش‌های DSM و ILES در نزدیکی ناحیه دیوار جریان کاملاً آشفته دیده می‌شود ( $Re=12500$ )، که توسط مدل فعلی (FM) اصلاح شده است. همچنین می‌توان فهمید که پیش‌بینی‌های مدل فعلی در مقایسه با مدل دیردورف تطابق بهتری با داده‌های DNS دارند. هر دو مدل FM و Deardorff از نوع مدل‌های غیر گردابه‌ای-لزجی هستند؛ در حالی که مدل دیردورف از شش معادله دیفرانسیل جزئی برای حل شش جزء تانسور تنش زیرشبکه‌ای با هزینه محاسباتی زیاد استفاده می‌کند [۷].

#### ۴-۲- مجذور میانگین مربع مولفه‌های سرعت نرمال شده

یک پارامتر جدید بدون بعدی برای سرعت، از نسبت مجذور میانگین مربع سرعت به سرعت اصطکاکی ( $u^{rms}/u_\tau$ ) تعریف و تحلیل شده است. این پارامتر در اعداد رینولدز ذکر شده برای مدل‌های DSM، دیردورف و ILES در سه مؤلفه سرعت و در راستای سه محور مختصات مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۴ انحراف معیار نرمال شده سرعت در راستای جریان  $u^{rms}/u_\tau$  را به‌عنوان تابعی از فاصله بدون بعد از دیواره ( $Y^+$ ) نمایش می‌دهد. مقایسه‌ها حاکی از تطابق قابل قبول مدل حاضر با داده‌های DNS نسبت به سایر مدل‌ها است.

با توجه به شکل ۵ مدل فعلی پیش‌بینی بسیار دقیقی را در ناحیه گذار ( $Re = 3250$ ) نشان می‌دهد. همچنین تطابق بهتری برای این مدل در نواحی با رینولدز متوسط و بالا در مقایسه با سایر مدل‌های SGS مشاهده می‌شود. مدل‌های DSM و ILES پیش‌بینی‌های بیش از حد قابل توجهی را برای جریان با رینولدز متوسط و بالا نشان می‌دهند، در حالی که مدل فعلی نتایج دقیقی را ارائه می‌دهد و همه مدل‌ها با نتایج DNS در داخل مناطق بیرونی مطابقت قابل قبولی دارند ( $Y^+ > 50$ ).

نوسانات آشفته‌ی مولفه‌های بردار سرعت، کمیت‌های اصلی برای توصیف مکانیسم آشفتگی جریان هستند. بر این اساس، پروفیل‌های نرمال شده استاندارد انحراف مجذور میانگین مربع درجهت عمود بر دیواره و مولفه در جهت عمق کانال برای سرعت ( $v^{rms}/u_\tau$  و  $w^{rms}/u_\tau$ ) به‌عنوان تابعی از  $Y^+$  در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند. همانطور که اشاره شد، نتایج با استفاده از مدل‌های اسمگرینسکی دینامیکی، دیردورف، ILES و مدل حاضر در اعداد مختلف رینولدز حاصل شده‌اند.

سرعت زیرلایه چسبیده را تنها با استفاده از سه شبکه محاسباتی حل می‌کند که باعث کاهش مقادیر تنش دیواره می‌شود. در ادامه نشان داده خواهد شد که شبکه متراکم‌تر پیش‌بینی‌های بهتری برای جریان کانال آشفته با  $Re=12500$  ارائه می‌دهد.

جدول (۵): مقادیر رینولدز اصطکاکی به دست آمده از مدل‌های مختلف SGS در مقایسه با DNS در عدد رینولدز برابر با ۳۲۵۰

SGS Model	$Re_\tau$	Error (%)
DNS	180	
DSM	175.7	-2.38
Deardorff	177.4	-1.44
FM	177.5	-1.38
ILES	176.26	-2

جدول (۶): مقادیر رینولدز اصطکاکی به دست آمده از مدل‌های مختلف SGS در مقایسه با DNS در عدد رینولدز برابر با ۶۶۷۵

SGS Model	$Re_\tau$	Error (%)
DNS	395	
DSM	379.6	-3.9
Deardorff	377.5	-4.4
FM	380.88	-3.6
FM(dense grid)	388.15	-1.7
ILES	371.56	-6

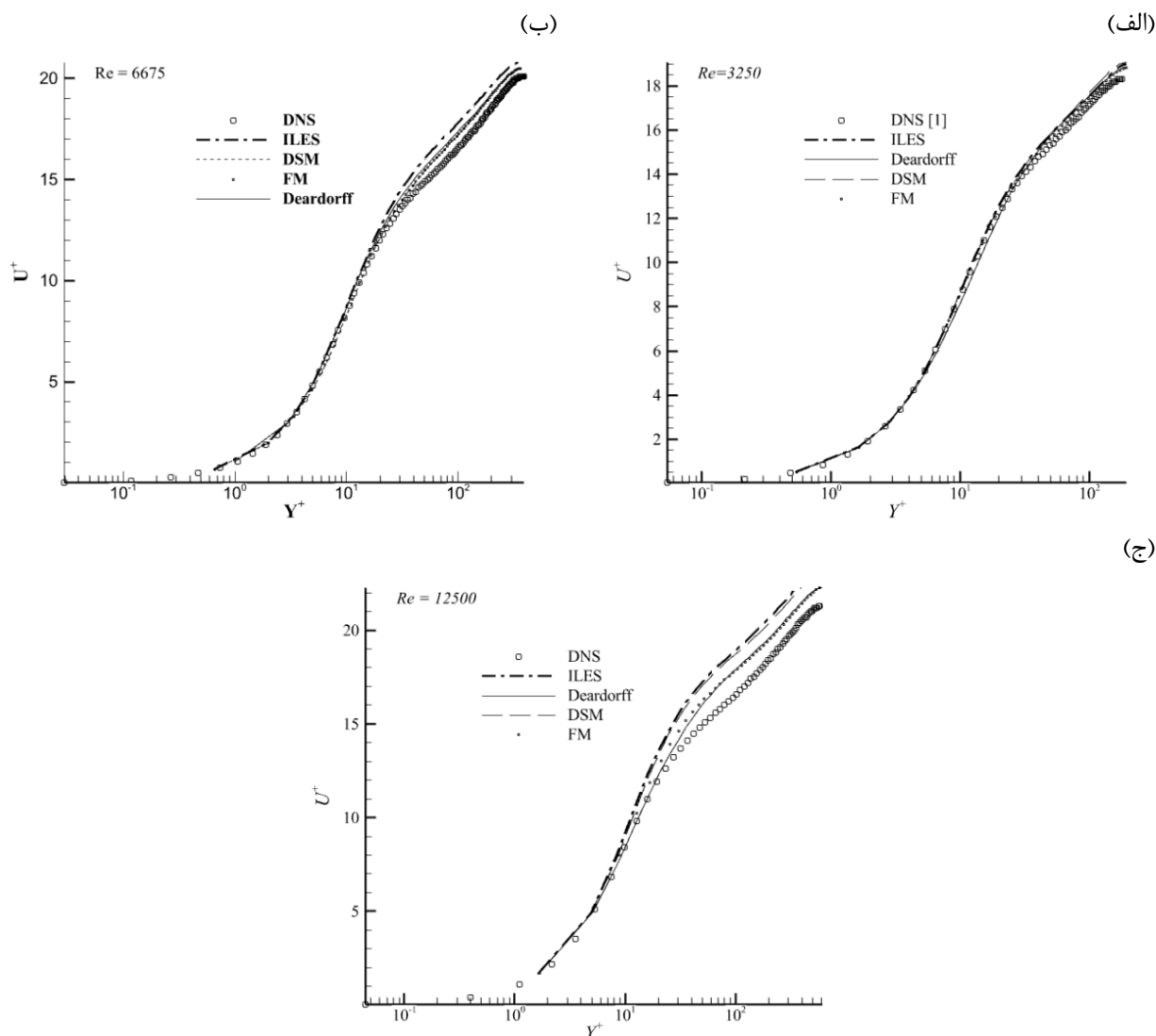
جدول (۷): مقادیر رینولدز اصطکاکی به دست آمده از مدل‌های مختلف SGS در مقایسه با DNS در عدد رینولدز برابر با ۱۲۵۰۰

SGS Model	$Re_\tau$	Error (%)
DNS	590	
DSM	561	-4.9
DSM (dense grid)	581	-1.5
Deardorff	580	-1.69
FM	579	-1.7
FM (dense grid)	594	0.6
ILES	557	-5.6

#### ۴- نتایج

##### ۴-۱- پروفیل‌های میانگین سرعت نرمال شده

پروفیل میانگین سرعت نرمال شده  $U^+ = u/u_\tau$  برحسب  $Y^+ = y.u_\tau/\nu$  در کانال برای سه مدل زیرشبکه‌ای شامل DSM، دیردورف و مدل فرکتال (FM) در اعداد مختلف رینولدز در شکل ۳ ارائه شده است. نتایج با پیش‌بینی‌های DNS [۱] و ILES



شکل ۳: منحنی میانگین مولفه سرعت جریان نرمال شده در اعداد رینولدز مختلف: (الف)  $Re=3250$ , (ب)  $Re=6675$ , (ج)  $Re=12500$

مؤلفه‌های  $xz$  و  $yz$  به صفر میل می‌کنند. پروفیل مؤلفه‌های خارج از قطر تانسور تنش آشفته در سه عدد رینولدز مختلف در شکل ۷ نمایش داده شده است. بجز در حالت رینولدز 3250 که در آن مدل حاضر در نواحی نزدیک دیواره از دقت بالاتری برخوردار بوده است، نتایج بدست آمده از رینولدزهای بالاتر نشان می‌دهند که مدل‌های DSM و مدل حاضر رفتار تقریباً مشابهی دارند.

#### ۴-۴- مقایسه شبکه‌ی سنگین‌تر برای رینولدز ۱۲۵۰۰

با افزایش مقدار عدد رینولدز به ۱۲۵۰۰ شدت آشفتگی جریان افزایش یافته و گردابه‌هایی با مقیاس‌های کوچکتر شکل می‌گیرند. در نتیجه بمنظور بررسی میزان افزایش دقت جواب‌ها، یک شبکه سنگین‌تر بر طبق جدول (۱) برای مدل‌های DSM و FM آماده شده است. مشخص شد که با افزایش تراکم شبکه محاسباتی در

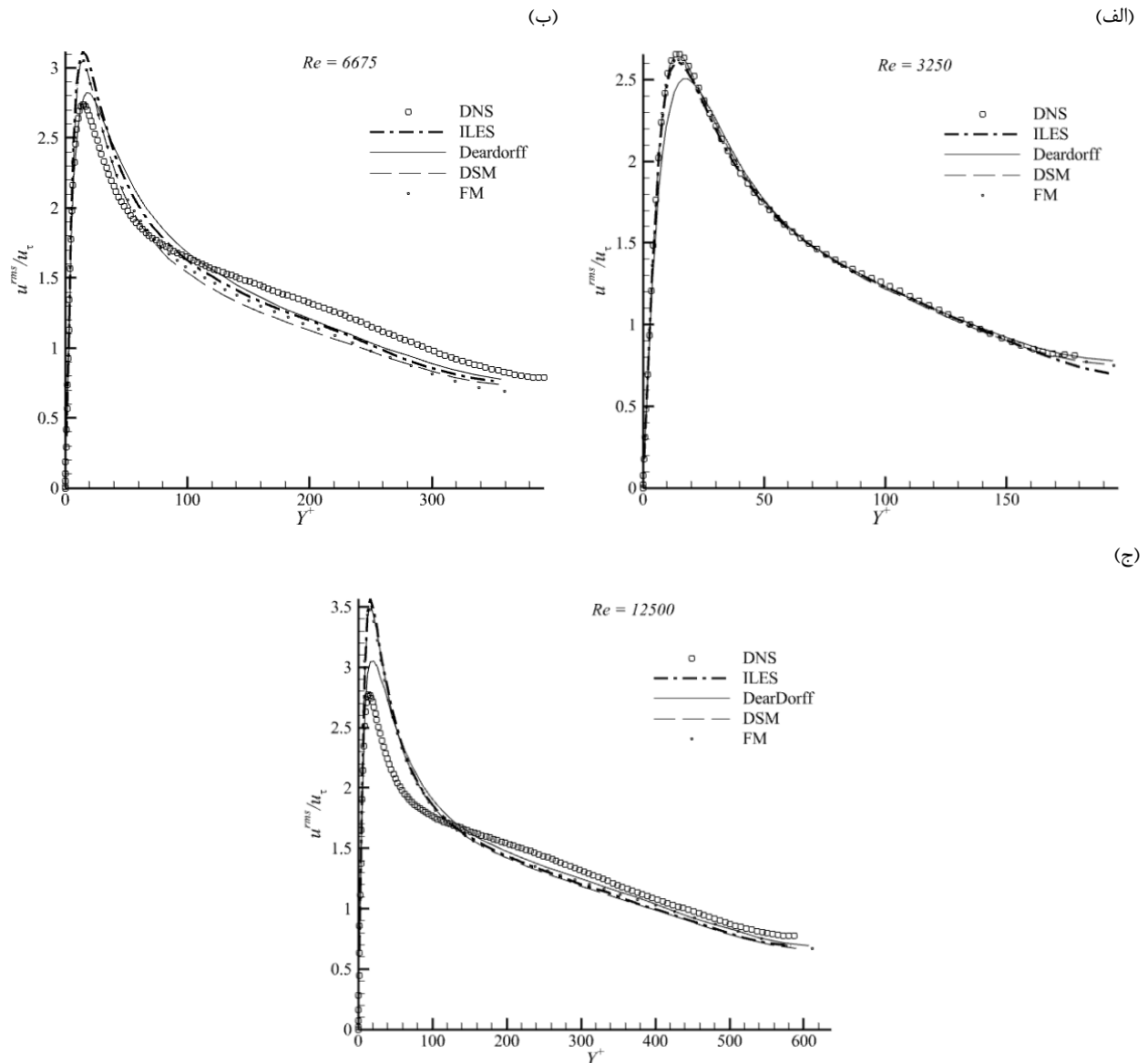
مدل دیردورف در مقایسه با مدل فعلی با وجود پیچیدگی محاسباتی بیشتر، مقادیر کمتری را برای  $w^{rms}/u_\tau$  و  $v^{rms}/u_\tau$  نشان می‌دهد. روش اسماگرینسکی دینامیکی پیش‌بینی‌هایی را با همان دقتی که مدل پیشنهادی با هزینه محاسباتی کم‌تر ارائه می‌کند، نشان می‌دهد. همه مدل‌ها با نتایج DNS در داخل مناطق بیرونی ( $Y^+ > 50$ ) به ویژه در ناحیه گذرا تطابق قابل قبولی دارند. البته همانطور که مشاهده می‌شود در نواحی بیرونی مقدار خطا برای همه مدل‌ها افزایش یافته است و مدل فرکتال در مقایسه با سایر مدل‌ها رفتار مشابهی نشان داده است.

#### ۴-۳- تنش برشی نرمال شده

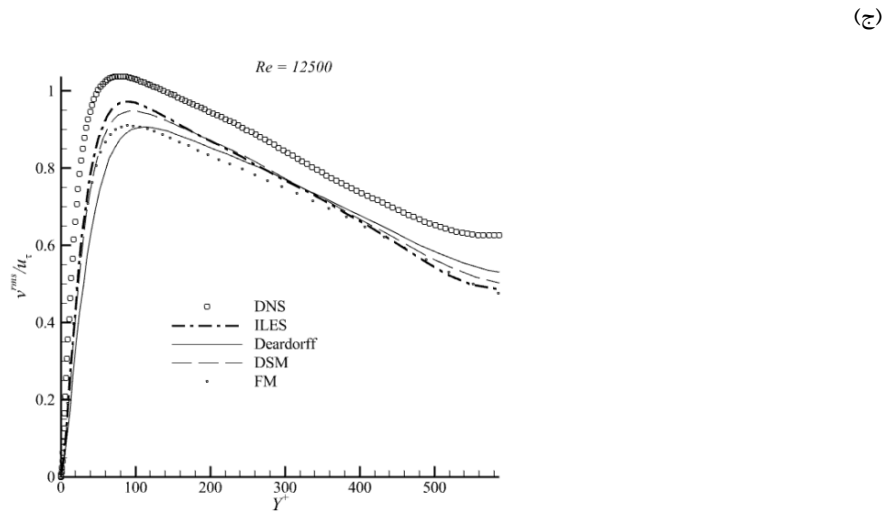
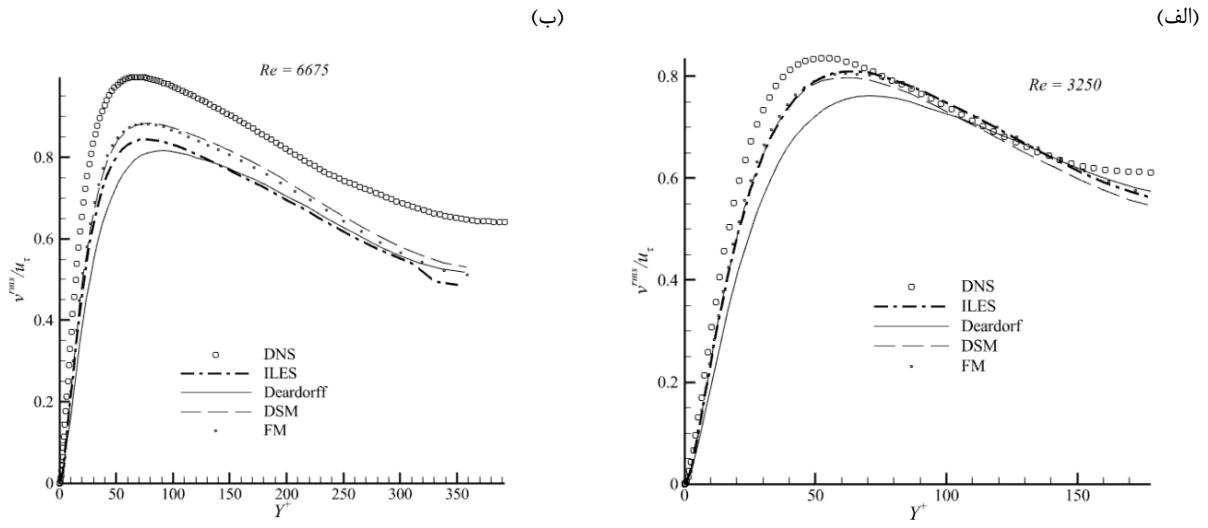
تنش برشی آشفته نرمال‌شده، به دلیل تقارن دامنه محاسباتی، تنها با مؤلفه  $xy$  از تانسور تنش رینولدز تعریف می‌شود، زیرا

در مقایسه با مدل DSM در حالت استفاده از شبکه‌ی سنگین نشان داده است. در شکل‌های ۸ (ب) الی ۸ (د) میزان دقت در ناحیه نزدیک دیوار با شدت بیشتری افزایش یافته است. این افزایش دقت در پیش‌بینی‌ها در نتیجه‌ی رهگیری مقیاس‌های کوچک‌تر و زیر لایه چسبنده نازک‌تر در داخل جریان آشفته با رینولدز بالا بدست آمده است.

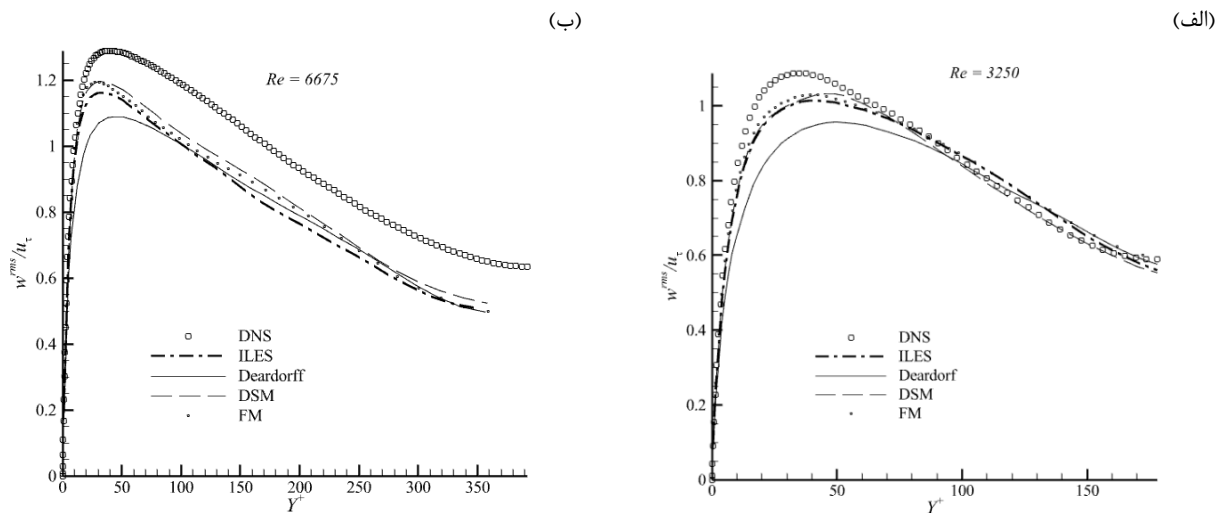
عدد رینولدز ۱۲۵۰۰، دقت نتایج به‌طور محسوسی بهبود می‌یابد. همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده است، نمودار میانگین مولفه سرعت جریان نرمال شده با افزایش دقت شبکه‌ی محاسباتی به مقدار قابل توجهی بهبود یافته است. همانطور که مشاهده می‌شود در حالت استفاده از شبکه‌ی سنگین‌تر مدل حاضر پیش‌بینی دقیق‌تری را در مقایسه با مدل DSM ارائه داده است. مدل فرکتال حاضر برای سایر پارامترها نیز جواب‌های دقیق‌تری را



شکل ۴: منحنی نرمال شده استاندارد انحراف مجذور میانگین مربع مولفه راستای جریان سرعت ( $u^{rms}/u_\tau$ ) در اعداد رینولدز مختلف: (الف)  $Re=3250$ ، (ب)  $Re=6675$ ، (ج)  $Re=12500$ .



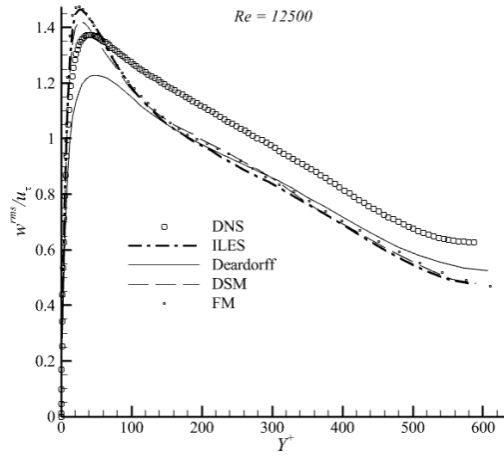
شکل ۵: منحنی نرمال شده استاندارد انحراف مجذور میانگین مربع مولفه عمود بر دیواره سرعت  $(v^{rms}/u_\tau)$  در اعداد رینولدز مختلف: (الف)  $Re=3250$ ، (ب)  $Re=6675$ ، (ج)  $Re=12500$ .



شکل ۶: منحنی نرمال شده استاندارد انحراف مجذور میانگین مربع مولفه عمود بر دیواره سرعت  $(w^{rms}/u_\tau)$  در اعداد رینولدز مختلف: (الف)  $Re=3250$ ، (ب)  $Re=6675$ .

Re=12500 (ج), Re=6675 (ب)

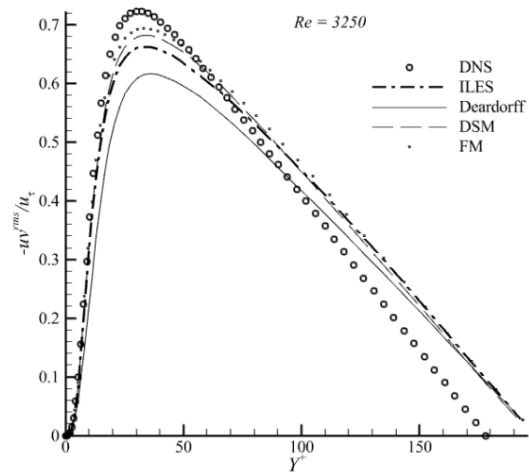
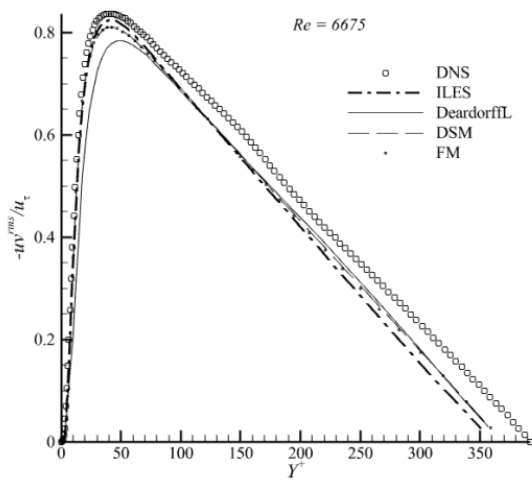
(ج)



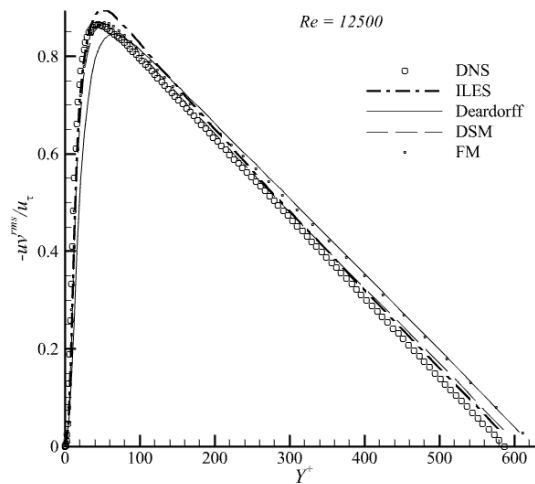
ادامه شکل ۶

(ب)

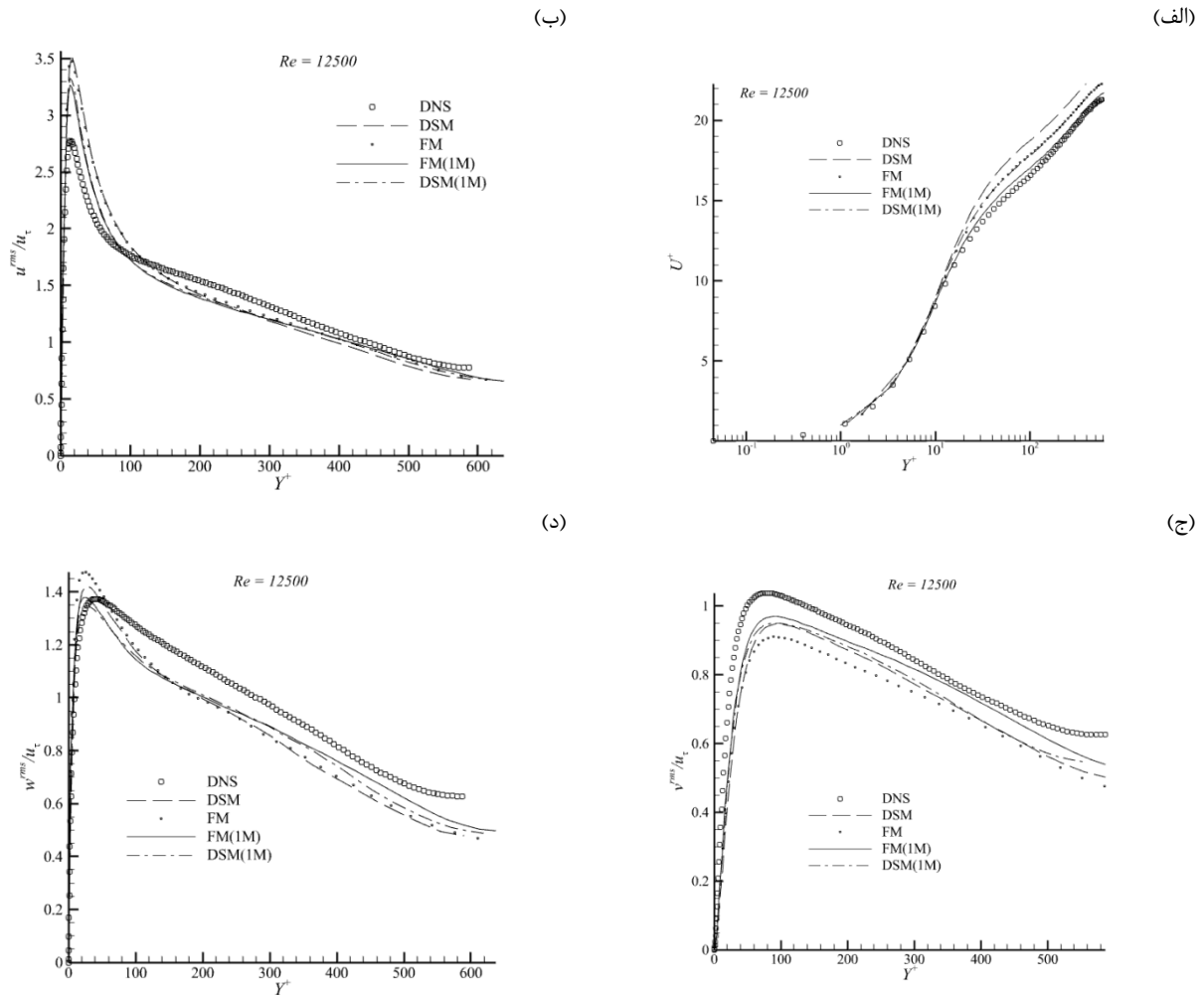
(الف)



(ج)



شکل ۷: منحنی تنش برشی آشفته نرمال شده در اعداد رینولدز مختلف: (الف) Re=3250، (ب) Re=6675، (ج) Re=12500



شکل ۸: مقایسه میزان افزایش دقت نتایج در حالت استفاده از شبکه‌ی سنگین‌تر برای مدل‌های DSM و FM، الف) میانگین مولفه سرعت جریان نرمال شده. ب) منحنی نرمال شده استاندارد انحراف مجذور میانگین مربع مولفه راستای جریان سرعت. ج) منحنی نرمال شده استاندارد انحراف مجذور میانگین مربع مولفه عمود بر دیواره سرعت. د) منحنی نرمال شده استاندارد انحراف مجذور میانگین مربع مولفه عمود بر دیواره سرعت

### ۴-۵- مقایسه هزینه محاسبات

جدول (۸): مقایسه هزینه محاسباتی برای مدل عددی زیرشبکه‌ای مورد استفاده برای هندسه کانال با سایر روش‌ها

مدل عددی زیرشبکه‌ای	زمان CPU به ازای ۱۰۰۰ حلقه تکرار (s)	درصد افزایش هزینه نسبت به مدل حاضر (%)
مدل فرکتال (مدل فعلی)	2310	0
دیردورف	3210	38.96
اسماگرینسکی دینامیکی	2870	24

هزینه محاسباتی برای شبیه‌سازی جریان کانال مدل فعلی با دو مدل دیردورف و اسماگرینسکی دینامیکی در طول ۱۰۰۰ تکرار در جدول ۸ ارائه شده است. همانطور که در این جدول مشاهده می‌شود، هزینه محاسباتی مدل فعلی به طور قابل توجهی کمتر از دو مدل زیرشبکه‌ای دیگر است. همچنین در مجموع دقت مناسب مدل فعلی نسبت به مدل‌های DSM و Deardorff، همراه با کاهش بیش از ۳۹ درصد در هزینه‌ی محاسباتی، نشان‌دهنده‌ی کارآمدی مدل در مسائل مورد بررسی است.

شبیه‌سازی‌ها بر روی سیستمی با پردازنده Intel Xeon E5-2680 v4 دارای ۲۸ هسته پردازشی، ۳۲ گیگابایت حافظه رم و سیستم‌عامل Ubuntu 18.04.1 LTS انجام شده‌اند. نسخه‌ی مورد استفاده از نرم‌افزار OpenFOAM v2.4.0 بوده است.

## ۵- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر یک مدل جدید زیرشبکه‌ای بر پایه درونیایی فرکتال و در بستر رهیافت LES برای جریان‌های سیالاتی آشفته پیشنهاد شده است. در این مطالعه مدل آشفته جدید فرکتال در محیط نرم افزار منبع‌باز OpenFoam پیاده‌سازی شد و سپس برای جریان‌های داخل کانال استفاده شد. برای گسترش مدل حاضر فرض شده است که ساختار گردابه‌های بزرگتر با استفاده از یک الگوی فرکتال به گردابه‌های کوچکتر منتقل می‌شوند. برخلاف مدل ارائه شده توسط اسکاتی و منویا [۲۵] که گردابه‌های بزرگتر به همان صورت ناهمسانگرد به گردابه‌های کوچکتر شکسته می‌شوند، در مدل حاضر به منظور رهگیری خاصیت همسانگردی گردابه‌های زیرشبکه‌ای ضرایب اصلاح کننده‌ای نیز برای مدل حاضر در نظر گرفته شد. به علاوه با اصلاح روش درونیایی، پیچیدگی محاسبات از حالت محاسبه‌ی  $27^2$  جمله برای مدل زیرشبکه‌ای به روابط جبری بسیار ساده‌تری کاهش یافته است. در تحقیق حاضر جریان آشفته در سه عدد رینولدز مخلف برای در هندسه‌ی کانال سه بعدی تناوبی بررسی و مطالعه شده‌است. با تعریف معادلات اساسی در فرم اندیس‌دار و معرفی روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ شبکه‌بندی مناسب با فیزیک جریان و اندازه‌ی عدد رینولدز انجام گرفت.

نتایج بدست آمده با مدل‌های قدرتمند زیرشبکه‌ای از جمله اسماگرینسکی دینامیکی و دیردورف مقایسه شد. همچنین برای تکمیل مقایسه حل فعلی با حالت بدون استفاده از مدل زیرشبکه‌ای، داده‌های حالت ILES ارائه شدند. مشاهده شد مدل فرکتال غیر گردابه-ویسکوزیته فعلی با وجود استفاده از روابط ساده‌ی جبری و پیچیدگی پایین محاسباتی، پیش‌بینی‌های قابل قبولی را برای سرعت اصطکاک، پروفیل‌های سرعت و پارامترهای آشفته جریان کانال ارائه می‌دهد. حل‌های عددی برای طیف گسترده‌ای از اعداد رینولدز، از جریان گذرا تا یک حالت کاملاً آشفته ارائه انجام شده است و زمان شبیه‌سازی مدل فعلی به طور قابل توجهی کمتر از روش اسماگرینسکی دینامیکی (تا ۲۴٪) و دیردورف (تا ۳۹٪) بود. به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که مدل مبتنی بر فرکتال حاضر را می‌توان به عنوان یک مدل قوی با قابلیت پیش‌بینی دقیق جریان‌های مختلف آشفته با کاهش قابل توجه هزینه محاسباتی عددی در نظر گرفت.

## ۱- منابع و مراجع

- [3] Mousavi, S.M., et al., Large eddy simulation of pseudo shock structure in a convergent-long divergent duct. *Computers & Mathematics with Applications*, 2021. 81: p. 823-837.
- [4] Kamali, R., et al., Large eddy simulation of the flameless oxidation in the IFRF furnace with varying inlet conditions. *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*, 2016. 9(2): p. 102-115.
- [5] Goshtasbi Rad, E. and S.M. Mousavi, Wall modeled large eddy simulation of supersonic flow physics over compression-expansion ramp. *Acta Astronautica*, 2015. 117: p. 197-208.
- [6] Roohi, E., A.P. Zahiri, and M. Passandideh-Fard, Numerical simulation of cavitation around a two-dimensional hydrofoil using VOF method and LES turbulence model. *Applied Mathematical Modelling*, 2013. 37(9): p. 6469-6488.
- [7] Bensow, R.E. and G. Bark, Implicit LES Predictions of the Cavitating Flow on a Propeller. *Journal of Fluids Engineering*, 2010. 132(4).
- [8] Smagorinsky, J., General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment. *Monthly weather review*, 1963. 91(3): p. 99-164.
- [9] Deardorff, J., The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. 1973.
- [10] Germano, M., et al., A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1991. 3(7): p. 1760-1765.
- [11] Moin, P., et al., A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1991. 3(11): p. 2746-2757.
- [12] PortÉ-Agel, F., C. Meneveau, and M.B. Parlange, A scale-dependent dynamic model for large-eddy simulation: application to a neutral atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000. 415: p. 261-284.
- [13] PortÉ-Agel, F., A scale-dependent dynamic model for scalar transport in large-eddy simulations of the atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 2004. 112(1): p. 81-105.
- [14] Zahiri, A.-P. and E. Roohi, Anisotropic minimum-dissipation (AMD) subgrid-scale model implemented in OpenFOAM: Verification and assessment in single-phase and multi-phase flows. *Computers & Fluids*, 2019. 180: p. 190-205.
- [15] Verstappen, R., et al. A dynamic eddy-viscosity model based on the invariants of the rate-of-strain. in *Proceedings of the Summer Program 2010*. 2011. Center for Turbulence Research.
- [16] Verstappen, R., When Does Eddy Viscosity Damp Subfilter Scales Sufficiently? *Journal of Scientific Computing*, 2011. 49(1): p. 94.
- [17] Abkar, M., H.J. Bae, and P. Moin, Minimum-dissipation scalar transport model for large-eddy
- [1] Moser, R.D., J. Kim, and N.N. Mansour, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re \tau = 590$ . *Physics of Fluids*, 1999. 11(4): p. 943-945.
- [2] Fureby, C. and F.F. Grinstein, Large Eddy Simulation of High-Reynolds-Number Free and Wall-Bounded Flows. *Journal of Computational Physics*, 2002. 181(1): p. 68-97.

- [27] Ziaei, A.N., A.R. Keshavarzi, and E. Homayoun, Fractal scaling and simulation of velocity components and turbulent shear stress in open channel flow. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005. 24(4): p. 1031-1045.
- [28] Hegeman, K. and M. Ashikhmin. Modeling turbulent flows with fractal interpolation. in *Proceedings of the 22nd Spring Conference on Computer Graphics*. 2006.
- [29] Salvetti, M., C. Marchioli, and A. Soldati. Lagrangian tracking of particles in large eddy simulation with fractal interpolation. in *Conference on Turbulence and Interactions TI2006*. 2006.
- [30] Ding, K.-Q., et al., Synthetic turbulence constructed by spatially randomized fractal interpolation. *Physical Review E*, 2010. 82(3): p. 036311.
- [31] Zhang, Z.X., et al., Three-dimensional synthetic turbulence constructed by spatially randomized fractal interpolation. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 2011. 84(2 Pt 2): p. 026328.
- [32] Akinlabi, E.O., M. Waclawczyk, and S.P. Malinowski. Fractal reconstruction of sub-grid scales for large eddy simulation of atmospheric turbulence. in *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. IOP Publishing.
- [33] Akinlabi, E.O., et al., Fractal reconstruction of sub-grid scales for large eddy simulation. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2019. 103: p. 293-322.
- [34] Liu, S. and C.-H. Liu, Scalar transport after a high-resolution solitary fractal tree based on large-eddy simulation: Implication to urban green infrastructure. *Journal of Cleaner Production*, 2024. 461: p. 142693.
- [35] Hu, R., P.L. Johnson, and C. Meneveau, Modeling the resuspension of small inertial particles in turbulent flow over a fractal-like multiscale rough surface. *Physical Review Fluids*, 2023. 8(2): p. 024304.
- simulation of turbulent flows. *Physical Review Fluids*, 2016. 1(4): p. 041701.
- [18] Rozema, W., et al., Minimum-dissipation models for large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 2015. 27(8): p. 085107.
- [19] Zahiri, A.-P. and E. Roohi, Assessment of anisotropic minimum-dissipation (AMD) subgrid-scale model: Gently-curved backward-facing step flow. *International Journal of Modern Physics C*, 2021. 32(05): p. 2150068.
- [20] Lu, H. and F. Porté-Agel, A modulated gradient model for large-eddy simulation: Application to a neutral atmospheric boundary layer. *Physics of Fluids*, 2010. 22(1): p. 015109.
- [21] Ghaisas, N.S. and S.H. Frankel, Dynamic gradient models for the sub-grid scale stress tensor and scalar flux vector in large eddy simulation. *Journal of Turbulence*, 2016. 17(1): p. 30-50.
- [22] Lar Kermani, E., E. Roohi, and F. Porté-Agel, Evaluating the modulated gradient model in large eddy simulation of channel flow with OpenFOAM. *Journal of Turbulence*, 2018. 19(7): p. 600-620.
- [23] Sreenivasan, K. and C. Meneveau, The fractal facets of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986. 173: p. 357-386.
- [24] Meneveau, C. and K. Sreenivasan, The multifractal nature of turbulent energy dissipation. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991. 224: p. 429-484.
- [25] Scotti, A. and C. Meneveau, A fractal model for large eddy simulation of turbulent flow. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1999. 127(3-4): p. 198-232.
- [26] Basu, S., E. Foufoula-Georgiou, and F. Porté-Agel, Synthetic turbulence, fractal interpolation, and large-eddy simulation. *Physical Review E*, 2004. 70(2): p. 026310.