«علوم و فناوری‌های پدافند نوین»

سال شانزدهم، شماره ۱، بهار ۱۴۰۴؛ ص ۳۷- ۲۵

علمی- پژوهشی

یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای حل مسئله ممانعت از مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان

جواد طیبی[۱]، مرضیه فلاحت[۲]، ابومسلم محمدی[۳]

۱- دانشیار دانشگاه صنعتی بیرجند، ۲- استادیار دانشگاه بزرگمهر قاین، ۳- استادیار دانشگاه امام علی (ع)

(دریافت:۱۴۰۴/۰۱/۰۸، بازنگری: ۱۴۰۴/۰۲/۲۷،، پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸، انتشار: ۱۴۰۴/۰۳/۲۸)

چکیده

این مقاله به تحلیل یک نوع خاص از مسائل بهینه سازی در حوزه پدافند با عنوان «ممانعت از مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان» می‌پردازد. این مسئله در شرایطی مطرح می‌شود که دشمن می‌تواند با ایجاد موانع طبیعی یا مصنوعی بر روی راهبردهای مسیریابی نیروهای خودی تأثیر بگذارد. فرض بر این است که دشمن می‌تواند با تغییر قابلیت اطمینان مسیرها در چارچوب محدودیت‌های مالی، قابلیت اطمینان مسیرهای کلیدی را کاهش دهد. در این تحقیق، هزینه‌های کاهش قابلیت اطمینان یال‌ها به‌صورت یک تابع ضربی تعیین‌شده است. در این مقاله یک الگوریتم کارآمد برای حل این مسئله در زمان چندجمله ای ارائه می‌شود که ابزارهای لازم را برای نیروهای نظامی فراهم می‌آورد تا در برابر تهدیدات ناگهانی، مسیرهای ایمن‌تری برای جابجایی نیروها و اطلاعات شناسایی کنند. برای ارزیابی عملکرد الگوریتم، آزمایش‌هایی بر روی نمونه‌های تصادفی انجام‌شده و نتایج آن‌ها گزارش‌شده است. همچنین، یک مثال شبیه‌سازی‌شده از جنگ بین عراق و کویت به‌منظور بیان جزئیات اجرایی الگوریتم آورده شده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که رویکردهای بهینه سازی قابلیت اطمینان می‌توانند به بهبود کارایی و اثربخشی عملیات نظامی در شرایط بحرانی و پرتنش کمک کنند.

کلیدواژه‌ها: قابلیت اطمینان، دشمن مداخله‌گر، عملیات نظامی، تخریب مسیر.

A Polynomial-time Algorithm for Solving the Most Reliable Routing Interdiction Problem

J. Tayyebi *, M. Felahat, A. Mohammadi,
Birjand University of Technology

(Received:۲۰۲۵/۰۳/۲۸, Revised: ۲۰۲۵/۰۵/۱۷, Accepted: ۲۰۲۵/۰۶/۰۸, Published: ۲۰۲۵/۰۶/۱۸)

Abstract

This paper analyzes a specific type of optimization problem in the defense field, titled "The Most Reliable Path Interdiction Problem". This problem arises when an enemy can influence the routing strategies of friendly forces by creating natural or artificial obstacles. It is assumed that the enemy can reduce the reliability of key paths by altering the reliability of routes within budget constraints. In this paper, the costs of reducing the reliability of arcs are defined as a multiplicative function. This paper presents an efficient algorithm for solving the problem in polynomial time, providing military forces with the necessary tools to identify safer routes for the movement of troops and information in the face of sudden threats. To evaluate the performance of the algorithm, tests are conducted on randomly generated samples, and the results are reported. Additionally, a simulation example from the Iraq-Kuwait war is provided to illustrate the algorithm's implementation details. The results of this paper indicate that reliability optimization approaches can enhance the effectiveness and efficiency of military operations in critical and high-stress situations.

Keywords: Reliability, Disruptive Adversary, Military Operations, Path Disruption.

*Corresponding Author E-mail: javadtayyebi@birjand.ac.ir

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.

Publisher: Imam Hussein University © Authors

۱. مقدمه

مسئله مسیریابی با بالاترین قابلیت اطمینان در حوزه نظامی به بررسی و تحلیل ناوگان‌ها و زیرساخت‌های نظامی جهت انتخاب امن‌ترین مسیر ممکن می‌پردازد. هدف اصلی این مسئله، بهینه‌سازی مسیرهای انتقال نیروها، تجهیزات و اطلاعات در شرایط ناپایدار و تحت ریسک‌های امنیتی در حوزه نظامی است [۱]. این مسئله به‌طور ویژه به شناسایی مسیری بهینه می‌پردازد که حداکثر قابلیت اطمینان را در برابر عدم قطعیت‌ها و تهدیدات نظامی مختلف، ازجمله حملات دشمن و خرابی تجهیزات فراهم آورد [۲].

به‌منظور پیاده‌سازی این هدف، الگوهای حمل‌ونقل و انتخاب مسیر باید به‌گونه‌ای طراحی شوند که احتمال موفقیت در انجام مأموریت‌های نظامی را به حداکثر برسانند. به‌علاوه، با در نظر گرفتن محدودیت‌های منابع، زمان و دیگر عوامل تأثیرگذار، این مسئله تلاش می‌کند ارزیابی دقیقی از قابلیت اطمینان مسیرهای مختلف ارائه دهد و درنهایت بهترین مسیر را شناسایی کند. این موضوع اهمیت بالایی در حوزه‌های لجستیک نظامی، برنامه‌ریزی مأموریت‌ها و طراحی شبکه‌های ارتباطی و حمل‌ونقل دارد [۳].

مسئله مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان یک مسئله بنیادی در نظریه گراف و بهینه‌سازی شبکه است. این مسئله به انتخاب مسیرهایی می‌پردازد که حداکثر میزان قابلیت اطمینان را در انتقال داده‌ها یا منابع تضمین کند. در این زمینه، قابلیت اطمینان به‌احتمال عدم شکست یا عملکرد صحیح مسیر منتخب اشاره دارد. مفهوم اصلی این مسئله ایجاد اطمینان از انتقال موفقیت‌آمیز نیروها، داده‌ها یا تجهیزات در یک شبکه، با در نظر گرفتن احتمال وجود نقص یا وقفه در هر یک از یال‌ها یا رأس‌ها است.

مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان در دنیای واقعی دارای کاربردهای بسیار و متنوعی است که به‌ویژه در زمینه‌های حساس و حیاتی نمود پیدا می‌کند. به‌عنوان‌مثال، در شبکه‌های مخابراتی، انتخاب مسیرهای باقابلیت اطمینان بالا می‌تواند به ارتقاء کیفیت خدمات و کاهش افت کیفیت ارتباطات کمک کند، به‌خصوص در زمان‌هایی که تقاضا برای خدمات به‌شدت افزایش می‌یابد [۴]. در سیستم‌های حمل‌ونقل، شناسایی مسیرهایی با ریسک پایین می‌تواند به بهبود ایمنی و کاهش زمان مراجعه کمک کند که این امر به‌ویژه در شرایط اضطراری مستلزم دقت و سرعت عمل است [۵]. در حوزه نرم‌افزارهای تحلیلی، قابلیت اطمینان به‌عنوان عاملی حیاتی در تصمیم‌گیری برای بهینه‌سازی شبکه‌های تأمین انرژی و ارائه خدمات بهینه موردتوجه قرار می‌گیرد [۶]. همچنین، در شرایط بحرانی مانند بلایای طبیعی، انتخاب مسیرهای ایمن برای انتقال منابع و امدادرسانی، می‌تواند به نجات جان انسان‌ها و کاهش خسارات کمک شایانی نماید [۷]. به همین ترتیب، این مسئله در مدیریت زنجیره تأمین، تأمین آب، و سایر حوزه‌های مرتبط نیز به‌منظور اطمینان از کارایی و پایداری سیستم‌ها اهمیت فراوانی دارد [۸]. به‌طورکلی، مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان به ما این امکان را می‌دهد که در جهان پیچیده و متغیر امروزی، تصمیمات مبتنی بر داده‌های دقیق و تحلیل‌های علمی اتخاذ کنیم.

در این مقاله، یک تعمیم از مسئله مسیریابی با بالاترین قابلیت اطمینان مورد بررسی قرار می‌گیرد که به‌عنوان یک بازی سلسله مراتبی دونفره معرفی می‌شود [۹]. در این بازی، هدف یافتن مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان بین دونقطه مشخص در یک شبکه است، درحالی‌که یک عامل مخرب نیز در تلاش برای کاهش این قابلیت اطمینان است.

به‌عبارت‌دیگر، دو بازیکن با اهداف متضاد در یک ساختار سلسله مراتبی با یکدیگر رقابت می‌کنند. بازیکن اول (دشمن مخرب) سعی در کاهش قابلیت اطمینان مسیرها با ایجاد موانع یا تخریب آن‌ها دارد، درحالی‌که بازیکن دوم (نیروهای خودی به‌عنوان مسیریاب) می‌خواهد مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان را در شرایطی که بازیکن اول در حال تخریب مسیرها است، پیدا کند. این نوع بازی‌ها در ادبیات موضوع به‌عنوان «مسائل ممانعت از بهینه‌سازی» شناخته می‌شوند [۱۰, ۱۱]. پس در این مورد خاص، با «مسئله ممانعت از مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان» روبرو هستیم [۱۲].

یکی از جنبه‌های کلیدی این تحقیق، نحوه محاسبه هزینه‌های کاهش قابلیت اطمینان مسیرها است. در این مقاله، این هزینه‌ها به‌صورت یک تابع ضربی در نظر گرفته می‌شوند، به این معنی که تأثیر تخریب یک مسیر، به میزان قابلیت اطمینان اولیه آن مسیر و همچنین میزان تخریب اعمال‌شده بستگی دارد.

مقاله یک الگوریتم کارآمد برای حل این مسئله در زمان چندجمله‌ای ارائه می‌دهد. این الگوریتم به نیروهای نظامی امکان می‌دهد تا در برابر تهدیدات ناگهانی، مسیرهای ایمن‌تری برای جابجایی نیروها و اطلاعات شناسایی کنند.

نتایج این پژوهش کاربردهای مهمی در حوزه نظامی و امنیتی دارد. با استفاده از این رویکرد، می‌توان مسیرهای حمل‌ونقل نیروها و تجهیزات نظامی را در شرایط بحرانی بهینه‌سازی کرد، مسیرهای انتقال اطلاعات حساس را در برابر حملات سایبری و سایر تهدیدات امن کرد، و سناریوهای مختلف تهدیدات را شبیه‌سازی و نقاط ضعف احتمالی را شناسایی کرد. به‌طور خلاصه، این پژوهش نشان می‌دهد که رویکردهای بهینه‌سازی قابلیت اطمینان می‌توانند به ارتقاء کارایی و اثربخشی عملیات نظامی در شرایط بحرانی و پرتنش کمک کنند. با ارائه

یک الگوریتم کارآمد، این مقاله ابزاری قدرتمند برای تصمیم‌گیری در شرایط پیچیده و پرمخاطره فراهم می‌آورد.

در این مقاله، بخش ۲ به‌مرور ادبیات مرتبط با موضوع تحقیق می‌پردازد تا زمینه‌ای مناسب برای توسعه ایده‌ها فراهم کند. در بخش ۳، مبانی نظری موردتوجه قرارگرفته و مفاهیم کلیدی تعریف می‌شوند. بخش ۴ به فرمول‌بندی مسئله اختصاص دارد، جایی که چالش‌ها و سؤالات تحقیق به‌دقت مشخص می‌شوند. سپس در بخش ۵، طراحی الگوریتم پیشنهادی برای حل مسئله بررسی خواهد شد. برای تحلیل بیشتر عملکرد الگوریتم بخش ۶ به گزارش اجراهای متفاوت آن بر نمونه‌های تصادفی می‌پردازد. بخش ۷ به ارائه یک مثال کاربردی می‌پردازد که نشان‌دهنده نحوه پیاده‌سازی الگوریتم در دنیای واقعی است. درنهایت، بخش ۸ به بحث و نتیجه‌گیری می‌پردازد و دستاوردهای شاخص تحقیق را مرور کرده و پیشنهادها برای پژوهش‌های آینده را ارائه می‌دهد.

۲. پیشینه تحقیق

در مسائل بهینه‌سازی شبکه، معمولاً یک تابع هدف وجود دارد که بر روی یک شبکه ثابت و بدون تغییر بهینه‌سازی می‌شود [۱۳]. بااین‌حال، در دو دهه گذشته، زمینه‌ای نوین با عنوان برنامه‌ریزی و طراحی شبکه توجه قابل‌توجهی از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. در این حوزه، تصمیم‌گیرندگان قادر به تغییر توپولوژی شبکه و پارامترهای آن هستند. مسائل بهینه‌سازی مرتبط با طراحی شبکه را می‌توان به چهار نوع عمده تقسیم کرد:

۱. بهینه‌سازی معکوس: این مسائل به شکل یک مسئله استاندارد بهینه‌سازی شبکه به همراه یک جواب اولیه هستند. هدف این است که پارامترهای مسئله حداقل تغییر یابند تا این جواب بهینه شود [۱۶-۱۴].

۲. بهینه‌سازی مقدار معکوس شبکه: این رویکرد شامل تغییر برخی از پارامترهای یک مسئله بهینه‌سازی برای اطمینان از باقی ماندن مقدار بهینه آن در یک کران مشخص است [۲۰-۱۷].

۳. ممانعت در بهینه‌سازی شبکه: در این سناریو دو تصمیم‌گیرنده وجود دارند. اولین نفر که در این مقاله به‌عنوان دشمن شناخته می‌شود، ابتدا شبکه را مختل می‌کند. پس‌ازآن، تصمیم‌گیرنده دوم، که به‌عنوان نیروهای خودی شناخته می‌شود، به اقدامات مهاجم پاسخ می‌دهد و تابع هدف خود را بر روی شبکه تغییریافته بهینه می‌کند [۲۴-۲۱].

۴. بهینه‌سازی استوار شبکه : این دسته نیز شامل یک دشمن و نیروهای خودی است. در ابتدا، نیروهای خودی تابع هدف خود را بهینه‌سازی می‌کند. پس‌ازآن، دشمن شبکه را مختل می‌کند تا مقدار هدف نیروهای خودی کاهش یابد. بنابراین، نیروهای خودی باید برنامه‌ریزی کنند تا اثرات مداخله دشمن را تا حد امکان کاهش دهد [۲۶, ۲۵].

دودسته اول این مسائل شامل یک تصمیم‌گیرنده هستند که سعی دارد پارامترها را بر اساس مشاهدات خودتنظیم کند. برعکس، دسته‌های سوم و چهارم شامل دو تصمیم‌گیرنده با اهداف متضاد است. تمایز کلیدی بین این دودسته در توالی اقداماتی است که توسط تصمیم‌گیرندگان انجام می‌شود [۲۵].

در ادامه این بخش، به دلیل ارتباط، بر روی مسائل ممانعت در شبکه تمرکز می‌کنیم. این مسائل نماینده یک نوع خاص از بازی‌ها هستند که به‌عنوان بازی‌های استاکلبرگ یا بازی‌های سلسله‌مراتبی شناخته می‌شوند، زیرا شامل دو سطح خاص از عملکرد هستند. در سطح اول، دشمن توپولوژی شبکه یا پارامترهای آن را تغییر می‌دهد، درحالی‌که در سطح دوم، نیروهای خودی بعد از مشاهده اقدامات مهاجم استراتژی خود را انتخاب می‌کند [۱۰]. در شکل بازی‌های استاکلبرگ، دشمن به‌عنوان پیشرو و نیروهای خودی به‌عنوان پیرو نامیده می‌شوند [۹]. باوجود ساختار دوسطحی آن‌ها، برخی از مسائل ممانعت می‌توانند به‌عنوان بازی‌های هم‌زمان غیر هم کارانه و صفر-مجموع توصیف شوند [۲۷]. این طبقه‌بندی ناشی از ماهیت ریسک‌پذیری هر دو بازیکن است.

در سال‌های اخیر، مقالات بسیاری در مورد مسائل ممانعت در شبکه منتشرشده‌اند [۲۵, ۱۰]. بااین‌حال، تنها تعداد محدودی از مطالعات الگوریتم‌های زمان چندجمله‌ای برای حل این مسائل ارائه کرده‌اند [۲۷, ۲۴, ۲۱]. دلیل اصلی این کمبود این است که مسائل ممانعت به‌طورکلی NP-سخت هستند. به‌ویژه، NP-سخت بودن مسئله یک نتیجه مورد انتظار است زمانی که دشمن با هزینه‌های ثابت مواجه است، زیرا این امر مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح دوسطحی تبدیل می‌کند.

در مقاله حاضر، به بررسی و تحلیل مسئله ممانعت از مسیریابی با حداکثر قابلیت اطمینان پرداخته می شود. بسته به دانش نویسندگان، این موضوع به‌طور خاص تنها در دو مقاله [۱۲] و [۲۸] موردمطالعه قرارگرفته است، که نشان‌دهنده اهمیت و کمبود تحقیقات در این زمینه است.

در [۲۸]، روش‌های مختلف برای حل مسئله ممانعت در شبکه‌های تصادفی با حداکثر قابلیت اطمینان مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. این مسئله به‌طور خاص شامل ممانعت از یال های یک گراف جهت دار است که هدف آن کاهش احتمال

عبور یک دشمن ناشناخته یا تهدید از مسیر خاصی است. پژوهشگران در این مقاله به ارائه رویکردهای جدید پرداخته و شامل دو نوع فرمول‌بندی می‌باشند: یکی فرمول‌بندی فشرده که با رویکردی بهینه سعی در کاهش پیچیدگی محاسبات دارد و دیگری فرمول‌بندی مبتنی بر مسیر که بر اساس ایجاد محدودیت‌های تأخیری برای تسهیل حل مسئله طراحی‌شده است.

در مقاله [۱۲]، تمرکز بر مسئله ممانعت از مسیری با حداکثر قابلیت اطمینان با نگاهی به بازرسی ترافیک و جلوگیری از دسترسی مهاجمان قرار دارد. این مسئله ازآن جهت متفاوت است که ممانعت بر روی رأس ها انجام می‌شود و برای حل آن از متغیرهای صحیح استفاده می‌شود. در این راستا، الگوریتم بهبودیافته تجزیه بندرز معرفی‌شده است که با پیاده سازی روش‌های جستجوی محلی و بهینه‌سازی دومرحله‌ای، به‌شدت بهبودیافته است. این الگوریتم می‌تواند در بهبود کارایی و کاهش زمان محاسبات مؤثر باشد و به تحقیق و توسعه در حوزه های مرتبط با امنیت شبکه‌ها کمک شایانی نماید.

در مقاله حاضر ابتدا فرمول‌بندی مسئله ممانعت از یافتن مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان ارائه می‌شود. سپس، یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای حل مسئله بر گراف‌های فاقد دور جهت‌دار ارائه می‌دهیم. قابل‌توجه است که این مقاله اولین مقاله‌ای است که به بیان یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای حل این مسئله می‌پردازد.

۳. مبانی نظری

در این بخش، به تبیین مفاهیم اساسی نظریه گراف پرداخته و همچنین به معرفی مسئله مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان می‌پردازیم. در ادامه، دو روش حل این مسئله را مرور خواهیم کرد. این روش‌ها برای پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی ضرورت دارند. گراف جهت‌دار و همبند $G(V,E)$ را در نظر بگیرید که در آن V مجموعه‌ای از رئوس (نقاط) است. این رئوس می‌توانند نمایانگر مکان‌ها، ایستگاه‌ها و غیره باشند. مجموعه‌ی E شامل یال‌ها (اتصالات) است که به نحوه ارتباط و مسیرهای موجود بین رئوس اشاره دارد. در مقاله فرض می‌کنیم که گراف موردبررسی شامل n رأس وm یال است.

در این گراف دو رأس خاص مبدأ و مقصد وجود دارد که به ترتیب با نماد s و t نشان داده می‌شوند. یک مسیر به‌صورت دنباله‌ای از رأس‌ها به شکل $v_1 - v_2 - \ldots - v_q$ تعریف می‌شود به‌شرط این‌که به ازای $i = 1,2,\ldots,q-1$ هر زوج مرتب مانند (v_i, v_{i+1}) یک یال از مجموعه E باشد. درصورتی‌که رئوس ابتدایی و انتهایی مسیر یکسان باشند، آن مسیر، یک دور نامیده می‌شود. یک مسیر، ساده نامیده می‌شود اگر هیچ رأس تکراری در آن وجود نداشته باشد. به‌طور اختصاری، یک مسیر ساده که از رأس s شروع و به رأس t ختم می‌شود، به‌عنوان st-مسیر شناخته می‌شود. در سرتاسر این مقاله فرض می‌کنیم که گراف G فاقد دور است.

به هر یال (i,j) در گراف G یک مقدار قابلیت اطمینان $r_{ij} \in [0,1]$ نسبت داده می‌شود که نشان‌دهنده احتمال موفقیت انتقال افراد، اطلاعات یا بار از رأس i به رأس j از طریق آن یال است. هدف این مسئله یافتن یک مسیر بهینه از رأس مبدأ s به رأس مقصد t است، به‌گونه‌ای که حاصل‌ضرب قابلیت اطمینان یال‌های موجود در مسیر که به‌عنوان یک تابع ترکیبی از قابلیت اطمینان یال‌ها محسوب می‌شود، حداکثر گردد. به بیان دقیق‌تر، قابلیت اطمینان هر مسیر P به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(P) = \prod_{(i,j)\in P} r_{ij}$$

که در آن منظور از $(i,j) \in P$ یال‌های متعلق به مسیر P است. ازآنجاکه هدف ما حداکثر کردن قابلیت اطمینان مسیر است پس از بین همه مسیرهای موجود باید مسیری را بیابیم که بیشترین مقدار $R(P)$ را داشته باشد. بنابراین، مسئله مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\max_{P\in P(s,t)} R(P)$$

که در آن $P(s,t)$ مجموعه همه st—مسیرهای گراف است.

برای حل مسئله مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان، روش‌های متنوعی وجود دارد که هر یک با توجه به ویژگی‌های خاص خود و نوع گراف می‌توانند به کار گرفته شوند. در ادامه به معرفی دو نمونه از مهم‌ترین این روش‌ها می‌پردازیم:

- **الگوریتم دیکسترای تغییریافته:**

الگوریتم دیکسترا برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر در گراف‌هایی با وزن‌های غیر منفی توسعه‌یافته است [۱۳]. به‌منظور انطباق این الگوریتم با چالش‌های مربوط به پایایی و قابلیت اطمینان، می‌توانیم از منفی لگاریتم قابلیت اطمینان یال‌ها به‌عنوان معیار وزن استفاده کنیم. این رویکرد موجب می‌شود که مسئله حداکثر کردن قابلیت اطمینان به مسئله کوتاه‌ترین مسیر تبدیل‌شده و می‌توان با استفاده از این الگوریتم به‌سادگی مسیرهایی با بیشترین قابلیت اطمینان را شناسایی کرد. در این روش وزن هر یال به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$cost_{ij} = -\log r_{ij}$ با اعمال این تغییر، می‌توان از الگوریتم دیکسترا به‌طور مؤثری جهت شناسایی مسیری با حداکثر قابلیت اطمینان بهره‌مند شد. پیچیدگی زمانی کلی این روش برای مسئله مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان برابر $O(n^2)$ است. البته اگر از ساختمان داده‌ای مانند دیکشنری و لیست اولویت

استفاده کنیم، پیچیدگی زمانی به $O((m+n)\log n)$ تغییر می‌یابد، که این به دلیل کاهش زمان جستجو برای انتخاب رأس با کمترین وزن، کارایی بهتری دارد. به‌طور خاص اگر شبکه فاقد دور جهت‌دار باشد این الگوریتم می‌تواند کاراتر عمل کرده و در زمان خطی $O(m)$ مسئله را حل نماید.

➢ روش برنامه‌ریزی پویا:

روش برنامه‌ریزی پویا یکی دیگر از فن‌های اثرگذار در حل مسئله مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان است. این روش از اصول بهینه‌سازی استفاده می‌کند و برای تجزیه‌وتحلیل امکانات مختلف در یک گراف به کار می‌رود. در این روش ابتدا یک ماتریس قابلیت اطمینان $R[i][j]$ تعریف می‌شود که نمایانگر بیشترین قابلیت اطمینان ممکن از رأس i به رأس j است. با استفاده از اصل بهینه‌سازی وزن‌های قابلیت اطمینان مسیرهای مختلف را به‌روزرسانی می‌کند. پس‌ازاینکه تمام ترکیب‌های ممکن از رأس‌ها بررسی شدند، ماتریس نهایی $R[i][j]$ بازتاب‌دهنده حداکثر قابلیت اطمینان برای رسیدن از رأس i به رأس j خواهد بود. درنهایت، می‌توان با بررسی مقادیر در ماتریس R، مسیر با بیشترین قابلیت اطمینان را شناسایی کرد.

این روش به‌ویژه در شرایطی که وجود عدم قطعیت یا شکست‌های احتمالی در یال‌های مختلف باشد، از اهمیت بالایی برخوردار است. پیچیدگی زمانی کلی روش برنامه‌ریزی پویا برای مسئله مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان برابر $O(n^3)$ است. این زمان معیاری از قدرت الگوریتم است که به‌ویژه در گراف‌هایی با تعداد رأس زیاد می‌تواند به چالشی جدی تبدیل شود. به همین دلیل، در عمل، این روش بیشتر در گراف‌های با اندازه‌های کوچک تا متوسط استفاده می‌شود. در گراف‌های بزرگ‌تر، ممکن است نیاز به استفاده از روش‌های دیگر یا بهینه‌سازی‌ها باشد تا زمان پردازش کاهش یابد.

۴. فرمول‌بندی مسئله

در این بخش مسئله ممانعت مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان را بر گراف جهت‌دار و فاقد دور $G(V,E)$ به‌صورت یک مسئله بهینه‌سازی فرمول‌بندی می‌کنیم.

این مسئله ممانعت، یک مدل بازی دوسطحی است که مشابه با بازی‌های مجموع صفر در آن دو بازیگر اصلی با نقش‌های متفاوت وجود دارند. ابتدا، یکی از بازیگران که به‌عنوان «دشمن» شناخته می‌شود، اقدام به اتخاذ تصمیماتی می‌کند [۲۹]. سپس، بازیگر دیگر که به‌عنوان «نیروهای خودی» معرفی می‌شود، در پاسخ به این تصمیمات عمل می‌کند.

برای فرمول‌بندی مسئله، متغیر تصمیم دشمن را با نماد x_{ij} نشان می‌دهیم که میزان کاهش قابلیت اطمینان یال واقع‌بین دو رأس i و j را نمایش می‌دهد. با استفاده از این متغیر می‌توانیم تأثیر موانع و محدودیت‌های به وجود آمده توسط دشمن را مورد ارزیابی قرار دهیم. در این صورت برای هر یال (i,j) مقدار قابلیت اطمینان اولیه r_{ij}، تحت تأثیر تصمیمات دشمن قرار می‌گیرد و به مقدار $\frac{r_{ij}}{x_{ij}}$ کاهش می‌یابد. این رابطه به ما اجازه می‌دهد تا به‌طور دقیق‌تر نتایج تدابیر دشمن را در کاهش قابلیت اطمینان یال‌ها بررسی کنیم و تحلیل جامع‌تری از وضعیت سیستم در برابر موانع فراهم آوریم.

محدودیت‌های مربوط به دشمن نقش کلیدی در تعیین راهبردهای ممانعت ایفا می‌کنند. این محدودیت‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

محدودیت بودجه: دشمن با یک محدودیت بودجه مشخص در فرآیند تعیین موانع و غیر فعال‌سازی یال‌ها مواجه است. این محدودیت به‌صورت:

$$\prod_{(i,j)\in A} x_{ij}^{b_{ij}} \le B$$

تعریف می‌شود که در آن B بودجه کل و b_{ij} وزن تغییرات مربوط به یال (i,j) را نشان می‌دهد. این رابطه تأکید بر این نکته دارد که انتخاب‌های دشمن تحت تأثیر محدودیت‌های مالی او قرار دارد و لازم است به‌طور هوشمندانه‌ای بر اساس آن‌ها اقدام کند. به‌عبارت‌دیگر، مجموع هزینه‌های مربوط به غیرفعال کردن یال‌ها نباید از یک مقدار معین بیشتر شود. این امر سبب می‌شود که دشمن نتواند به‌طور نامحدود به ایجاد موانع بپردازد و ناگزیر است که بهینه‌ترین راهبردها را انتخاب کند که با محدودیت‌های مالی او سازگار باشد.

محدودیت کران: علاوه بر محدودیت بودجه، دشمن با یک محدودیت کران نیز روبرو است که به ارزیابی و کنترل میزان تغییرات در قابلیت اطمینان هر یک از یال‌ها مرتبط می‌شود. این محدودیت تعیین می‌کند که تغییرات قابلیت اطمینان ناشی از موانع ایجادشده نمی‌تواند از یک حد مشخص فراتر رود. به‌این‌ترتیب، این موضوع کمک می‌کند تا تغییرات نامعقول یا غیرقابل‌قبول در قابلیت اطمینان شبکه تحت کنترل قرار گیرد و از بروز تأثیرات ناخواسته‌ای که ممکن است به ساختار کلی و عملکرد شبکه لطمه بزند، جلوگیری شود. این محدودیت را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$1 \le x_{ij} \le u_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in E,$$

در رابطه فوق، u_{ij} حداکثر میزان کاهش در قابلیت اطمینان یال (i,j) را نشان می‌دهد. این محدودیت به دشمن اجازه می‌دهد تا ضمن کاهش اطمینان یال‌ها، تغییرات خود را در چارچوبی منطقی و معقول حفظ کند و از تحمیل اثرات زیان‌بار بر عملکرد کلی شبکه اجتناب ورزد.

متغیر تصمیم نیروهای خودی را با نماد y_{ij} تعریف می‌کنیم. این متغیر دودویی (صفر و یک) نشان‌دهنده این است که آیا از یال (i,j) عبور کرده‌ایم یا خیر. این متغیر دودویی نه‌تنها به ما این امکان را می‌دهد که مسیرهای احتمالی را در یک گراف مدل‌سازی کنیم، بلکه می‌توانیم تأثیر این مسیرها را بر قابلیت اطمینان شبکه نیز تحلیل کنیم. محدودیت‌های این مسئله برای نیروهای خودی مشابه محدودیت‌های مسئله کوتاه‌ترین مسیر است که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} y_{ij} - \sum_{j:(i,j)\in E} y_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = s, \\ ۰ & i \neq s,t, \\ -۱ & i = t, \end{cases}$$

این محدودیت‌ها که به محدودیت‌های بقای جرم نیز معروف‌اند، تضمین می‌کند که یال‌های متعلق به مجموعه

$$\{(i,j) \in E : y_{ij} = ۱\}$$

یک st-مسیر را در گراف تشکیل می‌دهند. تابع هدف مسئله به‌صورت $\prod_{(i,j)\in A} \left(\frac{r_{ij}}{x_{ij}}\right)^{y_{ij}}$ تعریف می‌شود. دشمن با تغییر مقادیر x_{ij} این مقدار را کمینه و نیروهای خودی با انتخاب مقدار مناسب برای متغیرهای y_{ij} آن را بیشینه می‌کنند. بنابراین، مدل بهینه‌سازی دوسطحی به شکل زیر است:

سطح اول

$$\min z$$

$$\prod_{(i,j)\in A} x_{ij}^{b_{ij}} \leq B$$

$$۱ \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in E,$$

سطح دوم

$$z = \max\{ \prod_{(i,j)\in E} \left(\frac{r_{ij}}{x_{ij}}\right)^{y_{ij}}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} y_{ij} - \sum_{j:(i,j)\in E} y_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = s, \\ ۰ & i \neq s,t, \\ -۱ & i = t, \end{cases}$$

$$y_{ij} = ۰,۱ \ \ \forall (i,j) \in E\}.$$

۵. طراحی الگوریتم

در این بخش، یک الگوریتم برای حل مسئله ممانعت از مسیریابی با بالاترین قابلیت اطمینان ارائه می‌شود. ابتدا به یک قضیه کلیدی اشاره می‌کنیم که در حل این مسئله بسیار حائز اهمیت است.

قضیه ۱: اگر P یک مسیر با بیشترین قابلیت اطمینان نسبت به مقادیر قابلیت اطمینان اولیه یال‌ها باشد، آنگاه جواب بهینه برای مسئله وجود دارد که P همچنان مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان باقی بماند.

اثبات: فرض کنید که یک جواب بهینه x^* از متغیرهای سطح اول مسئله موجود است که دارای این خاصیت نیست. یعنی علی‌رغم این‌که P یک مسیر با بیشترین قابلیت اطمینان نسبت به r_{ij} است اما نسبت به $\frac{r_{ij}}{x^*_{ij}}$ نیست و مسیر دیگری چون P' مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان نسبت به $\frac{r_{ij}}{x^*_{ij}}$ بوده که نسبت به r_{ij} نیست زیرا در غیر این صورت نتیجه قضیه اثبات شده بود.

مجموعه یال‌های $T = P \backslash P'$ را در نظر بگیرید. این مجموعه تهی نیست زیرا در این صورت P' مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان نمی‌توانست باشد. می‌توان مقادیر x^*_{ij} را به ازای $(i,j) \in S$ تا حداکثر مقدار یک به‌گونه‌ای کاهش داد که با این کار قابلیت اطمینان یال‌های متعلق به T حداکثر به مقدار اولیه r_{ij} افزایش می‌یابند. توجه کنید با این کار مقدار قابلیت اطمینان P' تغییر نکرده و مقدار قابلیت اطمینان P افزایش می‌یابد. این کار را تا مادامی انجام می‌دهیم که میزان قابلیت اطمینان مسیر P برابر با مقدار قابلیت اطمینان مسیر P' شود. با این کار شرط موردنظر برای این جواب جدید برقرار می‌ماند. توجه کنید که این جواب نیز در همه محدودیت‌های سطح اول صدق می‌کند و به‌علاوه در آن مسیر P' همچنان با بیشترین قابلیت اطمینان باقی می‌ماند. این جواب یک جواب بهینه است که شرط موردنظر را برآورده می‌کند.

این قضیه به ما این امکان را می‌دهد که نه‌تنها از اعتبار بهینگی مسیر P اطمینان حاصل کنیم، بلکه همچنین تضمین کنیم که دیگر مسیرهای جایگزین نتوانند خود را به‌عنوان مسیرهای با بالاترین قابلیت اطمینان مطرح کنند. این امر به‌ویژه در زمینه‌های کاربردی اهمیت به سزایی دارد، زیرا می‌توان با اطمینان بیشتری به تحلیل و ارزیابی مسیرهایی پرداخت که می‌توانند به حداکثر قابلیت اطمینان برسند. یک نتیجه کلیدی که می‌توان از این قضیه گرفت این است که هرچند قضیه در مورد بردار ابتدایی r_{ij} صحبت می‌کند اما اگر در طی الگوریتم یک بردار جدید از قابلیت اطمینان نیز داشته باشیم بازهم همین نتیجه برای آن برقرار است. به‌بیان‌دیگر هنگامی‌که یک مسیر با بیشترین قابلیت اطمینان شناخته می‌شود در طی فرآیند کاستن از قابلیت اطمینان یال‌ها اگرچه قابلیت اطمینان آن کاهش می‌یابد اما بازهم بهینگی خود را حفظ می‌کند.

بر اساس توضیحات ارائه‌شده، رویه کلی الگوریتم پیشنهادی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. **شناسایی مسیرهای با بالاترین قابلیت اطمینان:** در هر تکرار، ابتدا تمام‌مسیرهای موجود با بالاترین قابلیت اطمینان از مبدأ s به مقصد t شناسایی می‌شوند. این مرحله شامل ارزیابی قابلیت اطمینان هر یال r_{ij} و انتخاب مسیرهایی است که حداکثر قابلیت اطمینان را دارند.

۲. **کاهش قابلیت اطمینان :** پس از شناسایی مسیرهای با بالاترین قابلیت اطمینان، الگوریتم قابلیت اطمینان این مسیرها را تا حد ممکن و با حداقل هزینه کاهش می‌دهد.

۳. **تکرار الگوریتم:** این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که یکی از دو شرایط زیر برقرار شود:

- تمام مقدار بودجه: اگر محدودیت بودجه به حدی برسد که برابر با تساوی باشد و دیگر نتوان قابلیت اطمینان را کاهش داد.
- کران بالای قابلیت اطمینان: اگر مسیری از مبدأ s به مقصد t وجود داشته باشد که کاهش قابلیت اطمینان تمام یال‌های آن به کران بالای خود رسیده باشد و نتوان بیشتر این مقدار را کاهش داد.

۴. پایان الگوریتم: درنهایت، الگوریتم متوقف می‌شود و آخرین حالت به‌دست‌آمده از قابلیت اطمینان مسیرها و تخصیصات را به‌عنوان نتیجه نهایی ارائه می‌دهد.

این رویه به‌خوبی می‌تواند نیازهای ممانعت به حداکثر قابلیت اطمینان را برآورده کند و درعین‌حال حفظ حداکثر کارایی منابع و حداقل هزینه‌ها را تضمین نماید. برای کاهش قابلیت اطمینان تمام‌مسیرها با بیشترین قابلیت اطمینان، کافی است قابلیت اطمینان یکی از یال‌ها در هر یک از مسیرهای با بیشترین قابلیت اطمینان را کاهش دهیم. به این منظور، از مفهوم st–برش استفاده می‌کنیم تا یال‌هایی با حداقل هزینه را در هر مسیر با بیشترین قابلیت اطمینان شناسایی کنیم.

با شناسایی این یال‌ها، می‌توانیم به‌طور هدفمند یکی از آن‌ها را انتخاب کرده و قابلیت اطمینان آن را کاهش دهیم. این عمل موجب می‌شود که مسیرهای موردنظر به‌عنوان مسیرهایی با بالاترین قابلیت اطمینان دیگر نتوانند خود را حفظ کنند و به‌این‌ترتیب، کنترل بهتری بر روی شبکه و قابلیت اطمینان آن خواهیم داشت.

استفاده از st–برش به ما این امکان را می‌دهد که در هر مرحله، با نگاهی به هزینه‌ها و اثرات کاهش قابلیت اطمینان، انتخابی بهینه داشته باشیم. این رویکرد نه‌تنها به کاهش قابلیت اطمینان کمک می‌کند، بلکه موجب می‌شود که روند کاهش قابلیت اطمینان به‌طور مداوم و مؤثر پیگیری شود، تا زمانی که محدودیت بودجه برابر با حد خود برسد یا هیچ مسیر دیگری از s به t باقی نماند که بتواند قابلیت اطمینان بالاتری داشته باشد. اجازه دهید اکنون مفهوم st-برش را یادآوری کنیم. برای هر زیرمجموعه N از مجموعه رئوس V که شامل رأس s باشد و رأس t را شامل نشود، مجموعه‌ای از یال‌ها که یک سر آن در N و سر دیگر آن در $\overline{N}$ قرار دارد، به‌عنوان یک st –برش شناخته می‌شود و با نماد $C = [N, \overline{N}]$ نمایش داده می‌شود. یال‌های موجود در این st-برش که از N شروع و به $\overline{N}$ ختم می‌شوند، یال‌های پیشرو و یال‌هایی که در جهت عکس قرار دارند، یال‌های پس‌رو نامیده می‌شوند. در این مقاله تنها تمرکز بر نوعی خاص از st –برش‌ها داریم که هیچ یال پس رویی ندارند. این نوع خاص از st –برش‌ها تضمین می‌کنند که هر st- مسیر تنها در یک یال با آن‌ها مشترک است و بنابراین باکم کردن یک مقدار ثابت از قابلیت اطمینان یال‌های این st –برش‌ها می‌توان نتیجه گرفت که همان مقدار از قابلیت اطمینان همه st-مسیرها کاسته شده است.

ظرفیت یک st-برش برحسب یک بردار ظرفیت c، که با نماد $c[N, \overline{N}]$ نمایش داده می‌شود، برابر با مجموع ظرفیت‌های یال‌های پیشرو آن است. به‌این‌ترتیب، ظرفیت برش نشان‌دهنده حداکثر مقدار جریانی است که می‌تواند از رأس s به رأس t منتقل شود.

یک مسئله بهینه‌سازی ترکیباتی شناخته‌شده، یافتن یک st – برش با کمترین ظرفیت است. این مسئله به‌عنوان مسئله کمترین st –برش شناخته می‌شود. یک روش کارا برای به دست آوردن کمترین st –برش استفاده از این حقیقت است که مسئله بیشترین جریان و کمترین برش دوگان یکدیگرند. پس می‌توان با یافتن بیشترین جریان از s به t یک کمترین برش را در شبکه یافت [۱۳]. بهترین الگوریتم شناخته‌شده برای حل مسئله بیشترین جریان دارای پیچیدگی $O(mn)$ است که با استفاده از آن می‌توان مسئله کمترین برش را نیز با همین پیچیدگی زمانی به دست آورد [۳۰]. قابل‌توجه است که حتی با تمرکز بر این st-برش‌های خاص بازهم این روش‌ها را می‌توان برای به دست آوردن کمترین st- برش استفاده کرد. برای این منظور کافی است که یال‌های برگشت را با ظرفیت نامتناهی در نظر بگیریم.

برای بیان الگوریتم ابتدا نیاز است که به تعریف مجموعه یالی جدیدی به نام S بپردازیم. این مجموعه شامل همه یال‌هایی از گراف می‌گردد که روی حداقل یک مسیر با بیشترین قابلیت اطمینان قرار گیرند. البته در طی الگوریتم بردار قابلیت اطمینان تغییر می‌کند و باید به این نکته نیز توجه داشت. طبق قضیه ۱ و نتیجه بیان‌شده از آن، هنگامی‌که یک یال به این مجموعه وارد می‌شود در این مجموعه باقی می‌ماند زیرا یک مسیر بهینه در گام‌های بعدی نیز بهینه باقی می‌ماند. برای یافتن این مجموعه یادآور می‌شویم که یک روش برای محاسبه مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان الگوریتم دیکسترای تغییریافته است که می‌توان

با استفاده از برچسب‌های یالی آن الگوریتم همه یال‌هایی را که بر مسیرهای بهینه هستند را یافت [۳].

جهت کاهش قابلیت اطمینان کلیه مسیرهایی با بیشترین قابلیت اطمینان ، یک بردار وزن w به شکل زیر تعریف‌شده است

$$w_{ij}=\begin{cases}0 & (i,j)\in E\backslash S,\\ b_{ij} & (i,j)\in S\wedge x_{ij}<u_{ij},\\ +\infty & (i,j)\in S\wedge x_{ij}=u_{ij}\end{cases}$$

الگوریتم معرفی‌شده یک st -برش با حداقل ظرفیت، که با نماد C نمایش داده می‌شود را برحسب بردار وزن w پیدا می‌کند. یال‌های موجود در C به‌عنوان نامزدهای بهینه جهت کاهش قابلیت اطمینان کلیه مسیرهایی که بیشترین قابلیت اطمینان و کمترین هزینه رادارند، انتخاب می‌شوند. ظرفیت C نمی‌تواند صفر باشد، زیرا مجموعه S حداقل دارای یک مسیر بهینه است که یال‌های آن دارای وزن‌های مثبت باشند. همچنین، اگر C= $+\infty$ باشد این بدان معناست که یک st-مسیر وجود دارد که در آن $x_{ij}=u_{ij}$ (برای هر $(i,j)\in P$) برقرار است. در این حالت، الگوریتم متوقف می‌شود، زیرا دیگر نمی‌توان قابلیت اطمینان این مسیر را بیش از این کاهش داد.

در حالتی که ظرفیت C مثبت و متناهی باشد، الگوریتم قابلیت اطمینان تمامی یال‌های $C\cap S$ را از $\frac{r_{ij}}{x_{ij}}$ به $\frac{r_{ij}}{x_{ij}\times\Delta}$ برای یک مقدار $\Delta>1$ کاهش می‌دهد. این تغییر منجر به کاهش قابلیت اطمینان تمام‌مسیرها به نسبت Δ می‌گردد. مقدار Δ بر اساس سه مشاهده زیر محاسبه می‌شود:

۱. مقدار Δ باید به ازای هر $(i,j)\in C\cap S$ در نامساوی $x_{ij}\times\Delta\le u_{ij}$ صدق کند.

۲. برای برقراری محدودیت بودجه، Δ باید در نامساوی $\log\Delta\sum_{(i,j)\in C\cap S}b_{ij}\le\log B'$ صدق کند که در آن B' مقدار بودجه باقیمانده از تکرارهای قبلی است.

۳. مقدار Δ باید حداکثر برابر باقابلیت اطمینان دومین مسیر با بیشترین قابلیت اطمینان باشد. در غیر این صورت، حداقل یک یال جدید واجد شرایط اضافه شدن به S می‌شود. بنابراین، لازم است که ابتدا S را برای مقداری کمتر از Δ به‌روز کنیم.

برآورده کردن دو مورد اول به‌سادگی انجام می‌شود، اما مورد سوم چالش‌برانگیز است. رویکرد پیشنهادی این است که ابتدا Δ را بدون توجه به مورد سوم به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\log\Delta=\min\left\{\frac{\log B'}{\sum_{(i,j)\in C\cap S}b_{ij}},\log\frac{u_{ij}}{x_{ij}}\right\}.$$

سپس، قابلیت اطمینان یال‌های $C\cap S$ را به‌اندازه Δ کاهش می‌دهیم و درنهایت، الگوریتم دیکسترای تغییریافته را اجرا می‌کنیم تا مسیری با بیشترین قابلیت اطمینان با توجه به قابلیت اطمینان‌های جدید به دست آوریم. اگر قابلیت اطمینان مسیر جاری بیشتر از $\frac{z}{\Delta}$ باشد، در این صورت قابلیت اطمینان دومین مسیر تکرار قبلی به یک مسیر جدید با بیشترین قابلیت اطمینان تبدیل می‌شود و ما باید Δ را به نسبت بین قابلیت اطمینان مسیر کوتاه جاری و قابلیت اطمینان مسیر قبلی کاهش دهیم. پس از محاسبه Δ، برای هر $(i,j)\in C\cap S$ مقدار $x_{ij}=x_{ij}\times\Delta$ را به‌روز می‌کنیم. در این صورت قابلیت اطمینان هر یال $(i,j)\in C\cap S$ توسط Δ کاهش می‌یابد. رویکرد پیشنهادی در الگوریتم (۱) و دیاگرام آن در شکل (۱) به‌طور رسمی آورده شده است.

الگوریتم ۱– حل مسئله ممانعت از مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان

ورودی: یک گراف $G(V,E)$، قابلیت اطمینان r_{ij}، هزینه‌های یالی b_{ij}، کران‌های بالایی u_{ij} و بودجه B.

خروجی: یک بردار بهینه x_{ij}و مقدار قابلیت اطمینان کاهش‌یافته z.

ابتدا قرار می‌دهیم: $S=\emptyset$ ، $x=0$ و $B'=B$.

اگر $B'>1$:

- مجموعه S را با حل مسئله قابلیت اطمینان به دست آورید و z را به مقدار قابلیت اطمینان بین s و t تنظیم کنید.
- بردار وزن w را محاسبه کنید.
- یک کمترین برش C را برحسب w پیدا کنید.
- اگر $C=+\infty$، متوقف شوید زیرا یک مسیر وجود دارد که قابلیت اطمینان آن قابل کاهش نیست.
- مقدار Δ را با استفاده از رابطه زیر محاسبه کنید:

$$\log\Delta=\min\left\{\frac{\log B'}{\sum_{(i,j)\in C\cap S}b_{ij}},\log\frac{u_{ij}}{x_{ij}}\right\}$$

- یک مسیر با بیشترین قابلیت اطمینان P را با توجه به مقادیر قابلیت اطمینان $\frac{r_{ij}}{\Delta\times x_{ij}}$ پیدا کنید.
- اگر قابلیت اطمینان P بیشتر از $\frac{z}{\Delta}$ باشد، در این صورت Δ را به $\frac{z}{R(P)}$ تنظیم کنید.
- مقدار z را به $\frac{z}{\Delta}$ و بودجه را به $\frac{B'}{\Delta\sum_{(i,j)\in C\cap S}b_{ij}}$ به‌روزرسانی کنید و مقدار بودجه را نیز به روز کنید.
- برای هر (i,j) در $C\cap P$، $x_{ij}=x_{ij}\times\Delta$ را به‌روزرسانی کنید.

این مراحل را تکرار کنید تا الگوریتم خاتمه یابد.

اکنون در قضیه زیر پیچیدگی زمانی این الگوریتم را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۲: الگوریتم ۱ در پیچیدگی بدترین حالت $O(m^2n)$ مسئله ممانعت از مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان را بر گراف‌های جهت‌دار فاقد دور حل می‌کند.

اثبات: با توجه به رویه الگوریتم در هر تکرار یکی از ۳ حالت زیر رخ می‌دهد:

حداقل یک یال جدید به مجموعه S افزوده می‌شود.

حداقل یک یال به کران بالای خود می‌رسد.

مقدار بودجه برابر یک می‌شود.

در حالت آخر که الگوریتم به پایان می‌رسد اما حالات اول و دوم نیز حداکثر $O(m)$ بار تکرار می‌شوند پس تعداد تکرارهای الگوریتم محدود به O(m) است. از طرفی یافتن کمترین st-برش در هر تکرار بیشترین پیچیدگی محاسباتی را دارد که می‌توان آن را در $O(mn)$ انجام داد. بنابراین پیچیدگی الگوریتم برابر $O(mn) \times O(m) = O(m^2 n)$ است.

۶. نتایج محاسباتی

در این بخش، نتایج محاسباتی الگوریتم پیشنهادی را با آزمایش روی نمونه‌های تصادفی تحت شرایط مختلف انجام می‌دهیم.

این مثال بر روی یک لپ‌تاپ ۶۴ بیتی با سیستم‌عامل ویندوز ۱۰ و پردازنده ۷ هسته‌ای (سرعت ۱/۸۰ گیگاهرتز) و ۸ گیگابایت حافظه رم حل‌شده است.

برای پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی، از نسخه ۲.۷.۵ زبان برنامه‌نویسی پایتون استفاده‌شده است. این نسخه شامل دو کتابخانه اصلی به نام‌های مت‌پلات‌لیب ۱.۳.۱ و نتورک‌ایکس ۱.۸.۱ است. نتورک‌ایکس به مدیریت و تحلیل شبکه‌ها می‌پردازد، درحالی‌که مت‌پلات‌لیب وظیفه ترسیم و تجسم داده‌ها را بر عهده دارد. این ترکیب به ما این امکان را می‌دهد که به‌راحتی شبکه‌ها را تحلیل کرده و نتایج را به‌صورت گرافیکی نمایش دهیم.

برای ارزیابی سامانمند الگوریتم، آزمایش‌های گسترده‌ای روی گراف‌های تصادفی انجام می‌شود. این نمونه‌ها با استفاده از تابع *binomial_graph* در کتابخانه نتورک‌ایکس تولیدشده‌اند. با تعیین دو پارامتر تعداد رأس‌ها (n) و احتمال وجود یال(p) ، این تابع یک گراف بدون جهت باnرأس ایجاد می‌کند که در آن بین هر جفت رأس با احتمال p یک یال موجود است. رئوس گراف از شماره ۰ تا $n-1$ شماره‌گذاری می‌شوند و همواره راسی با برچسب صفر را به‌عنوان مبدأ و راسی با برچسب $n-1$ را به‌عنوان مقصد در نظر می‌گیریم. ازآنجاکه گراف حاصل یک گراف بدون جهت است نیاز است که آن را جهت‌دار کنیم. برای این منظور هر یال بدون جهت بین دو راس i و j را از i به j جهت‌دار کرده و با (i,j) نمایش می‌دهیم هرگاه $i < j$ باشد.

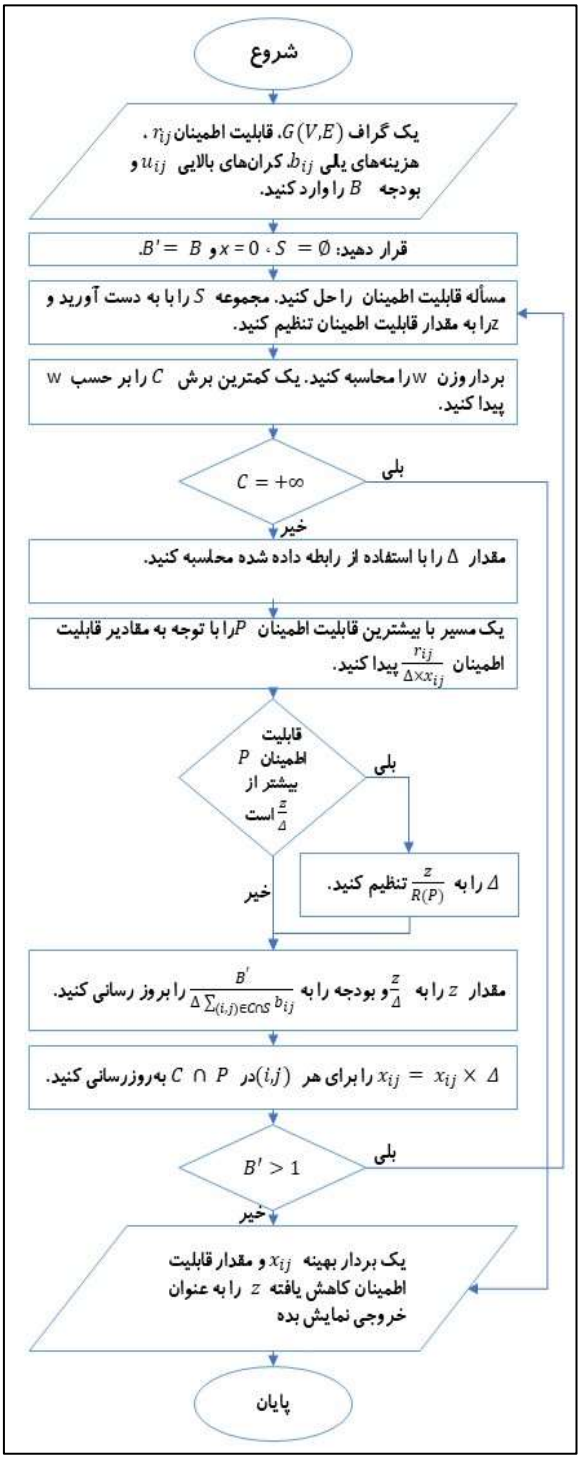
پارامترهای مسئله با توزیع یکنواخت تصادفی به‌صورت زیر تولیدشده‌اند:

$$r_{ij} \sim U(0,1)$$

$$b_{ij} \sim U(1,n)$$

$$u_{ij} \sim U(1,n)$$

$$B \sim U(1,n^2)$$

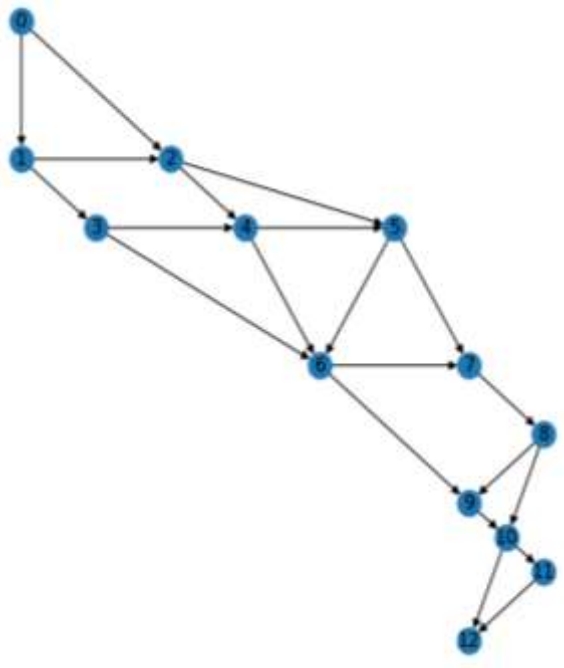


شکل ۱- دیاگرام الگوریتم پیشنهادی.

برای اطمینان از اعتبار آماری نتایج، هر مقدار گزارش‌شده میانگین نتایج حاصل از ده اجرای مستقل روی گراف‌های هم‌اندازه است.

برای حل مسئله قابلیت اطمینان پس از تبدیل مقادیر قابلیت اطمینان به مقادیر لگاریتمی $c_{ij} = -\log r_{ij}$ از الگوریتم دیکسترا و دستور *dijkstra_path* در کتابخانه نتورک‌ایکس استفاده‌شده است و برای محاسبه کمترین برش نیز از دستور در این کتابخانه *minimum_cut* استفاده‌شده است. بقیه مراحل الگوریتم به‌صورت کاملاً ساده کد نویسی شده‌اند. جدول (۱) نتایج محاسباتی حاصل از اجراهای متفاوت را نشان می‌دهد. همین‌طور که از این نتایج پیداست زمان اجرای برنامه حتی به ازای مقادیر بزرگ n و m پایین است.

(الف)



(ب)

شکل ۲- الف- نقشه مسیرهای زمینی بین دو کشور عراق و کویت [۳۱] و [۲۲] **ب**- گراف جهت‌دار حاصل از مسیرهای زمینی بین عراق و کویت.

جدول ۱- نتایج محاسباتی در گراف‌های تصادفی.

فضای اشغال‌شده زمان اجرا (کیلوبایت)	زمان اجرا (ثانیه)	(تعداد m یال‌ها)	(احتمال p وجود یال)	N (تعداد رأس‌ها)
۰/۳۲۱	۰/۰۱۲	۵	۰/۱	۱۰
۰/۴۶۷	۰/۰۱۸	۲۳	۰/۵	۱۰
۰/۵۸۳	۰/۰۶۵	۱۹	۰/۱	۲۰
۰/۶۱۷	۰/۰۸۲	۹۵	۰/۵	۲۰
۰/۷۸۴	۰/۱۲۸	۴۴	۰/۱	۳۰
۰/۹۱۷	۰/۲۳۷	۲۱۸	۰/۵	۳۰
۱/۵۵۲	۰/۲۲۳	۱۲۳	۰/۱	۵۰
۲/۴۸۳	۰/۴۳۱	۶۱۳	۰/۵	۵۰
۵/۱۷۶	۰/۳۰۷	۴۹۵	۰/۱	۱۰۰
۱۰/۲۲۴	۰/۵۶۱	۲۴۷۵	۰/۵	۱۰۰
۱۹/۸۶۷	۲/۹۳۲	۱۹۹۰	۰/۱	۲۰۰
۳۰/۱۲۴	۳/۸۷۶	۹۹۵۰	۰/۵	۲۰۰
۳۵/۴۸۹	۶/۶۵۴	۴۴۸۵	۰/۱	۳۰۰
۴۴/۳۴۴	۹/۷۷۱	۲۲۴۲۵	۰/۵	۳۰۰
۶۰/۱۲۹	۱۲/۹۸۷	۷۹۸۰	۰/۱	۴۰۰
۷۹/۷۵۴	۱۶/۳۲۱	۳۹۹۰۰	۰/۵	۴۰۰
۹۰/۸۸۲	۲۵/۸۹۹	۱۲۴۷۵	۰/۱	۵۰۰
۱۱۹/۶۴۴	۳۵/۵۷۷	۶۲۳۷۵	۰/۵	۵۰۰

۷. مثالی کاربردی

در سال ۱۹۹۰، عراق با استفاده از نیروهای خبره گارد ریاست جمهوری خود، شامل لشکرهای پیاده و سواره، به همراه نیروهای ویژه ارتش، به خاک کشور پادشاهی کویت حمله کرد. این جنگ به مدت محدود و در عرض چند روز به پایان رسید و عراق موفق شد پایتخت و کل کشور کویت را به تصرف خود درآورد.

نیروهای عراقی برای دستیابی به این هدف، از مسیرهای مشخصی که در شکل (۲) قسمت الف نمایش داده‌شده‌اند، استفاده کردند [۳۱]. این مسیرها به‌گونه‌ای طراحی‌شده بودند که مبدأ جابجایی نیروهای عراقی را به سمت نقاط راهبردی کویت تسهیل کنند. اکنون سؤال اساسی اینجاست که با توجه به دانستن تقریبی مسیرهای حرکت و زمان محدودی که برای کویت وجود داشت، چه راهبرد مؤثری می‌توانست به قطع این مسیرها یا حداقل محدود کردن جابجایی نیروهای عراقی کمک کند؟

نیروهای کویتی می‌توانستند برای جلوگیری از نفوذ عراقی‌ها، اقداماتی نظیر حملات هوایی، شلیک موشک، و همچنین به‌کارگیری توپخانه علیه این مسیرها انجام دهند. علاوه بر این، تخریب پل‌ها و سایر زیرساخت‌های کلیدی می‌توانست به قطع مسیرهای تدارکاتی و حرکتی عراقی‌ها منجر شود. همچنین، مستقر کردن نیروهای خود به‌منظور ایجاد تدابیر پدافند و ناامن کردن مسیرهای ممکن از دیگر

راهکارهای نیروهای کویتی بود. این راهبردها به‌عنوان تلاش‌های متقابل برای جلوگیری از رسیدن نیروهای عراقی به نقاط حساس و راهبردی کشور خود عمل می‌کرد.

از سویی دیگر، قبل از آغاز حمله، عراق نیز می‌بایست با اتخاذ تدابیر و استقرار پوشش‌های میدان‌های آتش توپخانه‌ای و هوایی، امنیت مسیرهای عبور نیروهای خود را افزایش می‌داد. در این موقعیت، دو طرف، یعنی نیروهای عراقی و کویتی، با اهداف کاملاً متضاد در میدان جنگ قرار داشتند. نیروهای عراقی در تلاش بودند تا امنیت و استحکامات مسیرهای هجومی خود را تقویت کنند، درحالی‌که نیروهای کویتی به دنبال ناامن کردن و از بین بردن این مسیرها بودند.

در این سناریو، ما شاهد یک بازی راهبردی هستیم که در آن نیروهای عراقی به دنبال دستیابی به قابلیت اطمینان حداکثری در پیمایش نیروهای خود هستند، درحالی‌که کویت، تلاش دارد موانع مؤثری را در برابر جابجایی‌ها و حرکت‌های عراقی‌ها ایجاد کند. شکل (۲) قسمت ب، این مسیرهای حمله را به‌صورت یک گراف جهت‌دار نمایش داده است. این گراف شامل ۱۳ رأس و ۲۱ یال است که مبدأ را رأسی با برچسب ۰ و مقصد را رأسی با برچسب ۱۲ در نظر می‌گیریم.

در این زمینه مسئله ممانعت از مسیریابی با بیشترین قابلیت اطمینان، به‌طور مستقیم بر نقش راهبردی هر دونیروی متخاصم تأثیر می‌گذارد. از یک‌سو، نیروهای عراقی نیاز به تأمین و تضمین مسیرهای عبور خوددارند و از سوی دیگر، نیروهای کویتی همچنین باید با انجام اقدامات هوشمندانه، نقشه‌های عراقی‌ها را مختل کنند تا هر دو طرف به هدف کمال عملکرد خود دست یابند.

به دلیل عدم دسترسی به اطلاعات دقیق، از داده‌های تصادفی برای تصویرسازی مسیرها استفاده می‌شود. این داده‌ها در جدول (۲) برای هر یال نوشته شده‌اند. به‌علاوه در این مثال فرض شده است که مقدار بودجه برابر $B = ۳۲۴۰۰$ است.

این مثال توسط الگوریتم موردنظر درزمانی کمتر از ۰/۱ ثانیه و در چهار تکرار مختلف حل شد که درنهایت الگوریتم با مقدار بودجه ۱ به اتمام رسید. در ادامه به توضیح این تکرارها می‌پردازیم. در ابتدا مسیر

۰ — ۲ — ۴ — ۶ — ۷ — ۸ — ۱۰ — ۱۱ — ۱۲

با مقدار قابلیت اطمینان ۰/۳۱۵ یافت شد که با صرف همه بودجه مقدار قابلیت اطمینان به ۰/۰۳۹۳۸ کاهش یافت یعنی در حدود ۱۰ برابر از قابلیت اطمینان این مسیر و سایر مسیرهای شبکه کاسته شد.

جدول (۳) نتایج حاصل از تکرارهای مختلف را نشان می‌دهد. به همین ترتیب شکل (۳) شبکه‌های حاصل از یال‌هایی که بر مسیرهایی با بیشترین قابلیت اطمینان هستند و همچنین کمترین برش را در هر تکرار نشان می‌دهد. قابل‌توجه است که شبکه حاصل از یال‌های مذکور در تکرارهای اول و دوم ثابت و همچنین در تکرارهای سوم و چهارم نیز ثابت هستند.

جدول ۲- داده‌های مثال عددی ارائه‌شده.

یال	b_{ij}	u_{ij}	r_{ij}
(۰,۱)	۴	۳	۰.۷۹
(۰,۲)	۳	۱	۱
(۱,۲)	۴	۵	۰.۵۷
(۱,۳)	۳	۱	۱
(۲,۵)	۴	۱	۰.۵۴
(۲,۴)	۲	۱	۱
(۳,۴)	۵	۵	۰.۳۴
(۳,۶)	۳	۲	۱
(۴,۶)	۲	۲	۱
(۴,۵)	۵	۴	۰.۹۷
(۵,۶)	۴	۳	۱
(۵,۷)	۵	۳	۱
(۶,۷)	۱	۱	۱
(۶,۹)	۲	۴	۱
(۷,۸)	۵	۵	۰.۴۲
(۸,۹)	۵	۳	۰.۹۲
(۸,۱۰)	۴	۳	۱
(۹,۱۰)	۳	۱	۰.۰۵
(۱۰,۱۱)	۴	۵	۱
(۱۰,۱۲)	۱	۴	۰.۲۹
(۱۱,۱۲)	۲	۲	۰.۷۵

این مثال نشان می‌دهد که تنها با تغییر مقدار قابلیت اطمینان ۴ یال می‌توان مقدار قابلیت اطمینان همه مسیرها را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای تا ده برابر کاهش داد. از طرفی نیروهای عراقی درنهایت یکی از سه مسیر

۰ — ۲ — ۴ — ۶ — ۷ — ۸ — ۱۰ — ۱۱ — ۱۲

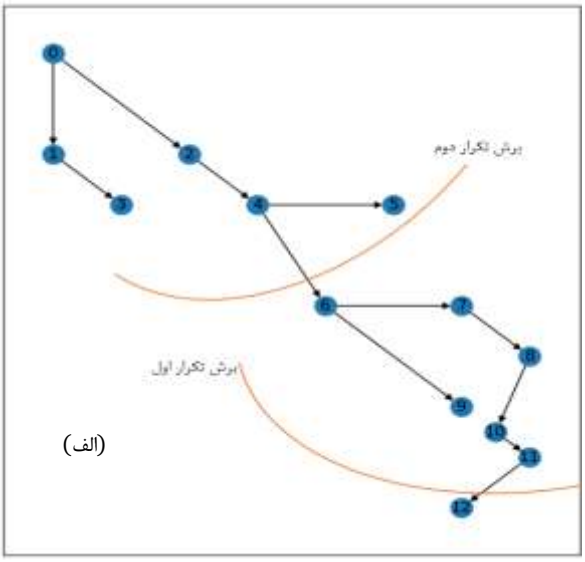
۰ — ۲ — ۴ — ۵ — ۷ — ۸ — ۱۰ — ۱۱ — ۱۲

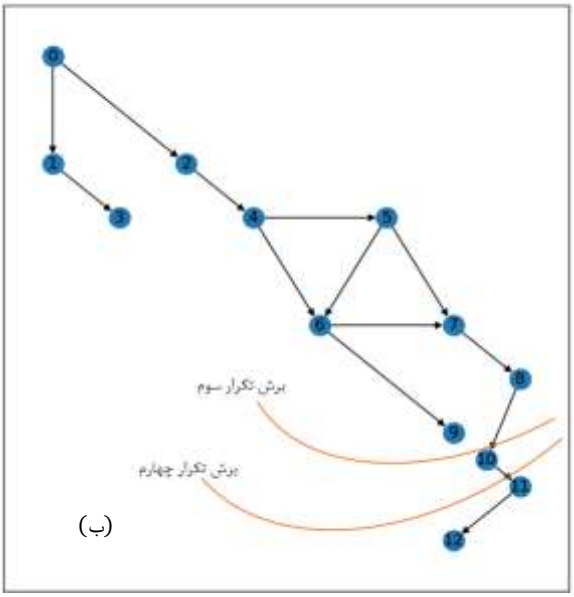
۰ — ۲ — ۴ — ۵ — ۶ — ۷ — ۸ — ۱۰ — ۱۱ — ۱۲

را برای پیشروی انتخاب می‌کنند که مقدار قابلیت اطمینان همه درنهایت برابر ۰/۰۳۹۳۸ است.

جدول۳- مراحل حل مثال عددی

تکرار	مقدار قابلیت اطمینان	مقدار بودجه	تغییرات یالی
۰	۰/۳۱۵	۳۲۴۰۰	–
۱	۰/۱۵۷۵	۸۱۰۰	$x_{۱۱,۱۲} = ۲$
۲	۰/۱۵۲۷۸	۲۰۲۵	$x_{۴,۶} = ۱/۰۳$
۳	۰/۰۵۰۹۲	۲۵	$x_{۸,۱۰} = ۳$
۴	۰/۰۳۹۳۸	۱	$x_{۱۰,۱۱} = \sqrt{۵}$





شکل ۳- الف- شبکه تکرارهای اول و دوم **ب**- شبکه تکرارهای سوم و چهارم.

–			
$x_{۱۱,۱۲} = ۲$			
$x_{۴,۶} = ۱/۰۳$			
$x_{۸,۱۰} = ۳$			
$x_{۱۰,۱۱} = \sqrt{۵}$			

۸. نتیجه‌گیری

این مقاله به بررسی مسئله ممانعت از مسیری با بالاترین قابلیت اطمینان پرداخته است. این مسئله یک نوع بازی سلسه‌مراتبی است که در بسیاری از موارد به آن اشاره شده است [۳۲]. در این مقاله، هدف شناسایی اصول بهینه‌ای است که نیروهای خودی می‌توانند برای تضمین حداکثر قابلیت اطمینان در مسیرهای تعیین‌شده اتخاذ کنند، درحالی‌که دشمن تلاش می‌کند با ایجاد موانع، این قابلیت اطمینان را کاهش دهد. ما یک الگوریتم کارآمد برای حل این مسئله ارائه کرده‌ایم که در زمان چندجمله‌ای قوی عمل می‌کند و می‌تواند به‌طور مؤثر به شناسایی و مدیریت موانع بپردازد. یکی دیگر از روش‌های متداول برای حل این مسئله، استفاده از مفهوم دوگانگی در برنامه‌ریزی خطی است [۱۰] . در این راستا، با مدل‌سازی سطح دوم مسئله به‌صورت یک برنامه‌ریزی خطی، امکان تبدیل آن به مسئله دوگان مرتبط فراهم می‌شود. این روش به ما این امکان را می‌دهد تا چالش ممانعت را به یک مسئله معمولی برنامه‌ریزی خطی تبدیل کنیم که قابلیت حل آن توسط مجموعه متنوعی از حل‌کننده‌ها با الگوریتم‌های بهینه‌سازی متناسب وجود دارد. بااین‌حال، نکته حائز اهمیت در اینجا این است که الگوریتم پیشنهادی ما به‌طور خاص برای داشتن انعطاف‌پذیری بالا طراحی‌شده است. این ویژگی به ما این امکان را می‌دهد که جنبه‌های مختلف و پیچیده‌تر مسئله ممانعت از مسیری با بالاترین قابلیت اطمینان را شناسایی کنیم و درنهایت راهکارهایی مؤثری برای مدیریت موانع و افزایش قابلیت اطمینان مسیرها ارائه دهیم. نتایج این تحقیق نه‌تنها به افزایش عمق دانش ما در حوزه ممانعت کمک خواهد کرد، بلکه می‌تواند منجر به ارتقاء روش‌های تصمیم‌گیری در شرایط واقعی زندگی شود. با توجه به چالش‌های مختلفی که در این زمینه وجود دارد، شناسایی جنبه‌های جدید و طراحی الگوریتم‌های مؤثر اهمیت فراوانی در حل مسائل پیچیده و ارائه راهکارهای بهینه دارد. به‌این‌ترتیب، نتایج این پژوهش می‌تواند ابزاری ارزشمند برای تصمیم‌گیری‌های بهتر و کارآمدتر در مواجهه با مشکلات مختلف باشد.

۹. مرجع‌ها

[۱] Juan, W.; Huapu, L.; Xu, S.; Xianfeng, L.; Huijun, Y. “The Best Path Analysis in Military Highway Transport Based on DEA and Multiobjective Fuzzy Decision-Making”; Math. Prob. Eng. ۲۰۱٤, ۲۰٦۰۲٤. DOI:۱۰.۱۱۵۵/۲۰۱٤/۲۰٦۰۲٤

[۲] Roosta, M. “Routing Through a Network With Maximum Reliability”; J. Math. Anal. Appl. ۱۹۸۲, ۸۸, ۳٤۱-۳٤۷. DOI: ۱۰.۱۰۱٦/۰۰۲۲-۲٤۷X(۸۲)۹۰۱٤٤-۱

[۳] Tragoudas, S. “The Most Reliable Data-Path Transmission”; IEEE Trans. Reliab. ۲۰۰۱, ۵۰, ۲۸۱-۲۸۵. DOI: ۱۰.۱۱۰۹/ ۲٤.۹۳۲۷۲۲

[٤] Sanso, B.; Soumis, F.; Gendreau, M. “On the Evaluation of Telecommunications Network Reliability Using Routing Models”; IEEE Trans. Commun. ۱۹۹۱, ۳۹, ۱٤۹٤-۱۵۰۱. DOI: ۱۰.۱۱۰۹/۲٦.۱۰۳۰٤٤

[۵] Embrechts, P.; Schied, A.; Wang, R. "Robustness in the optimization of risk measures"; Oper. Res., ۲۰۲۲, ۷۰, ۹۵-۱۱۰. DOI: ۱۰.۱۲۸۷/opre.۲۰۲۱.۲۱٤۷

[٦] Bazmi, A. A.; Zahedi, G. “Sustainable Energy Systems: Role of Optimization Modeling Techniques in Power Generation and Supply—A Review”; Renew. Sust. Energy Rev. ۲۰۱۱, ۱۵, ۳٤۸۰-۳۵۰۰. DOI:۱۰.۱۰۱٦/j.rser.۲۰۱۱.۰۵.۰۰۳

[۷] Nikoo, N.; Babaei, M.; Mohaymany, A. S. "Emergency Transportation Network Design Problem: Identification and Evaluation of Disaster Response Routes"; Int. J. Disaster Risk Reduct. ۲۰۱۸, ۲۷, ۷-۲۰. DOI:۱۰.۱۰۱٦/j.ijdrr.۲۰۱۷.۰۷.۰۰۳

[۸] Zolfpour-Arokhlo, M.; Selamat, A.; Hashim, S. Z. M. "Route Planning Model of Multi-Agent System for Supply Chain Management"; Expert Syst. Appl. ۲۰۱۳, ٤۰, ٥, ۱٥۰٥-۱٥۱۸. DOI:۱۰.۱۰۱٦/j.eswa.۲۰۱۲.۰۸.۰٤۰

[۹] Julien, L. A. "Stackelberg Games"; Handbook of Game Theory and Industrial Organization, Volume I, Edward Elgar Publishing, ۲۰۱۸, ۲٦۱-۳۱۱. DOI: ۱۰.٤۳۳۷/۹۷۸۱۷۸٥۳٦۳۲۸۳.۰۰۰۱۷

[۱۰] Smith, J. C.; Song, Y. "A Survey of Network Interdiction Models and Algorithms"; Eur. J. Oper. Res. ۲۰۲۰, ۲۸۳, ۷۹۷-۸۱۱. DOI:۱۰.۱۰۱٦/j.ejor.۲۰۱۹.۰٦.۰۲٤

[۱۱] Boggio Tomasaz, A. "Optimisation and Interdiction Problems for Network Safety"; Springer, ۲۰۲٥. DOI: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۲۸۸-۰۲٥-۰۰٥۸۷-x

[۱۲] Xiang, Y. "Minimizing the Maximal Reliable Path With a Nodal Interdiction Model Considering Resource Sharing"; Reliab. Eng. Syst. Saf. ۲۰۲۳, ۲۳۹, ۱۰۹٤۹٥. DOI:۱۰.۱۰۱٦/j.ress.۲۰۲۳.۱۰۹٤۹٥

[۱۳] Ahuja, R. K.; Magnanti, T. L.; Orlin, J. B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications; Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, ۱۹۹۳.

[۱٤] Tayyebi, J.; Sepasian, A. R. "Partial Inverse Min–Max Spanning Tree Problem"; J. Comb. Optim. ۲۰۲۰, ٤۰, ۱۰۷٥-۱۰۹۱. DOI: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۸۷۸-۰۲۰-۰۰٦٥٦-۳

[۱٥] Tayyebi, J. "On the Inverse Maximum Perfect Matching Problem Under the Bottleneck-Type Hamming Distance"; Commun. Combin. Optim. ۲۰۱۹, ٤, ۳٥-٤٦. DOI: ۱۰.۲۲۰٤۹/cco.۲۰۱۸.۲٦۲۳۱.۱۰۸۷

[۱٦] Tayyebi, J.; Deaconu, A. "Inverse Generalized Maximum Flow Problems"; Mathematics ۲۰۱۹, ۷, ۸۹۹. DOI: ۱۰.۳۳۹۰/math۷۱۰۰۸۹۹

[۱۷] Tayyebi, J.; Mohammadi, A.; Kazemi, S. M. R. "Reverse Maximum Flow Problem Under the Weighted Chebyshev Distance"; RAIRO Oper. Res. ۲۰۱۸, ٥۲, ۱۱۰۷-۱۱۲۱. DOI: ۱۰.۱۰٥۱/ro/۲۰۱۸۰٤٥

[۱۸] Tayyebi, J.; Nguyen, K. T. "Robust Reverse ۱-Center Problems on Trees With Interval Costs"; Optim. Methods Softw. ۲۰۲٤, ۳۹, ۱۳۸۳-۱٤۰٦. DOI: ۱۰.۱۰۸۰/۱۰٥٥٦۷۸۸.۲۰۲٤.۹۱۲۳٤٥

[۱۹] Tayyebi, J.; Sepasian, A. R. "Reverse ۱-Centre Problem on Trees Under Convex Piecewise-Linear Cost Function"; Optimization ۲۰۲۳, ۷۲, ۸٤۳-۸٦۰. DOI: ۱۰.۱۰۸۰/۰۲۳۳۱۹۳٤.۲۰۲۱.۱۹۹٥۷۳۰

[۲۰] Tayyebi, J.; Aman, M. "Efficient Algorithms for the Reverse Shortest Path Problem on Trees Under the Hamming Distance"; YUJOR ۲۰۱۷, ۲۷, ۱, ٤٦-٦۰. DOI: ۱۰.۲۲۹۸/YJOR۱٥۰٦۲٤۰۰۹T

[۲۱] Abdolahzadeh, A.; Aman, M.; Tayyebi, J. "Minimum st-cut interdiction problem"; Comput. Ind. Eng. ۲۰۲۰, ۱٤۸, ۱۰٦۷۰۸, DOI: ۱۰.۱۰۱٦/j.cie.۲۰۲۰.۱۰٦۷۰۸

[۲۲] Abdolahzadeh, A.; Aman, M.; Tayyebi, J. "Communication Line Protection Against Sabotages Using Dynamic Minimum Cut Interdiction"; J. Adv. Defense Sci. Technol. ۲۰۲۱, ۱۲, ۲, ۲۰٥-۲۱٥. DOR: ۲۰.۱۰۰۱.۱.۲٦۷٦۲۹۳٥.۱٤۰۰.۱۲.۲.۷.٥ (in Persian)

[۲۳] Tayyebi, J.; Mitra, A.; Sefair, J. A. "The Continuous Maximum Capacity Path Interdiction Problem"; Eur. J. Oper. Res. ۲۰۲۳, ۳۰٥,۱,۳۸-٥۲. DOI: ۱۰.۱۰۱٦/j.ejor.۲۰۲۲.۰٥.۰۲۸

[۲٤] Tayyebi, J.; Deaconu, A.; Bigdeli, H.; Niksirat, M. "Shortest Path Interdiction Problem With Convex Piecewise-Linear Costs"; Comput. Appl. Math. ۲۰۲۳, ٤۲, ۷, ۳۰۹. DOI: ۱۰.۱۰۰۷/s٤۰۳۱٤-۰۲۳-۰۲٤٤٥-۰

[۲٥] Lozano, L.; Smith, J. C. "A Brief Overview of Interdiction and Robust Optimization"; Optimization in Large Scale Problems: Industry ٤.۰ and Society ٥.۰ Applications, ۲۰۱۹, ۳۳-۳۹. DOI: ۱۰.۱۰۰۷/۹۷۸-۳-۰۳۰-۲۸٥٦٥-٤_۷

[۲٦] Gabrel, V.; Murat, C.; Thiele, A. "Recent Advances in Robust Optimization: An Overview"; Eur. J. Oper. Res. ۲۰۱٤, ۲۳٥, ۳,٤۷۱-٤۸۳. DOI: ۱۰.۱۰۱٦/j.ejor.۲۰۱۳.۰۹.۰۳٦

[۲۷] Mohammadi, A.; Tayyebi, J. "Maximum Capacity Path Interdiction Problem With Fixed Costs"; Asia-Pac. J. Oper. Res. ۲۰۱۹, ۳٦, ۰٤, ۱۹٥۰۰۱۸. DOI: ۱۰.۱۱٤۲/S۰۲۱۷٥۹٥۹۱۹٥۰۰۱۸۰

[۲۸] Towle, E.; Luedtke, J. "New Solution Approaches for the Maximum-Reliability Stochastic Network Interdiction Problem"; Comput. Manag. Sci. ۲۰۱۸, ۱٥, ٤٥٥-٤۷۷. DOI: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۲۸۷-۰۱۸-۰۳۲۱-۱

[۲۹] Bigdeli, H.; Hassanpour, H.; Tayyebi, J. "Optimistic and Pessimistic Solutions of Single and Multi-Objective Matrix Games with Fuzzy Payoffs and Analysis of Some Military Cases"; J. Adv. Defense Sci. Technol. ۲۰۱۷, ۸, ۱۳۳-۱٤٥. DOR: ۲۰.۱۰۰۱.۱.۲٦۷٦۲۹۳٥.۱۳۹٦.۸.۲.٥.٥ (in Persian)

[۳۰] Orlin, J. B. "Max Flows in O(nm) Time, or Better"; Proceedings of the Forty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ۲۰۱۳, ۷٦٥-۷۷٤. DOI: ۱۰.۱۱٤٥/۲٤۸۸٦۰۸.۲٤۸۸۷۰٥

[۳۱] Washburn, A.; Wood, K. "Two-Person Zero-Sum Games for Network Interdiction"; Oper. Res. ۱۹۹٥, ٤۳, ۲٤۳-۲٥۱. DOI: ۱۰.۱۲۸۷/opre.٤۳.۲.۲٤۳

[۳۲] Dehghan, H.; Bigdeli, H. "A Three-level Game Theory Model for Modeling the Defender and Attackers Considering the Deception Strategy Between Them"; J. Adv. Defense Sci. Technol. ۲۰۲۳, ۱٤, ۸۹-۹۹. (in Persian). DOR: ۲۰.۱۰۰۱.۱.۲٦۷٦۲۹۳٥.۱٤۰۲.۱٤.۲.۳.٥