

تعیین دقیق شعاع گردابه‌های نوری تولیدشده توسط توری‌های پراش چنگالی شکل

حسین خلیلی اول^۱، محمدرضا رشیدیان وزیری^{۲*}، هادی رستگار مقدم^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، ۲- دانشیار، ۳- استادیار، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

(دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۰۸، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۷/۱۵، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۲۲، انتشار: ۱۴۰۳/۰۹/۱۱)

چکیده

در سال‌های اخیر، گردابه‌های نوری به‌عنوان باریکه‌هایی با ساختار موج مارپیچی و ویژگی‌های فازی منحصربه‌فرد، توجه گسترده‌ای را در حوزه‌های نوری و فناوری‌های نوین به خود جلب کرده‌اند. در این پژوهش، تولید گردابه‌های نوری از طریق پراش باریکه‌های گاوسی توسط توری‌های چنگالی شکل موردبررسی قرار گرفته و یک مدل تحلیلی دقیق برای استخراج شعاع ناحیه تاریک گردابه ارائه شده است. این مدل بر پایه تحلیل‌های نظری مبتنی بر بسط ژاکوبی-انجر و تبدیل فوریه در تقریب فران هوفر بناشده و به‌طور صریح رابطه کمی بین بار توپولوژیک و شعاع گردابه را استخراج می‌کند. به‌منظور اعتبارسنجی مدل نظری، شبیه‌سازی‌های عددی و آزمایش‌های انجام‌شده با استفاده از لیزر هلیوم-نئون و مدولاتور فضایی نور به‌عنوان شواهد پشتیبان ارائه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی قادر است تغییرات شعاع گردابه را با دقت بالا پیش‌بینی کند. این رویکرد می‌تواند به طراحی بهینه سامانه‌های نوری در حوزه‌هایی مانند میکرو دست‌کاری، ارتباطات نوری و پردازش لیزری کمک کرده و مبنایی برای توسعه مدل‌های پیشرفته‌تر در آینده فراهم آورد.

کلیدواژه‌ها: گردابه‌های نوری، اندازه حرکت زاویه‌ای، توری چنگالی شکل، تبدیل فوریه، شبیه‌سازی عددی.

Precise Determination of Optical Vortex Radius Generated by Fork-Shaped Diffraction Gratings

H. Khalili Avval, M. R. Rashidian Vaziri, H. Rategar Moghaddam,

Ferdowsi University, Mashhad, Iran

(Received: ۲۰۲۴/۰۸/۲۹, Revised: ۲۰۲۴/۱۰/۰۶, Accepted: ۲۰۲۴/۱۱/۱۲, Published: ۲۰۲۴/۱۲/۰۱)

Abstract

In recent years, optical vortices, as beams with a helical wave structure and unique phase characteristics, have attracted significant attention in the fields of optics and emerging technologies. In this study, the generation of optical vortices through the diffraction of Gaussian beams by fork-shaped gratings is investigated, and an accurate analytical model is presented for extracting the radius of the vortex dark region. This model is founded on theoretical analyses employing the Jacobi-Anger expansion and Fourier transform in the Fraunhofer approximation, and explicitly derives a quantitative relationship between the topological charge and the vortex radius. To validate the theoretical model, numerical simulations and experiments carried out using a helium-neon laser and a spatial light modulator to provide the supporting evidence. The results demonstrate that the proposed model can predict variations in the vortex radius with high accuracy. This approach can contribute to the optimal design of optical systems in areas such as optical micromanipulation, optical communications, and laser processing, which can provide a foundation for the development of more advanced models in future research.

Keywords: Optical Vortex, Orbital Angular Momentum, Fork-Shaped Diffraction Grating, Fourier Transform, Numerical Simulation.

*Corresponding Author: rezaeerv@gmail.com
۱۹۸

۱. مقدمه

گردابه‌های نوری، باریکه‌هایی هستند که دارای ساختار موج مارپیچی با تکنیکی فازی مشخص هستند. در مرکز این گردابه‌ها، به دلیل تکنیکی فاز شدت برابر صفر است. به عبارت دیگر، فاز موج در مرکز تعریف نشده است. این ویژگی موجب شکل‌گیری اندازه حرکت زاویه مداری در فوتون‌ها نیز می‌شود. این پدیده به این معناست که هر فوتون در این الگو حامل مقدار معینی اندازه حرکت زاویه مداری بوده و این ویژگی به منظور رمزگذاری اطلاعات، دست‌کاری ذرات میکرونی و کاربردهای متنوعی در ارتباطات نوری و تصویربرداری می‌تواند به کار گرفته شود [۱]. روش‌های گوناگونی تاکنون برای تولید گردابه‌های نوری پیشنهاد شده‌اند، از جمله استفاده از تمام‌نگاشت‌های رایانه‌ای، صفحات فازی مارپیچی و متامواد، که امکان کنترل دقیق ساختار موج و تنظیم خصوصیات نوری باریکه را فراهم می‌آورند [۱]. استفاده از گردابه‌ها علاوه بر افزایش کارایی سیستم‌های نوری، افق‌های جدیدی را در پژوهش‌های تجربی و نظری در زمینه نور شناخت مدرن باز نموده‌اند. به همین دلیل، بررسی دقیق ویژگی‌های گردابه‌های نوری و کاربردهای آن، یکی از موضوعات مهم در تحقیقات نوین نوری و فناوری‌های مرتبط محسوب می‌شود [۲، ۳].

در سال‌های اخیر، تعیین دقیق شعاع گردابه‌ها (یعنی شعاع ناحیه تاریک مرکزی آن‌ها) به یکی از مسائل کلیدی در حوزه اپتیک و فناوری‌های مرتبط تبدیل شده است. از آنجاکه باریکه‌های گردابه‌ای حامل میزان زیادی از انرژی نوری و همچنین اطلاعات مرتبط با اندازه حرکت زاویه‌ای مداری هستند، کنترل و اندازه‌گیری صحیح این ابعاد می‌تواند تأثیر مستقیمی بر کارایی سیستم‌های نوری در حوزه‌های مختلف علمی و صنعتی داشته باشد [۴].

تعیین دقیق شعاع گردابه در کاربردهای مختلف اهمیت ویژه‌ای دارد؛ زیرا ناحیه تاریک مرکزی به عنوان نقطه تثبیت عمل کرده و عمق و شکل پتانسیل نوری را تعیین می‌کند [۱، ۵]. علاوه بر این، اندازه گردابه یک پارامتر تعیین‌کننده در حفظ جداسازی حالت‌های مداری و ارتقای کیفیت انتقال اطلاعات محسوب می‌شود [۶، ۷]. همچنین، در کاربردهای مهندسی لیزر، مانند ساخت و پردازش دقیق سطوح، وجود ناحیه تاریک مرکزی موجب جلوگیری از آسیب ناخواسته و دستیابی به دقت بالاتر در فرایند حفر یا تراش می‌شود [۸]. از سوی دیگر، مطالعات بنیادی در زمینه دینامیک گردابه و انتقال انرژی در سامانه‌های غیرخطی، ابعاد گردابه را به عنوان یک متغیر کلیدی در مدل‌سازی و شبیه‌سازی رفتار گردابه‌ها معرفی نموده و نقش آن را در تبیین پدیده‌های مربوط به انتقال انرژی از مقیاس‌های بزرگ به کوچک برجسته ساخته است [۹].

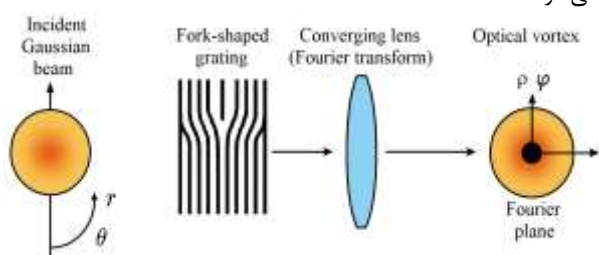
به طور خلاصه، اندازه‌گیری دقیق شعاع گردابه در باریکه‌های پراش‌یافته از تورهای چنگالی شکل از جنبه‌های نظری و عملی، برای بهبود عملکرد سیستم‌های نوری و ارتقای کارایی در حوزه‌های متنوع ضروری است. در نتیجه، مطالعه جامع و دقیق ابعاد گردابه می‌تواند زمینه را برای طراحی بهینه‌تر دستگاه‌ها و سیستم‌های نوین فراهم آورد. در این پژوهش، نوآوری اصلی در ارائه یک مدل تحلیلی دقیق و صریح برای پیش‌بینی شعاع ناحیه تاریک گردابه‌های نوری است که بر پایه بسط ژاکوبی-انجر و تبدیل فوریه در تقریب فران هوفر بنا شده است. شبیه‌سازی‌های عددی و آزمایش‌های تجربی به عنوان ابزارهای اعتبارسنجی مدل نظری به کار گرفته شده‌اند تا نشان دهند پیش‌بینی‌های تحلیلی با نتایج عملی سازگار است.

۲. مدل تحلیلی پیشنهادی

در این بخش، یک باریکه گاوسی تک مد با کمر باریکه‌ای w_0 و دامنه

$$U_i(r, \theta) = A \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \quad (1)$$

در نظر گرفته می‌شود [۱۰]. این باریکه به توری چنگالی شکل تابانده می‌شود که موجب القای اختلاف‌فاز مارپیچی در جبهه‌ی موج نوری آن می‌شود. (r, θ) مختصات دایره‌ای در صفحه‌ی توری است (شکل ۲). توری چنگالی شکل با تابع عبوری $T(r, \theta)$ تعریف می‌شود که دارای بار توپولوژیک صحیح mp است. در حالت $(p=0)$ توری به صورت خطی است و گردابه‌ای ایجاد نمی‌شود.



شکل ۲. طرح‌واره‌ی ایجاد گردابه‌ی نوری بر اثر پراش از توری چنگالی شکل.

پس از عبور باریکه از توری و انتشار آن در فضای آزاد، در ناحیه‌ی دور (فاصله‌ی فران هوفر) الگوی پراش تشکیل می‌شود. در اپتیک، ناحیه‌ی نزدیک (ناحیه فرنل) و ناحیه‌ی دور (ناحیه فران هوفر) بر اساس فاصله‌ی مشاهده‌گر از صفحه‌ی پراش تعریف می‌شوند. به طور تقریبی، اگر فاصله‌ی مشاهده z بسیار بزرگ‌تر از R^2/λ باشد (که در آن R اندازه‌ی مؤثر دهانه و λ طول موج است)، شرایط میدان دور یا ناحیه‌ی فران هوفر برقرار است. در غیر این صورت، میدان در ناحیه‌ی نزدیک یا فرنل قرار دارد. انتشار باریکه در فاصله‌ی دور را می‌توان با استفاده از تبدیل فوریه

$$U_{\pm m}(\rho_{\pm m}, \vartheta) = A t_m \frac{q(0)}{q(f) w_f} \exp(-ikf) \quad (3)$$

که در آن t_m ضریب انتقال (بهره پراشی) برای مرتبه m ام است، w_f شعاع مؤثر باریکه در صفحه‌ی فوریه (وابسته به باریکه ورودی و عدسی مورد استفاده)، و J_ν تابع بسل از مرتبه ν است. با گرفتن قدر مطلق به توان دو از رابطه (۳)، توزیع شدت ناحیه‌ی دور به دست می‌آید:

$$I_{\pm m}(\rho_{\pm m}) \propto \frac{1}{w_f^2} \left\{ J_{\frac{mp-1}{2}}^2\left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w_f^2}\right) + J_{\frac{mp+1}{2}}^2\left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w_f^2}\right) \right\} \quad (4)$$

با تغییر متغیر زیر:

$$\xi \equiv \frac{\rho_{\pm m}^2}{2w_f^2} \quad (5)$$

رابطه (۴) را می‌توان به صورت زیر ساده‌نویسی کرد:

$$I_{\pm m}(\rho_{\pm m}) \propto \frac{1}{w_f^2} F(\xi), \quad (6)$$

$$F(\xi) = J_{\nu_1}'(\xi) + J_{\nu_2}'(\xi)$$

که

$$\nu_1 = \frac{mp-1}{2}, \quad \nu_2 = \frac{mp+1}{2} \quad (7)$$

برای بررسی دقیق‌تر توزیع‌های شدت به مرجع [۴] مراجعه نمایید. در نتیجه پراش، شدت ناحیه‌ی دور دارای یک هسته‌ی تاریک مرکزی (گردابه) و یک حلقه‌ی روشن پیرامونی است که شعاع آن متناسب با مرتبه‌ی پراش و ویژگی‌های توری چنگالی شکل خواهد بود. به منظور یافتن نقطه‌ی بیشینه پروفایل حلقه‌ای (حلقه دونات شکل) که نمایانگر شعاعی است که در آن شدت نوری بیشینه می‌شود، مشتق نسبت به مختصات شعاعی $\rho_{\pm m}$ رابطه (۴) باید محاسبه شود. با توجه به رابطه (۵) داریم:

$$\frac{d\xi}{d\rho_{\pm m}} = \frac{\rho_{\pm m}}{w_f^2} \quad (8)$$

شرط اکس‌تر موم به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dI_{\pm m}}{d\rho_{\pm m}} = \frac{dI_{\pm m}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\rho_{\pm m}} = \frac{1}{w_f^2} \frac{\rho_{\pm m}}{w_f^2} \frac{dF}{d\xi} = 0 \quad (9)$$

برای $\rho_{\pm m} \neq 0$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (10)$$

بنابراین، شرط بیشینه شدن شدت با مشتق‌گیری از تابع $F(\xi)$ نسبت به متغیر شعاعی ξ به دست می‌آید. از آنجایی که

$$F(\xi) = J_{\nu_1}^2(\xi) + J_{\nu_2}^2(\xi) \quad (11)$$

مشتق آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dF}{d\xi} = 2J_{\nu_1}(\xi)J_{\nu_1}'(\xi) + 2J_{\nu_2}(\xi)J_{\nu_2}'(\xi) = 0 \quad (12)$$

رابطه (۱۲) را می‌توان به شکل ساده‌تر زیر نوشت:

$$J_{\nu_1}(\xi)J_{\nu_1}'(\xi) + J_{\nu_2}(\xi)J_{\nu_2}'(\xi) = 0 \quad (13)$$

مدل‌سازی کرد؛ این تبدیل رفتاری مشابه یک عدسی همگرا دارد و امکان تحلیل ساختار میدان را فراهم می‌سازد.

لازم به ذکر است که تمامی روابط تحلیلی ارائه‌شده تحت شرایط تقریب فران هوفر به دست آمده‌اند. در این تحلیل، اندازه‌ی روزنه به صورت $R \sim w_0$ در نظر گرفته شده است تا بیشترین توان باریکه وارد روزنه شود که w_0 کمر باریکه گاوسی ورودی است. همچنین عدسی همگرا با فاصله‌ی کانونی f به عنوان معادل تبدیل فوریه به کار گرفته شده و صفحه‌ی کانونی آن معادل صفحه‌ی فران هوفر در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب، مدل تنها در شرایط میدان دور و برای بارهای توپولوژیک با مقادیر متوسط معتبر است. در مقادیر بسیار بالای بار توپولوژیک یا در حضور ایراهای اپتیکی، دقت مدل کاهش می‌یابد و نیاز به اصلاحات تکمیلی خواهد داشت.

عدسی همگرا عمل تبدیل فوریه از حاصل ضرب $T(r, \theta)U_i(r, \theta)$ را انجام می‌دهد تا تصویر ناحیه‌ی دور (صفحه‌ی فوریه) تشکیل گردد. میدان نوری در صفحه‌ی فوریه به صورت زیر بیان می‌شود [۲]:

$$U(\rho, \vartheta; f) = \frac{1}{C} \int_0^R \int_0^{2\pi} T(r, \theta) U_i(r, \theta) \exp[ikpr \cos(\theta - \vartheta)] r dr d\theta \quad (2)$$

که در آن ρ و ϑ مختصات قطبی در صفحه‌ی فوریه (شکل ۲)، $C = \frac{i}{\lambda f}$ ثابت بهنجارسازی [۳]، و انتگرال‌گیری شعاعی تقریباً بر روی روزنه R انجام می‌شود. پارامتر C یک ثابت بهنجارسازی بدون بعد است که برای تضمین هم‌مقیاس بودن شدت محاسبه‌شده با توان ورودی به کار می‌رود.

با استفاده از بسط ژاکوبی-انجر^۱ [۳، ۴]:

$$e^{ikr \cos(\theta - \vartheta)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im(\theta - \vartheta)}.$$

می‌توان میدان عبوری را به دو بخش تقسیم کرد که در آن J_m تابع بسل از مرتبه‌ی m است. یک باریکه گاوسی مرتبه صفر (بدون بار) و مدهای پراش مرتبه‌های بالاتر که گردابه‌های نوری با بار توپولوژیک برابر با mp که m مرتبه‌ی پراش است ایجاد می‌کنند. با جایگذاری این بسط در انتگرال فوریه و پس از انجام انتگرال‌گیری زاویه‌ای تنها جمله‌هایی باقی می‌مانند که با فاز مارپیچی توری هم‌فاز هستند. این امر منجر به حذف جملات با مرتبه‌های کوچک‌تر و باقی‌مانده جمله غالب متناظر با بار توپولوژیک mp می‌شود. سپس با انتگرال‌گیری شعاعی، دامنه باریکه گردابه مرتبه‌های بالا (به صورت $\pm m$) در صفحه‌ی فوریه به صورت زیر بیان می‌شود:

^۱ Jacobi-Anger expansion

۳. اعتبارسنجی مدل

۳-۱. آزمایش تجربی

برای انجام آزمایش‌ها و تولید گردابه‌های نوری، باریکه‌های گاوسی به تمام‌نگاشت حاصل از چیدمان شکل ۱ تابانده شد. این چیدمان شامل یک لیزر هلیوم-نئون (۵ میلی وات، ۶۳۳ نانومتر، کمر باریکه حدود ۰/۸ میلی‌متر)، یک ویدئو نورافکن که SLM آن استخراج شده بود، دوربین CCD و رایانه برای کنترل SLM، تولید تمام‌نگاشت توری چنگالی شکل و ضبط تصویر تشکیل شده است. SLM استفاده شده از نوع عبوری بوده است.

تصاویر توسط نرم‌افزار متلب به صورت برخط دریافت شده و با فرایندهای پردازش تصویر بهبود می‌یافت. دوربین CCD استفاده شده در این پژوهش از برند Proline UK مدل ۵۷۹ PR بوده و به وسیله یک کارت کپچر ezcac مدل ۱۷۰-EZC به رایانه متصل شده است. رزولوشن تصویر این نوع دوربین TVL۴۲۰ است و با برق شهری (۷ AC۲۲۰) تغذیه می‌شود. خروجی تصویر این نوع دوربین از نوع SDI بوده و به واسطه یک تبدیل به AV تبدیل گردیده و به کارت کپچر متصل می‌شود. در تمام آزمایش‌های، چیدمان ثابت بوده و تنها تمام‌نگاشت بار گزاری شده روی SLM تغییر می‌کند. فاصله بین SLM و دوربین برابر با ۲ متر تنظیم شد تا صفحه فوریه در محل ثبت تصویر قرار گیرد.

برای هر مقدار از بار توپولوژیک، حداقل سه تصویر مستقل از الگوی شدت گردابه نوری ثبت شد. برای حذف نویز و افزایش دقت اندازه‌گیری شعاع گردابه، تصاویر ثبت شده با استفاده از نرم‌افزار متلب پردازش شدند. مراحل پردازش شامل حذف نوفه زمینه با فیلتر میانگین و بهنجارسازی شدت و در ادامه بود. سپس تصاویر با یکدیگر مقایسه و میانگین‌گیری شدند. شعاع گردابه از پروفایل شدت در امتداد محور افقی استخراج گردید؛ به این صورت که موقعیت بیشینه شدت حلقه روشن اطراف ناحیه تاریک مرکزی تعیین و به عنوان شعاع گردابه گزارش شد. بنابراین، مقادیر نهایی ارائه شده در نمودارها و تحلیل‌ها میانگین سه تکرار مستقل هستند. این روش برای کاهش اثر نوفه و افزایش دقت مقایسه بین نتایج تجربی و مدل نظری مورداستفاده قرار گرفته است.

۳-۲. شبیه‌سازی عددی

توری‌های چنگالی شکل به کمک تمام‌نگاری رایانه‌ای و با محاسبه و رسم توزیع شدت نقش‌های تداخلی حاصل از برهم‌نهی یک موج تخت زاویه‌دار شده و امواج گرداب نوری به دست آمده است. مطابق با نظریه تمام‌نگاری [۵]، در صورت ساخت این تمام‌نگاشت، اگر باریکه موج تخت اولیه به تمام‌نگاشت ساخته شده برخورد کند، امواج گرداب نوری بازسازی شده و از آن

با استفاده از رابطه‌ی مشتق استاندارد توابع بسل [۳]:

$$J'_v(\xi) = \frac{1}{2} [J_{v-1}(\xi) - J_{v+1}(\xi)] \quad (14)$$

این رابطه برای $v_1 = \frac{mp-1}{2}$ و $v_2 = \frac{mp+1}{2}$ در رابطه (۱۳) جایگزین می‌شود. پس از ساده‌سازی و حذف جملات میانی، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$J_{\frac{mp-1}{2}}(\xi) J_{\frac{mp-3}{2}}(\xi) = J_{\frac{mp+1}{2}}(\xi) J_{\frac{mp+3}{2}}(\xi) \quad (15)$$

این رابطه به ازای ξ ، مقدار بهینه ξ_{opt} را تعیین می‌کند که در آن شدت نوری به بیشینه می‌رسد. با به کارگیری روابط بازگشتی $\frac{2v}{\xi} J_v(\xi) = J_{v-1}(\xi) + J_{v+1}(\xi)$

و تقریب معتبر زیر در ناحیه‌ی پراش فران هوفر، یعنی برای $\xi \gg 1$:

$$J_v(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

به دست می‌آید:

$$\xi_{opt} = \frac{mp(mp+1)}{mp+2} \quad (16)$$

با توجه به تعریف رابطه (۵) داریم:

$$\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w_f^2} = \frac{mp(mp+1)}{mp+2} \quad (17)$$

که حل آن برای $\rho_{\pm m}$ منجر می‌شود به:

$$\rho_{\pm m} = w_f \sqrt{\frac{2mp(mp+1)}{mp+2}} \quad (18)$$

رابطه (۱۸) رابطه‌ی کمی میان مرتبه‌ی پراش m و بار توری چنگالی شکل p و همچنین شعاع مشاهده‌شده‌ی حلقه‌ی روشن (گردابه) در صفحه‌ی فوریه برقرار می‌کند. این رابطه، نتیجه مستقیم مدل تحلیلی ارائه شده در این پژوهش است و مبنای اصلی تحلیل‌ها را تشکیل می‌دهد. برای پراش مرتبه اول $m=1$ و بار $p=2$ ، می‌توان به مقدار ρ_1 رسید که نشان‌دهنده نحوه به کارگیری عددی روابط تحلیلی به دست آمده است:

$$\rho_1 = w_f \sqrt{\frac{(2 \times 1 \times 2)(1 \times 2 + 1)}{(1 \times 2 + 2)}} = w_f \sqrt{3}$$

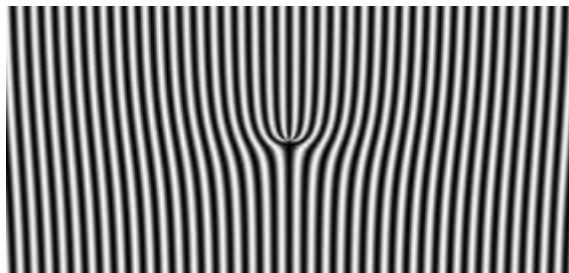


شکل ۱. چیدمان آزمایش متشکل از لیزر He-Ne و ویدئو نورافکن و دوربین CCD بر روی ریل و پایه‌های قابل تنظیم به همراه رایانه برای کنترل SLM و ضبط تصویر.

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، در استفاده از توری‌های چنگالی شکل برای تولید گردابه‌های نوری، نور فرودی به توری پراشیده می‌شود و در عمل توری چنگالی به‌عنوان عنصر نوری پراش رفتار می‌کند. گردابه‌های نوری نیز در اثر پراش تشکیل شده و در فاصله فران هوفر قابل مشاهده می‌شوند. بنابراین در شبیه‌سازی تولید گردابه‌های نوری، پراش فران هوفر باریکه فرودی از توری پراش چنگالی شکل رخ می‌دهد. محاسبه ریاضی این فرآیند از طریق ضرب تابع موج گاوسی در تابع توری چنگالی شکل، رابطه (۲۶)، و انجام تبدیل فوریه بر روی این حاصل ضرب صورت می‌پذیرد [۷، ۸]:

$$I = F(\psi_1 \times H) \quad (27)$$

که I نشان‌دهنده شدت در صفحه مشاهده است و ψ_1 جبهه موج مربوط به باریکه گاوسی است. H نیز تابع توری است که در رابطه (۲۶) تعریف شده است. برای پیاده‌سازی این فرآیند در شبیه‌سازی از الگوریتم تبدیل فوریه سریع FFT در محیط متلب استفاده شده است [۹]. در این پژوهش، شبیه‌سازی‌ها برای ایجاد الگوهای ورودی موردنیاز در اعتبارسنجی مدل تحلیلی استفاده شده است و هدف آن، بازتولید شرایط نظری در محیط عددی برای مقایسه با پیش‌بینی‌های تحلیلی است.



شکل ۳. توری پراش چنگالی شکل با بار توپولوژیک برابر با ۴. تعداد شاخه‌های چنگال شکل گرفته، همانند بزرگی بار توپولوژیک برابر با ۴ است.

۴. نتایج و بحث

در ابتدای آزمایش‌ها، با بار گزاری تمام‌نگاشت توری‌های چنگالی شکل و تغییر تعداد شاخه‌ها بر روی SLM، گردابه‌های نوری با بار توپولوژیک متفاوت تولید شد. همان‌گونه که انتظار می‌رود، پس از پراش، باریکه‌های اضافی تولید می‌شوند که ناشی از مراتب مختلف پراش هستند. پراش مرتبه صفرم، باریکه گاوسی است و باریکه موردنظر برای تحلیل، باریکه تولیدشده در پراش مرتبه اول است که مبنای مقایسه با مدل نظری قرار گرفته است. این انتخاب به دلیل آن است که در مرتبه اول، فاز مارپیچی به‌طور کامل به باریکه منتقل شده و ساختار گردابه‌ای خالص‌تری نسبت به مراتب بالاتر صورت می‌گیرد [۱۰]. با تغییر بار توپولوژیک در این باریکه‌ها که متناسب با تعداد شاخه‌های توری چنگالی شکل است، توزیع شدت ظاهری آن‌ها نیز تغییر می‌کند (شکل ۴). این تغییر ناشی از افزایش پیچش جبهه موج و افزایش گشتاور

خارج خواهند شد. شکل کلی موج تخت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$E_1 = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (19)$$

که در آن $\vec{k}$ بردار موج است. این موج تخت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E_1 = e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (20)$$

موج دوم یک گردابه نوری است که می‌توان آن را به صورت ساده زیر نوشت:

$$E_2(r, \theta, z) = E \cdot e^{ip\theta} e^{-ik_z z} \quad (21)$$

که در آن p بیانگر بار توپولوژیک گردابه نوری است.

برهم‌نهی و تداخل این دو جبهه موج را می‌توان به صورت ریاضی زیر بیان کرد:

$$H = |E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1 E_2^* + E_1^* E_2 \quad (22)$$

با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۱) می‌توان این رابطه را به صورت زیر نوشت:

$$H = 1 + |E_0|^2 + 2|E_0| \cos(k_x x + k_y y - p\theta) \quad (23)$$

مؤلفه بردار موج در راستاهای x و y را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$k_x = \frac{2\pi}{\Lambda_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{\Lambda_y} \quad (24)$$

که Λ_x و Λ_y به ترتیب فاصله بین خطوط طرح تداخلی (دوره تناوب فضایی طرح) در راستاهای x و y هستند. با در نظر گرفتن این رابطه و استفاده از رابطه $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ می‌توان رابطه (۲۳) را به صورت زیر تبدیل کرد:

$$H = 1 + |E_0|^2 + 2|E_0| \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_x} r \cos \theta + \frac{2\pi}{\Lambda_y} r \sin \theta - p\theta\right) \quad (25)$$

رابطه (۲۵) نشان‌دهنده یک تمام‌نگاشت دامنه‌ای است. جمله تداخلی کسینوسی شکل‌دهنده طرح نوارهای تداخلی است و می‌توان از جملات و ضرایب ثابت آن صرف‌نظر کرد تا به صورت ساده‌تر زیر تبدیل شود [۶]:

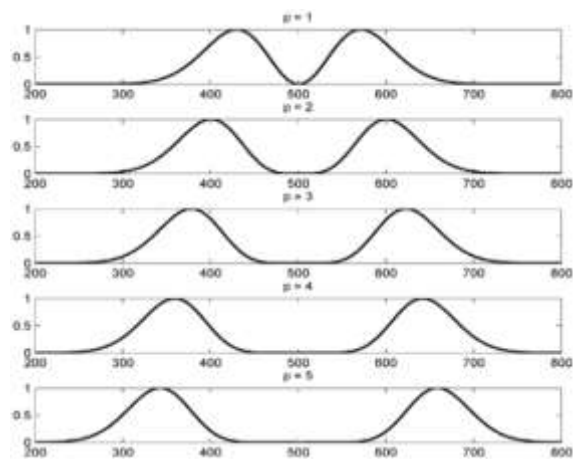
$$H = \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_x} r \cos \theta + \frac{2\pi}{\Lambda_y} r \sin \theta - p\theta\right) \quad (26)$$

رابطه (۲۶) برای ساخت تمام‌نگاشت‌های رایانه‌ای در این کار مورد استفاده قرار گرفته است. بار یا مرتبه مد لاگر-گاوسی تولیدی توسط تمام‌نگاشت با استفاده از مقدار عدد صحیح l تعیین می‌شود. شکل (۳) یک توری پراش چنگالی شکل با بار توپولوژیک $p=4$ را نشان می‌دهد که با محاسبه و ترسیم رابطه (۲۶) در راستای افقی در محیط متلب به‌دست آمده است. همان‌طور که در شکل مشخص است، تعداد شاخه‌های چنگال برابر است با مقدار بار توپولوژیک.

$p=10$ استفاده شد. فاصله نقاط یک واحد در مقدار p بوده است. برازش داده‌ها در همین بازه انجام شد و مقدار R^2 برابر با ۰/۹۷۱۵ به دست آمده آمد. علاوه بر این، مقدار ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) برابر با ۰/۰۴۲ و مقدار χ^2 به هنجار شده برابر با ۱/۱۳ محاسبه شد که نشان‌دهنده‌ی همخوانی مناسب بین پیش‌بینی مدل تحلیلی و نتایج شبیه‌سازی است.

p	تمام‌نگاشت توری	پراش مرتبه صفر و ± 1	پراش مرتبه اول جدا شده	شبیه‌سازی پراش مرتبه اول
۱				
۲				
۳				
۴				
۵				
۶				
۷				

شکل ۴. تمام‌نگاشت توری و باریکه‌های گرداب نوری تولید شده با بار توپولوژیک ۱ تا ۷ به همراه شبیه‌سازی انجام شده در محیط متلب.



شکل ۵. تغییرات توزیع شدت گردابه‌های نوری در امتداد محور افقی با افزایش بار توپولوژیک.

زاویه‌ای مداری فوتون‌ها است که به‌طور مستقیم در شکل‌گیری حلقه‌های روشن و تاریک مشاهده می‌شود [۱۱].

همان‌گونه که مدل نظری پیش‌بینی می‌کند، با افزایش بار توپولوژیک، قطر ناحیه تاریک (قطر گردابه) افزایش می‌یابد. به دلیل محدودیت‌های دوربین CCD و اشباع در شدت‌های بالا، تعیین دقیق شعاع از داده‌های خام دوربین ممکن نبود؛ بنابراین، مقایسه کمی با استفاده از خروجی مدل نظری و الگوهای شبیه‌سازی شده انجام شد تا همخوانی شکل و روند تغییرات بررسی شود. در شکل (۵)، توزیع شدت باریکه گردابی حاصل از پراش مرتبه اول (تصاویر ستون آخر در شکل ۴) در امتداد محور افقی برای مقادیر مختلف بار توپولوژیک نشان داده شده است. در این شکل، مقدار بار توپولوژیک (p) از بالا به پایین از ۱ تا ۵ افزایش یافته است. واحد محورهای افقی و عمودی، به ترتیب موقعیت پیکسلی و شدت نور به هنجار شده هستند. لازم به ذکر است که مقیاس پیکسلی با استفاده از ضریب کالیبراسیون دوربین قابل تبدیل به واحدهای فیزیکی (مانند میکرون) است. مقایسه‌ی بین داده‌های شبیه‌سازی با منحنی نظری نشان می‌دهد که اختلاف ناچیز بوده و حتی در مقادیر بالاتر بار توپولوژیک نیز در محدوده‌ی قابل قبول باقی می‌ماند. از دیدگاه فیزیکی، این همخوانی بیانگر آن است که مدل تحلیلی توانسته است وابستگی شعاع گردابه به بار توپولوژیک را به‌درستی پیش‌بینی کند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار بار توپولوژیک، قطر گردابه افزایش می‌یابد، به‌طوری‌که ناحیه‌ی تاریک مرکزی بزرگ‌تر شده و حلقه‌ی روشن اطراف آن گسترش می‌یابد. این پدیده از دیدگاه فیزیکی به این دلیل رخ می‌دهد که افزایش بار توپولوژیک معادل افزایش تعداد گره‌های فازی در جبهه موج است [۱۱]. در نتیجه، فاز نوری تغییرات سریع‌تری در اطراف مرکز باریکه دارد و این امر موجب گسترش ناحیه تاریک مرکزی می‌شود. به بیان دیگر، افزایش p باعث افزایش شعاع مد حلقوی باریکه لاگر-گاوسی متناظر می‌شود [۱۲]. این رفتار با روابط تحلیلی مدهای لاگر-گاوسی و رابطه (۱۸) نیز سازگار است که در آن شعاع بیشینه شدت تقریباً با $\sqrt{p}$ مقیاس می‌شود. این نتایج بیانگر آن است که بار توپولوژیک نقش تعیین‌کننده‌ای در شکل‌گیری و گسترش الگوی شدت دارد و می‌تواند به‌عنوان پارامتری کلیدی در طراحی و کنترل باریکه‌های گردابی مورد استفاده قرار گیرد.

برای اعتبارسنجی مدل تحلیلی، شعاع گردابه‌ها از نتایج شبیه‌سازی و با مشخص کردن نقطه بیشینه شدت به دست آمده و با نتایج حاصل از رابطه نظری (۱۸) مقایسه شده است. در شکل (۶)، نقاط داده حاصل از شبیه‌سازی و منحنی حاصل از رابطه نظری نشان داده شده‌اند. برای مقایسه بین مدل تحلیلی و داده‌های شبیه‌سازی، از ۱۰ نقطه داده (هریک حاصل از میانگین به دست آمده از سه شبیه‌سازی) در بازه‌ی بار توپولوژیک $p=1$ تا

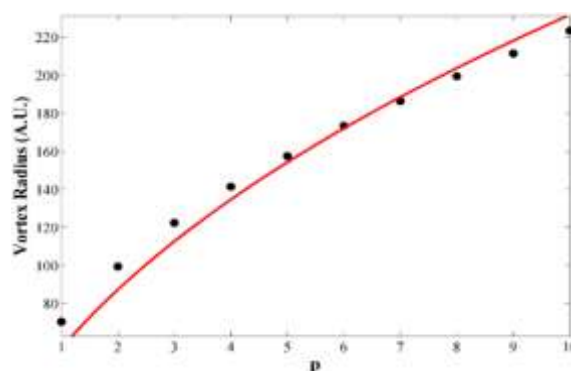
افزایش بار توپولوژیک، شعاع گردابه به صورت منظم و قابل پیش‌بینی افزایش می‌یابد و مدل نظری ارائه شده توانسته است این روند را با دقت بالا بازتولید کند ($R_0 = 0.9715$). این همخوانی نزدیک، علاوه بر تأیید اعتبار مدل، نشان می‌دهد که رابطه نظری پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک ابزار طراحی و پیش‌بینی در سیستم‌های نوری مورد استفاده قرار گیرد.

جدول ۱. نمادهای مورد استفاده در این مقاله.

نماد	توضیح / تعریف	واحد یا توضیح تکمیلی
m	مرتبه پراش	عدد صحیح مثبت یا منفی
p	بار توپولوژیک توری چنگالی	عدد صحیح مثبت
mp	حاصل ضرب مرتبه پراش و بار توپولوژیک	تعیین کننده بار گردابه خروجی
w	کمر باریکه گاوسی ورودی	متر
f	فاصله کانونی عدسی همگرا	متر
v	اندیس مرتبه تابع بسل در بسط ژاکوبی-انجر	بدون بعد
ζ	متغیر نرمال شده شعاعی	بدون بعد
$J_v(\cdot)$	تابع بسل مرتبه v	بدون بعد؛ تابع ویژه ریاضی
$U(r, \theta)$	دامنه میدان نوری در مختصات قطبی	کمیت مختلط
$I(r)$	شدت نوری	وات بر مترمربع
C	ثابت بهنجارسازی	بدون بعد
R	شعاع مؤثر روزنه یا دهانه اپتیکی	متر
λ	طول موج نور ورودی	متر
Λ_x و Λ_y	دوره تناوب توری در راستاهای x و y	بدون بعد
H	تابع توری چنگالی شکل	بدون بعد

۶. مرجع‌ها

- [۱] Shen, Y.; Wang, X.; Xie, Z.; Min, C.; Fu, X.; Liu, Q.; Gong, M.; Yuan, X. "Optical Vortices ۲۰ Years on: OAM Manipulation from Topological Charge to Multiple Singularities"; Light Sci. Appl. ۲۰۱۹, ۸, ۹۰. DOI: ۱۰.۱۰۳۸/s4۱۳۷۷-۰۱۹-۰۱۹۴-۲.
- [۲] Rashidian Vaziri, M. R. "Comment on 'Nonlinear Refraction Measurements of Materials Using the Moiré Deflectometry'"; Opt. Commun. ۲۰۱۵, ۳۵۷, ۲۰۰-۲۰۱. DOI: ۱۰.۱۰۱۶/j.optcom.۲۰۱۴.۰۹.۰۱۷.
- [۳] Born, M.; Wolf, E. "Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light"; Elsevier, ۲۰۱۳, DOI: ۱۰.۱۰۶۳/۱.۱۳۲۵۲۰۰.
- [۴] Stoyanov, L.; Topuzoski, S.; Stefanov, I.; Janicijevic, L.; Dreischuh, A. "Far Field Diffraction of an Optical Vortex Beam by a Fork-Shaped Grating"; Opt. Commun. ۲۰۱۵, ۳۵۰, ۳۰۱-۳۰۸. DOI: ۱۰.۱۰۱۶/j.optcom.۲۰۱۵.۰۴.۰۲۰.
- [۵] Rashidian Vaziri, M. R. "Measuring the Absorbed Dose of Electron Radiation in Water Phantom Using Digital Holography Technique with a Laser Beam"; J. Adv. Def. Sci.



شکل ۶. تغییرات شعاع گردابه بر حسب مقدار بار توپولوژیک p (نقاط داده‌ی سیاه‌رنگ: مقادیر حاصل از شبیه‌سازی).

مطابق با یک گزارش [۱۳]، در باریکه‌های گردابی کامل^۱، کنترل تجربی شعاع حلقه از طریق طراحی اپتیکی ویژه (مانند تبدیل فوریه‌ی مدهای لاگر-گاوسی با شاخص شعاعی بالا) امکان‌پذیر است. اما این روش کنترل مستلزم اجزای اپتیکی خاص و شرایط آزمایشگاهی پیچیده است. مدل تحلیلی حاضر ضمن ارائه رابطه‌ای صریح برای شعاع حلقه، برای سامانه‌های استاندارد توری چنگالی طراحی شده و از این نظر ساده‌تر و سریع‌تر قابل پیاده‌سازی است. همچنین در مقایسه با نتایج ارائه شده توسط استویانف و همکاران [۴] که تمرکز اصلی آن‌ها بر تأیید قانون تبدیل بار توپولوژیک و گزارش روند تغییرات شعاع به صورت نسبی و نرمال بوده و عمدتاً از تحلیل‌های عددی و مقایسه‌های کیفی استفاده کرده‌اند، مدل حاضر یک رابطه‌ی کمی و صریح برای شعاع گردابه ارائه می‌دهد. بنابراین، مزیت اصلی مدل پیشنهادی در سادگی محاسبات، سرعت استخراج شعاع، و دقت مناسب در دامنه میدان دور و بارهای توپولوژیک متوسط است. با این حال، در بارهای بسیار بالا یا در حضور ابیراهی‌های اپتیکی نیاز به اصلاحات تکمیلی خواهد بود. این یافته‌ها در کنار نتایج موجود در مطالعات پیشین [۱۴-۱۶]، تأکید بر نقش حیاتی بار توپولوژیک در تشکیل الگوهای نوری گردابه‌ای دارد. از سوی دیگر، با وجود همخوانی مناسب نتایج شبیه‌سازی با مدل نظری، پژوهش حاضر محدودیت‌هایی همچون نیاز به آزمایش‌های بیش‌تر با استفاده از تجهیزات دقیق‌تر و بررسی تأثیر پارامترهای دیگری مانند طول موج و شرایط نوری را نیز نشان می‌دهد.

۵. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، نوآوری اصلی در ارائه یک مدل تحلیلی دقیق و صریح برای پیش‌بینی شعاع ناحیه تاریک گردابه‌های نوری تولیدشده توسط توری‌های چنگالی شکل است. این مدل بر پایه بسط ژاکوبی-انجر و تبدیل فوریه در تقریب فران هوفر بنا شده و رابطه کمی بین بار توپولوژیک و شعاع گردابه را استخراج می‌کند. شبیه‌سازی‌های عددی و آزمایش‌های تجربی صرفاً برای اعتبارسنجی این مدل نظری به کار گرفته شده‌اند و نقش آن‌ها، تأیید صحت پیش‌بینی‌های تحلیلی است. نتایج نشان داد که با

^۱ Perfect Vortex

- [۱۱] Allen, L.; Beijersbergen, M. W.; Spreeuw, R.; Woerdman, J. "Orbital Angular Momentum of Light and the Transformation of Laguerre-Gaussian Laser Modes"; *Phys. Rev. A* ۱۹۹۲, ۴۵, ۸۱۸۵. DOI: ۱۰.۱۱۰۳/PhysRevA.۴۵.۸۱۸۵.
- [۱۲] Molina-Terriza, G.; Torres, J. P.; Torner, L. "Twisted Photons"; *Nat. Phys.* ۲۰۰۷, ۳, ۲۰۵-۳۱۰. DOI: ۱۰.۱۰۳۸/nphys۶۰۷.
- [۱۳] Guo, Z.; Chang, Z.; Meng, J.; An, M.; Jia, J.; Zhao, Z.; Wang, X.; Zhang, P. "Generation of Perfect Optical Vortex by Laguerre-Gauss Beams with a High-Order Radial Index"; *Appl. Opt.* ۲۰۲۲, ۶۱, ۵۲۶۹-۵۲۷۳. DOI: ۱۰.۱۳۶۴/AO.۴۶۱۲۵۱.
- [۱۴] Mimeau, C.; Mortazavi, I. "A Review of Vortex Methods and their Applications: From Creation to Recent Advances"; *Fluids* ۲۰۲۱, ۶, ۶۸. DOI: ۱۰.۳۳۹۰/fluids۶۰۲۰۰۶۸.
- [۱۵] Vaity, P.; Rusch, L. "Perfect Vortex Beam: Fourier Transformation of a Bessel Beam"; *Opt. Lett.* ۲۰۱۵, ۴۰, ۵۹۷-۶۰۰. DOI: ۱۰.۱۳۶۴/OL.۴۰.۰۰۰۵۹۷.
- [۱۶] Khalili Avval, H.; Rashidian Vaziri, M. R.; Rastegar Moghaddam, H. "Spinning Multiplexed Laguerre-Gaussian Beams"; *Opt. Quantum Electron.* ۲۰۲۵, ۵۷, ۱۸۹. DOI: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۱۰۸۲-۰۲۵-۰۸۱۱۹-X.
- Technol. ۲۰۱۸, ۹, ۴۷۷-۴۸۵. DOR: ۱۰.۱۱۴۰/epjp/s۱۳۳۶۰۰۰۲۰۰۰۰۴۴۳-۳.
- [۶] M. R. R. Vaziri, A. Hosseini, E. G. Hatam, and R. A. Sorodi, "A Simple Method to Prepare and Characterize Optical Fork-Shaped Diffraction Gratings for Generation of Orbital Angular Momentum Beams"; *J. Opt.*, pp. ۱-۱۰, ۲۰۲۴. DOI: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۲۵۹۶-۰۲۴-۰۲۱۵۴-۹
- [۷] Bouchal, Z. "Composition of the Angular Spectrum of the Pseudo-Nondiffracting Beams"; *Opt. Commun.* ۲۰۰۱, ۱۹۷, ۲۳-۳۵. DOI: ۱۰.۱۰۱۶/S۰۰۳۰-۴۰۱۸(۰۱)۰۱۴۱۵-۸
- [۸] Siviloglou, G. A.; Broky, J.; Dogariu, A.; Christodoulides, D. "Observation of Accelerating Airy Beams"; *Phys. Rev. Lett.* ۲۰۰۷, ۹۹, ۲۱۳۹۰۱. DOI: ۱۰.۱۱۰۳/PhysRevLett.۹۹.۲۱۳۹۰۱.
- [۹] Nosratpour, A.; Heydarian, K. "Simulation and Analysis of the All-Optical NOT Logic Gate by XPM Mechanism Using Mach-Zehnder Interferometer Based on Photonic Crystal Semiconductor Optical Amplifier"; *Appl. Electromagn.* ۲۰۲۳, ۱۱, ۵۷-۶۷. DOI: ۱۰.۳۰۵۰۳/jcs.۲۰۲۳.۴۰۸۶۳.
- [۱۰] Vasnetsov, M.; Pas'ko, V.; Soskin, M. "Analysis of Orbital Angular Momentum of a Misaligned Optical Beam"; *New J. Phys.* ۲۰۰۵, ۷, ۴۶. DOI: ۱۰.۱۰۸۸/۱۳۶۷-۲۶۳۰/۷/۱/۴۶.