

طراحی مستقیم کانال‌های سه‌بعدی با استفاده از معادلات اویلر

محمد طیبی رهنی^۳

دانشکده مهندسی هوافضا
دانشگاه صنعتی شریف

فرهاد قدک^۲

دانشگاه جامع امام حسین (ع)

اشکان نجاتی^۱

دانشکده مهندسی هوافضا
دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت: ۹۲/۰۸/۰۶؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۱۱/۲۸)

چکیده

در این مقاله از روش طراحی مستقیم برای طراحی مرزهای جریان که به آن مسئله طراحی معکوس می‌گویند، استفاده شده است. در این روش توزیع فشار مطلوب روی دیواره‌ها و همچنین مختصات هندسی گره‌های مرزی (مجهول) به طور صریح در معادلات آورده شده است. فرم نهایی معادلات مجزاسازی شده می‌تواند برای حل معادلات آنالیز و همچنین معادلات طراحی مورد استفاده قرار گیرد. معادلات طراحی بر اساس معادلات اویلر سه بعدی (جریان تراکم‌پذیر غیرلزج) حل شده، به گونه‌ای که فرم به دست آمده شامل توزیع فشار مطلوب روی دیواره‌ها می‌باشد. از روش عددی AUSM+ که یکی از انواع روش‌های تجزیه بردار شار می‌باشد، به صورت ضمنی برای حل معادلات اویلر استفاده شده است. در این روش بردار شار به دو ترم جابه‌جایی و فشاری تقسیم شده و سپس برای هر کدام از این ترم‌ها به صورت جداگانه عمل می‌شود. در این مقاله برای طراحی مجراهای سه بعدی از دو مدل تقریباً متفاوت استفاده شده است. از جمله کاربردهای این مجراها، نازل‌های همگرا - واگرا در تونل باد و همچنین دیفیوزرهای S - شکل در ورودی موتورهای هواپیما می‌باشد. صحت عملکرد روش طراحی مستقیم ارائه شده و همچنین موارد طراحی شده با استفاده از این روش، نشان می‌دهد که این روش استحکام خوبی داشته و در مقابل ناپیوستگی‌های جریان مانند شوک پایدار می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: مسئله طراحی معکوس، طراحی مستقیم، معادلات اویلر سه‌بعدی، روش AUSM+

Direct Design of 3-D Ducts, Using the Euler Equations

A. Nejati

Aerospace Engineering Department
Sharif University of Technology

F. Ghadak

Imam Hossein University

M. Taiebi-Rahani

Aerospace Engineering Department
Sharif University of Technology

(Received: 28 October, 2013 ; Accepted: 17 February, 2014)

ABSTRACT

In this work, a direct design approach for designing a surface shape (inverse design problem) has been developed, in which both the target surface pressure and the unknown nodal coordinates appear explicitly in the formulations. The final discretized form of the governing equations (unified formulation) can be used for both analysis and shape design problems. In this work, shape design problems in the context of steady, in viscid, and compressible flow, based on the three-dimensional Euler equations, were directly solved to achieve a prescribed pressure along solid boundaries. The AUSM+ scheme, in which the in viscid flux is split into convective and pressure components, was used to discretize the flux terms in the Euler equations. Conversion of the AUSM+ formulations into a novel implicit form was performed in this study. The approaches for robustness, especially in the cases where there exist shock waves in the flow, were validated. Two different models for the design of three-dimensional ducts were used and both of them worked properly. Our test cases are applied in convergent-divergent nozzles in wind tunnels and S-shaped diffusers in the airplane inlet engines.

Keywords: Inverse Design Problem, Direct Design, Three-dimensional Euler Equations, AUSM+ Scheme.

۱- دانشجوی دکترا (نویسنده پاسخگو): ashkan4249@yahoo.com

۲- استادیار: fghadak@chmail.ir

۳- استاد: taiebi@sharif.edu

۱- مقدمه

در مسائل طراحی شکل، مرز میدان جریان (یا حداقل بخشی از آن) ناشناخته می‌باشد و بنابراین نیاز به تعریف اطلاعات و داده‌های جدید در میدان جریان یا مرزهای آن است تا بتوان مطمئن بود که مسئله مورد نظر یک مسئله خوش‌رفتار می‌باشد. به طور معمول در مسائل طراحی شکل بهینه، توزیع فشار در طول مرزها به عنوان شرط یا داده مورد نیاز اضافی تعیین می‌گردد. این توزیع فشار در طول مرز «توزیع فشار هدف» نامیده می‌شود. توزیع فشار روی مرزها به مسائل مهمی در پدیده‌های مهندسی نظیر برا، پسا، جدایش، کوایتاسیون، افت‌های موضعی و امواج ضربه‌ای مربوط می‌شود.

به طور اساسی دو الگوریتم متفاوت برای حل مسائل طراحی شکل اجسام وجود دارد: تکراری و مستقیم (غیر تکراری). روش‌های طراحی تکراری دنباله‌ای از مسائل آنالیز را حل می‌کنند که در هر مرحله یک اصلاح شکل برای رسیدن به توزیع فشار هدف را به دنبال دارد. روش‌های تکراری، نظیر روش‌های بهینه‌سازی [۲ و ۱]، از دیرباز جزو رایج‌ترین روش‌ها در حل مسائل کاربردی طراحی شکل اجسام بوده است. ولی این روش‌ها از لحاظ محاسباتی گران می‌باشد. روش‌های مستقیم یا غیر تکراری شکل جسم را به متغیرهای وابسته‌ای در معادله حاکم ارتباط داده و در واقع فرم جدیدی از معادلات حاکم را ایجاد کرده‌اند که با حل آنها به طور مستقیم شکل جسم به دست می‌آید. به طور مثال، مختصات نقاط دیواره‌ها به عنوان مجهول در این فرم جدید معادلات حاکم ظاهر می‌شود. به این دلیل به این روش‌ها، روش‌های به طور کامل درگیر (پیوسته) یا کوپل نیز گفته می‌شود.

در روش‌های مرسوم مستقیم اغلب از یک نگاهت از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی با مرزهای ثابت استفاده می‌شود، (البته روش پیشنهاد شده در این مقاله یک استثنا می‌باشد). پس از آن، متغیرهای جریان و متغیرهای نگاهت یافته باید در حل مسئله مرزی در فضای محاسباتی به دست آید و بدین‌گونه هندسه به طور مستقیم به عنوان بخشی از حل و یا پس از آن از یک نگاهت معکوس حاصل می‌شود. استانیترز^۱ [۳] از این روش برای طراحی مجراهای دو و سه بعدی پتانسیل استفاده کرده است که در این حالت توابع پتانسیل و جریان به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته شده است. روش استانیترز توسط محققین

متعددی برای حل مسائل طراحی شکل مرزی در جریان‌های داخلی و خارجی مورد استفاده قرار گرفته است.

روش کلر^۲ [۴] مبتنی بر معادلات اوپلر، در زمره روش‌های تک‌مرحله‌ای قرار می‌گیرد. در این روش، معادلات اوپلر در سیستم مختصات طبیعی بازنویسی شده و جایگزینی متغیرهای وابسته و مستقل با یکدیگر در آن صورت گرفته است. در روش‌های طراحی مستقیم، مشکل عمده به دست آوردن شکلی مناسب برای معادلات حاکم در فرمولاسیون معکوس می‌باشد. در اکثر موارد، فرم مناسب معکوس نیاز به تبدیل معادلات فضایی به جزء فضای فیزیکی دارد که این کار معادلات حاکم را پیچیده می‌سازد.

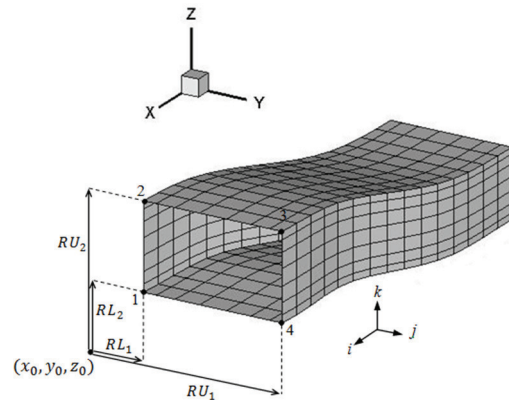
از جمله روش‌های دیگر طراحی مستقیم روش اشرفی‌زاده و همکارانش [۵ و ۶ و ۷] می‌باشد. این روش از دسته روش‌های کوپل (مستقیم) محسوب شده و در آن مختصات هندسی همه نقاط شبکه در فضای مجزاسازی به صورت مجهول در نظر گرفته شده و به طور مستقیم در حل مسائل طراحی شکل به دست می‌آید. در این روش از مفهومی به نام اسپاین استفاده می‌شود که در سادگی معادلات و افزایش کارایی روش نقش به‌سزایی داشته است. تمام کارهای اشرفی‌زاده محدود به معادله لاپلاس بوده است. در ادامه قدک [۸] به توسعه روش اشرفی‌زاده پرداخته، در ابتدا کاربردهای جدیدی از طراحی مستقیم مبتنی بر معادله لاپلاس را مدنظر قرار داده و سپس توسعه این روش طراحی با استفاده از معادلات سیال تراکم‌پذیر غیر لزج دو بعدی (مبتنی بر معادلات اوپلر) را مورد توجه قرار داده است.

در این مقاله از روش طراحی مستقیم برای حل مسائل طراحی شکل اجسام سه بعدی استفاده شده است. در این تحقیق، ایده طراحی مستقیم برای جریان‌های غیر لزج تراکم‌پذیر سه بعدی (با استفاده از معادلات اوپلر) توسعه داده شده و سپس از آن برای طراحی چندین مسئله عملی استفاده می‌شود. روش توسعه داده شده فرمولاسیون واحدی برای حل مسائل آنالیز و طراحی شکل اجسام ارائه داده است. با استفاده از روش پیشنهاد شده، مختصات هندسی همه نقاط شبکه در فضای مجزاسازی به صورت مجهول در نظر گرفته شده و به طور مستقیم در حل مسائل طراحی شکل به دست می‌آید.

۲- تئوری

همان‌طور که گفته شد در مسائل طراحی شکل جسم، شکل جسم از پیش تعیین شده نیست. بنابراین علاوه بر مجهولات جریان، خود نقاط مرزی نیز مجهول است. بنابراین، در مسائل طراحی شکل معادلات قیدی در نقاط گره‌ای مرزی باید تعریف شود تا سامانه معادلات بسته شود. فشار هدف تعیین شده در یک نقطه مرزی مجهول یکی از قیود مورد نیاز را فراهم می‌سازد. در مسائل طراحی شکل سه بعدی با توجه به اینکه هر کدام از نقاط مرزی مجهول دارای سه مختصه x و y و z می‌باشند، بنابراین سه معادله قیدی برای تعیین این سه مختصه ضروری است. در این مقاله در مجراها با مقاطع مختلف فرض شده است که مختصه x نقاط ثابت بوده و نقاط مرزی و به تبع آن کل نقاط شبکه تنها در صفحه $y-z$ جابجا می‌شوند. می‌توان از روابط درون‌یابی ساده‌ای برای ارتباط میان نقاط درونی و نقاط مرزی استفاده کرد. در نتیجه، شبکه محاسباتی در یک مسئله طراحی شکل می‌تواند به طور کامل بر حسب مجهولات هندسی نقاط مرزی تعریف گردد. همان‌طور که گفته شد برای طراحی اجسام سه بعدی در این تحقیق از دو مدل تقریباً متفاوت استفاده شده است.

در مدل اول که حالت ساده‌تری است ابتدا یک نقطه مرجع بیرون مجرا تعریف می‌شود و فاصله این نقطه با هر کدام از اضلاع مجرا در هر مقطع کانال به عنوان اسپاین تعریف می‌گردد. بدین ترتیب در هر مقطع تنها چهار مجهول وجود داشته و شکل حاصل به صورت یک کانال با سطح مقطع مربع و یا مستطیل است. در این حالت توزیع فشار بر روی نقاط میانی مرزها به عنوان داده اضافی در نظر گرفته می‌شود. برای فهم بیشتر مطلب، مجرای سه بعدی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل (۱): اسپاین‌ها در مدل اول.

مختصات نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ در شکل ۱ بر اساس مقادیر مجهول به صورت روابط (۱) تا (۴) است.

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0(i), y_0(i) + RL_1(i), z_0(i) + RL_2(i)), \quad (1)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_0(i), y_0(i) + RL_1(i), z_0(i) + RU_2(i)), \quad (2)$$

$$(x_3, y_3, z_3) = (x_0(i), y_0(i) + RU_1(i), z_0(i) + RU_2(i)), \quad (3)$$

$$(x_4, y_4, z_4) = (x_0(i), y_0(i) + RU_1(i), z_0(i) + RL_2(i)), \quad (4)$$

بنابراین در هر مقطع از کانال ۴ مجهول $RU_1(i)$ و $RL_1(i)$ و $RU_2(i)$ و $RL_2(i)$ وجود دارد که همان اسپاین‌ها در این مدل می‌باشند و از یک مقطع به مقطع دیگر مقدار آنها متفاوت است و همچنین در آن x_0 و y_0 و z_0 مختصات مبدأ اسپاین در هر مقطع از کانال می‌باشد و به گونه‌ای محاسبه می‌شود که همواره در بیرون کانال قرار بگیرد. در نهایت مختصات نقاط شبکه در هر مقطع با استفاده از معادلات (۵) تا (۷) که روابط تولید شبکه جبری هستند به دست می‌آید.

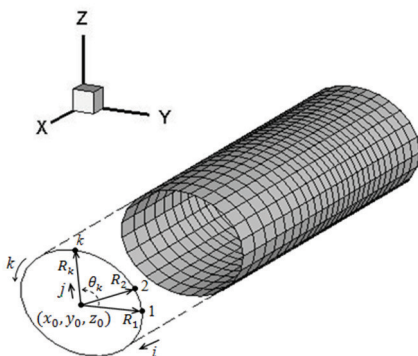
$$x(i, j, k) = x_0(i), \quad (5)$$

$$y(i, j, k) = y_0(i) + SJ(j)RU_1(i) + (1 - SJ(j))RL_1(i), \quad (6)$$

$$z(i, j, k) = z_0(i) + SK(k)RU_2(i) + (1 - SK(k))RL_2(i), \quad (7)$$

در روابط بالا $SJ(j)$ و $SK(k)$ توابعی برای ایجاد تراکم در شبکه در دو جهت مختلف می‌باشد. با توجه به روابط بالا با تغییر مقادیر اسپاین‌ها، نقاط مرزی و همچنین کل نقاط شبکه جابجا می‌شوند.

در مدل دوم که حالت کلی‌تر روش طراحی است، نقطه مرجع را داخل مجرا در نظر گرفته و فاصله این نقطه تا هر کدام از نقاط مرزی در هر مقطع مجرا به عنوان اسپاین تعریف می‌شود. در این حالت توزیع فشار روی تمام نقاط مرز جامد به عنوان ورودی مورد نیاز است. برای فهم بیشتر این مطلب مجرای سه بعدی نشان داده شده در شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۲): اسپاین‌ها در مدل دوم.

که برای مقادیر دیگر شارها در معادله (۱۲) به همین صورت عمل می‌شود. در معادلات اخیر برای محاسبه شارها در مرحله زمانی $n+1$ از خطی‌سازی زیر که اولین بار توسط بیم و وارمینگ^[۹] ارائه گردید، استفاده شده است. به عنوان مثال عبارت F^{n+1} به شکل معادله (۱۷) خواهد بود.

$$F^{n+1} = F^n + \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \right)^n \Delta Q^{n+1}. \quad (17)$$

در نهایت با اعمال خطی‌سازی‌های گفته شده، معادله (۱۲) به صورت معادله (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$\left[\frac{V^n}{\Delta t} + \sum_1^6 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial Q_p} \right) S_x + \left(\frac{\partial G}{\partial Q_p} \right) S_y + \left(\frac{\partial H}{\partial Q_p} \right) S_z \right)^n \right] \Delta Q_p^{n+1} + \sum_{k=1}^6 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial Q_k} \right) S_x + \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) S_y + \left(\frac{\partial H}{\partial Q_k} \right) S_z \right)^n \Delta Q_k^{n+1} + \dots \quad (18)$$

$$\sum_1^6 (F^n S_x^{n+1} + G^n S_y^{n+1} + H^n S_z^{n+1}) = 0,$$

در معادله اخیر p یعنی سلول اصلی مورد محاسبه و k سلول‌های همسایه سلول p می‌باشند. همچنین داریم:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Q} \right) S_x + \left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right) S_y + \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \right) S_z = \frac{\partial \bar{F}}{\partial Q}, \quad (19)$$

که در رابطه بالا \bar{F} بردار شار کلی بوده که در برگیرنده F و G و H می‌باشد. بنابراین با اعمال رابطه (۱۹) در رابطه (۱۸) داریم:

$$\left[\frac{V^n}{\Delta t} + \sum_{m=1}^6 \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_p} \right)^n \Delta S_m \right] \Delta Q_p^{n+1} + \left[\sum_{m=1}^6 \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_E} \right)^n \Delta S_m \right] \Delta Q_E^{n+1} + \left[\sum_{m=1}^6 \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_W} \right)^n \Delta S_m \right] \Delta Q_W^{n+1} + \left[\sum_{m=1}^6 \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_S} \right)^n \Delta S_m \right] \Delta Q_S^{n+1} + \left[\sum_{m=1}^6 \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_n} \right)^n \Delta S_m \right] \Delta Q_n^{n+1} + \sum_1^6 (F^n S_x^{n+1} + G^n S_y^{n+1} + H^n S_z^{n+1}) = 0. \quad (20)$$

در نتیجه می‌توان مجهولات هندسی را از ترم آخر معادله (۲۰) با توجه به رابطه بردار عمود بر سطح استخراج کرد. با توجه به معادله (۲۰) مشخص می‌شود که تعداد مجهولات از تعداد معادلات موجود بیشتر است. بنابراین علاوه بر شروط مرزی مرسوم در حل معادلات اویلر باید به یک شرط مرزی مهم دیگر که عهده‌دار بیان توزیع فشار هدف در راستای دیواره‌های جامد است اشاره کرد. در مسائل طراحی شکل، توزیع فشار داده شده در راستای دیواره‌ها باید در قالب شرط مرزی اضافی در آمده تا سامانه معادلات را کامل کند. قدک [۸] برای این منظور ابتدا از معادله پیوستگی در قالبی به نسبت متفاوت استفاده کرد تا بتواند

در این شکل مقادیر $R(i, k)$ اسپاین‌ها در این مدل بوده و در هر مقطع مجهول می‌باشند و مقدار آنها از یک مقطع به مقطع دیگر متفاوت است. مانند حالت قبل ابتدا مختصات نقاط مرزی را بر حسب مقادیر اسپاین‌ها بیان کرده و سپس با استفاده از روابط تولید شبکه جبری کل نقاط شبکه بر حسب اسپاین‌ها بر اساس روابط (۸) تا (۱۰) بازنویسی می‌شود.

$$x(i, j, k) = x_0(i). \quad (8)$$

$$y(i, j, k) = y_0(i) + SJ(j)R(i, k) \cos(SK(k) \times 2\pi). \quad (9)$$

$$z(i, j, k) = z_0(i) + SJ(j)R(i, k) \sin(SK(k) \times 2\pi). \quad (10)$$

بدین ترتیب با استفاده از روابط اخیر می‌توان در دو حالت، کل نقاط شبکه را بر حسب مجهولات هندسی بازنویسی کرد.

۳- معادلات حاکم

معادلات اویلر تراکم‌پذیر در حالت سه بعدی بقایی می‌تواند به صورت معادله (۱۱) نوشته شود.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

فرم حجم محدود معادلات اویلر سه بعدی برای یک سلول شش ضلعی نیز در حالت ضمنی به صورت معادله (۱۲) و (۱۳) است.

$$\frac{\Delta Q^{n+1}}{\Delta t} V^n + \sum_{m=1}^6 (FS_{x,m} + GS_{y,m} + HS_{z,m})^{n+1} = 0, \quad (12)$$

$$\Delta Q^{n+1} = Q^{n+1} - Q^n, \quad (13)$$

عبارت‌های V و n در رابطه (۱۲) به ترتیب بیانگر حجم سلول، شماره تکرار و S_x و S_y و S_z به ترتیب مؤلفه‌های بردار عمود بر سطح و عبارت‌های F, G, H و Q عبارتند از:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho e + P)u \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ (\rho e + P)v \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + P \\ (\rho e + P)w \end{bmatrix}, \quad (14)$$

که در آن، ρ, u, v, w, P به ترتیب بیانگر چگالی، مؤلفه‌های سرعت و انرژی مخصوص کل و فشار می‌باشد که رابطه انرژی کل با بقیه متغیرهای جریان به صورت معادله (۱۵) بیان می‌شود.

$$\rho e = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2 + \rho v^2 + \rho w^2}{2\gamma}. \quad (15)$$

با توجه به معادله (۱۲) به دلیل اینکه متغیرهای فیزیکی و هندسی مجهولند، خطی‌سازی نیوتن برای عبارت دوم معادله (۱۲) به شکل معادله (۱۶) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$(FS_x)^{n+1} = F^{n+1} S_x^n + F^n S_x^{n+1} - F^n S_x^n. \quad (16)$$

ملاحظات آکوستیک تخمین زده می‌شود. در نهایت نحوه گسسته‌سازی شار کلی در وجه k از سلول مورد محاسبه، به صورت رابطه (۲۵) است.

$$\vec{F}_k = \begin{cases} \rho_L \bar{a} M_k \phi_L + g P_k & \text{if } M_k \geq 0 \\ \rho_R \bar{a} M_k \phi_R + g P_k & \text{else} \end{cases} \quad (25)$$

پارامترهای استفاده شده در رابطه (۲۴) و (۲۵) در مرجع [۱۰] تعریف شده‌اند. مقدار ماخ در وجه سلول با استفاده از مقادیر میانگین چپ و راست هر وجه به دست آمده است. اعداد ماخ چپ و راست وجه سلول به صورت معادله (۲۶) محاسبه می‌شود.

$$M_{L,R} = \frac{V_{L,R}}{\bar{a}}, \quad (26)$$

در این معادله، \bar{a} سرعت صوت و $V_{L,R}$ مقدار سرعت نرمال برای سمت چپ و راست وجه سلول می‌باشد. عدد ماخ M_k و فشار P_k در وجه سلول نیز توابعی از اعداد ماخ چپ و راست است. همان‌طور که از رابطه (۲۵) مشخص است روش AUSM+ مقدار شار کلی را محاسبه می‌کند و در واقع مقادیر F ، G و H در این معادله به صورت رابطه (۲۷) ترکیب شده است.

$$\vec{F} = F \cdot S_x + G \cdot S_y + H \cdot S_z \quad (27)$$

برای محاسبه شارها به صورت تفکیک شده باید مؤلفه‌های سرعت در وجه سلول محاسبه شود که در این مقاله از یک درون‌یابی خطی بر اساس ماخ در وجه سلول و مقادیر آن در طرفین وجه سلول برای تعیین مؤلفه‌های سرعت استفاده شده است که بیان جزئیات محاسبه آنها خارج از حوصله این مقاله است.

۵- اعتبارسنجی

استحکام روش طراحی ارائه شده را می‌توان توسط آزمون‌های بدیهی مورد بررسی قرار داد. در اینجا، استحکام روش طراحی از طریق توانایی روش در استفاده از حدس‌های اولیه متفاوت و شبکه‌های محاسباتی متنوع بررسی شده است. یک روش مستحکم ایده‌آل باید بدون توجه به حدس اولیه و شبکه محاسباتی و میزان ریزی و درشتی شبکه به خوبی کار کند. به دلیل اینکه توزیع فشار محاسبه شده و هدف در راستای دیواره‌های جامد بسیار به یکدیگر نزدیک است، فقط توزیع فشار هدف در نمودارهای مربوط رسم شده است. فشار و چگالی با استفاده از مقادیر فشار و چگالی در ورودی مجرا یک‌بار شده و همه

شرط مرزی اضافی را اعمال کند. اما این روش بسیار ناپایدار بود. در نتیجه پس از آزمون معادلات مختلف دیده شد که معادله انرژی بسیار پایدارتر است، حتی استفاده از آن در حالت دو بعدی نشان داد که همگرایی آن نسبت به معادله پیوستگی بیشتر است. برای این منظور از معادله انرژی رابطه (۲۱) استخراج خواهد شد.

$$\frac{(\rho e)^{n+1} - (\rho e)^n}{\Delta t} V + \sum_1^6 \left((\rho e + P) u S_x + (\rho e + P) v S_y + (\rho e + P) w S_z \right)^{n+1} = 0, \quad (21)$$

حال به جای مقدار انرژی در مرحله زمانی $n+1$ با استفاده از رابطه (۱۵) مقدار فشار داده شده قرار می‌گیرد.

$$\left(\frac{P_{\text{given}}}{\gamma - 1} + \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2 + (\rho w)^2}{2\rho^n} \right) \frac{V}{\Delta t} + \sum_1^6 \left((\rho e + P) u S_x + (\rho e + P) v S_y + (\rho e + P) w S_z \right)^{n+1} = \frac{(\rho e)^n}{\Delta t} V. \quad (22)$$

در واقع معادله اخیر همان سطر پنجم معادله (۲۰) می‌باشد که به جای مقدار انرژی در مرحله زمانی جدید مقدار آن بر اساس توزیع فشار داده شده روی مرزها استفاده شده است. اکنون، نقاط شبکه‌ای درونی بر حسب نقاط مرزی و نقاط مرزی بر حسب مختصات اسپاینی بیان می‌شود. نقاط مرزی روی اسپاین‌ها واقع شده و فقط در آن راستا حرکت می‌کند. معادلات حاکم یکسان شده بر اساس روش طراحی مستقیم مجزاسازی شده و بعد از اعمال شروط مرزی اضافی سیستم معادلات کامل شد. شکل نهایی معادلات به صورت رابطه (۲۳) خواهد بود.

$$[A] \begin{bmatrix} \{ \text{Physical Unknowns} \} \\ \{ \text{Geometric Unknowns} \} \end{bmatrix} = [B]. \quad (23)$$

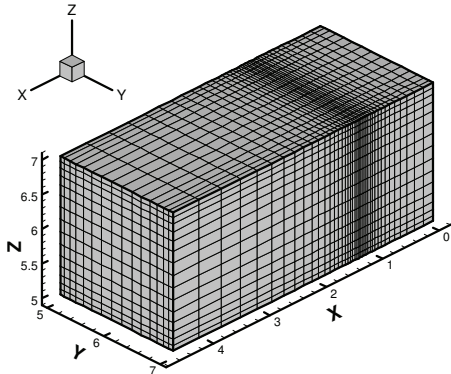
تنها راه عملی برای حل معادلات فوق استفاده از روش‌های کاملاً ضمنی می‌باشد. در این مقاله نیز، از روش حل مبتنی بر ماتریس‌های تنک استفاده خواهد شد. حل این معادله شکل مجرا و مجهولات فیزیکی را برای همه گره‌ها به دنبال خواهد داشت.

۴- متدولوژی عددی

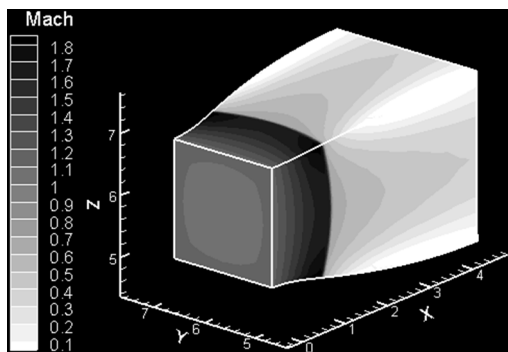
در این مقاله برای محاسبه شارها یعنی F ، G و H در رابطه (۲۰) و همچنین مشتق‌ها از روش عددی AUSM+ استفاده می‌شود. در خانواده الگوریتم AUSM که جزء روش‌های تجزیه اختلاف شار می‌باشد، شار روی وجوه به دو قسمت فشاری و جابجایی به صورت رابطه (۲۴) تقسیم می‌شود.

$$\vec{F}_k = \rho V \phi + P g \quad (24)$$

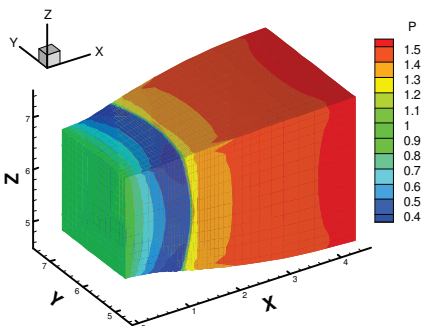
قسمت جابجایی با تقریب بالادست در جهت جریان محاسبه می‌گردد. قسمت فشاری نیز با تقریب بالادست بر اساس



شکل (۴): حدس اولیه برای نازل با شوک عمودی.



شکل (۵): هندسه و کانتور ماخ در نازل با شوک عمودی.



شکل (۶): هندسه و کانتور فشار در نازل با شوک عمودی.

اگر چه ممکن است مسئله طراحی معکوس با وجود موجهای شوک عمودی درون مجرا کاربرد عملی چندانی نداشته باشد، ولی به خوبی توانایی روش در حل این نوع مسائل پیچیده را نشان می‌دهد. مشخصات حل انجام شده در کد تحلیلی و طراحی در جدول ۲ آمده است. در این مثال مقدار عدد CFL در حالت تحلیل ۱/۵ و در طراحی مقدار ۰/۵ می‌باشد. همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود تعداد تکرار و زمان اجرای لازم برای همگرایی در کد تحلیلی کمتر از طراحی است.

ابعاد با استفاده از یک طول مرجع بدون بعد شده‌اند. با بقیه مقادیر نیز به شکل مشابه رفتار شده است. لازم به ذکر است که همه محاسبات با استفاده از یک رایانه شخصی با مشخصات پردازش‌گر مرکزی 2.53GHZ (دو هسته‌ای) و حافظه 4GB انجام شده است.

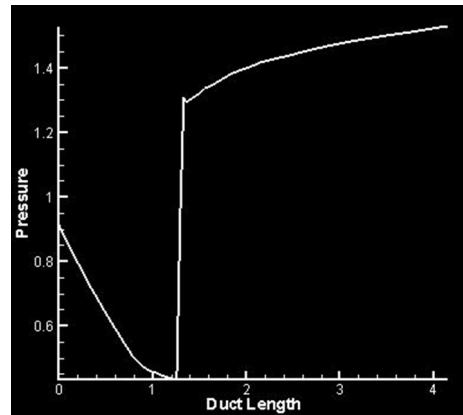
۵-۱- نازل واگرا با شوک عمودی

مورد اولی که در اینجا برای بررسی صحت عملکرد روش طراحی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد یک نازل با شوک عمودی می‌باشد که سطح مقطع آن به شکل مربع بوده و با مدل چهار نقطه‌ای طراحی شده است. در واقع این مثال، هندسه‌ای بوده است که ابتدا با کد تحلیلی حل شده و توزیع فشار روی مرزها به دست آمده و سپس برای اعتبارسنجی، توزیع فشار به دست آمده به کد طراحی داده شده است. مشخصات بی‌بعد شده کانال و همچنین جریان در جدول ۱ آورده شده است.

جدول (۱): مشخصات بی‌بعد شده کانال و جریان.

مساحت ورودی	مساحت خروجی	طول کانال	ماخ ورودی	فشار ورود	فشار پشت
۴	۸/۱۸	۴/۶	۱/۰۵	۱	۱/۵

توزیع فشار روی نقاط میانی مرزها به صورت شکل ۳ می‌باشد و چون کانال موردنظر سطح مقطع مربع شکل دارد توزیع فشار روی چهار نقطه میانی مرزها یکسان است. حدس اولیه در نظر گرفته شده در این حالت مانند شکل ۴ به صورت یک کانال مکعب مستطیل با ابعاد شبکه ۱۵×۱۵×۴۰ است. با اعمال این توزیع فشار روی مرزها و حدس اولیه برای هندسه، نازل به دست آمده با استفاده از روش طراحی به صورت شکل ۵ و ۶ می‌باشد که همراه با کانتورهای عدد ماخ و فشار بی‌بعد نشان داده شده است.

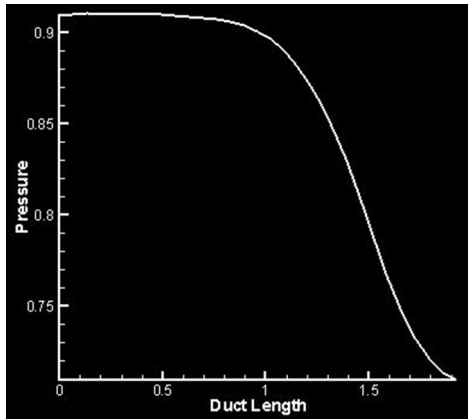


شکل (۳): توزیع فشار روی نقاط میانی مرزهای نازل با شوک عمودی.

جدول (۳): مشخصات بی‌بعد شده کانال و جریان در نازل

همگرایی مادون صوت.

مساحت ورودی	مساحت خروجی	طول کانال	ماخ ورودی	فشار ورود	فشار پشت
۳/۱۴	۱/۳۳۷	۲	۰/۲	۱	۰/۷

**شکل (۹):** توزیع فشار روی نقاط میانی مرزهای نازل مادون صوت.

مشخصات حل انجام شده در کد تحلیلی و طراحی در جدول ۴

آمده است. در این مثال عدد CFL در حالت تحلیل ۱ و در طراحی ۰/۵ می‌باشد و تعداد تکرار و زمان اجرای لازم برای همگرایی در کد تحلیلی، کمتر از طراحی می‌باشد. در توضیح باید افزود، که در روش طراحی مستقیم، علاوه بر شروط مرزی در ورود، توزیع فشار روی دیواره‌ها به عنوان ورودی داده شده است. بنابراین با توجه به این توزیع فشار، می‌توان تخمین اولیه بسیار مناسبی برای همه کمیت‌های فیزیکی درون میدان ارائه داد که موجب افزایش سرعت همگرایی می‌گردد. ولی زمان اجرا به دلیل حجم محاسبات زیاد، بیشتر می‌باشد. پس با حدس اولیه مناسب‌تر تعداد دفعات تکرار برای همگرایی در کد طراحی کاهش می‌یابد.

جدول (۴): شبکه، تکرار و زمان CPU برای نازل مادون صوت.

موارد طراحی	شبکه	تعداد تکرار تحلیلی	تعداد تکرار طراحی	زمان اجرا تحلیلی (ثانیه)	زمان اجرا طراحی (ثانیه)
نازل	۱۵×۷×۲۱	۱۵۵۴	۳۱۷۴	۳۳۴/۸۵۹	۲۳۶۵/۶۰۹
مادون	۲۰×۹×۳۱	۲۲۹۳	۷۳۰۳	۱۲۹۲/۴۶۹	۱۱۲۶۰/۹۹
صوت	۳۰×۷×۲۷	۲۲۹۷	۱۲۹۰۴	۱۲۷۱/۱۰۹	۱۲۰۱۶/۵۴

۶- موارد طراحی شده و بحث روی نتایج

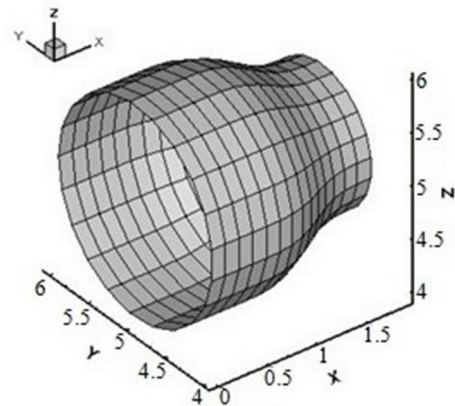
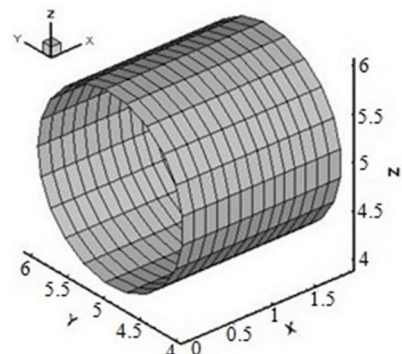
در این مرحله به بررسی برخی کاربردهای روش طراحی مستقیم که پیشنهاد شده است پرداخته خواهد شد. مانند حالت قبل، به

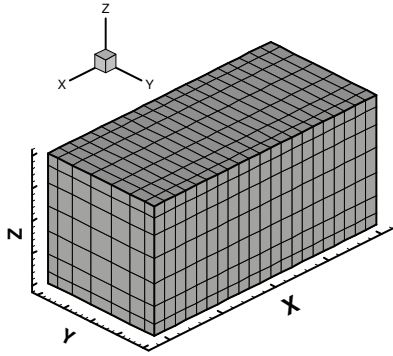
جدول (۲): شبکه، تکرار و زمان CPU برای نازل با شوک عمودی.

موارد طراحی	شبکه	تعداد تکرار تحلیلی	تعداد تکرار طراحی	زمان اجرا تحلیلی (ثانیه)	زمان اجرا طراحی (ثانیه)
نازل با شوک عمودی	۱۵×۷×۷ ۳۰×۱۱×۱۱ ۴۰×۱۵×۱۵	۴۷۵ ۱۵۴۷ ۲۹۴۶	۲۱۱۲ ۴۲۵۱ ۲۹۹۱	۱۳/۴۶۷ ۳۳۹/۲۳۴ ۱۴۴۸/۷۰۵	۲۱۳/۸۸۳ ۴۸۴۵/۷۷ ۱۰۵۰۲/۸۷

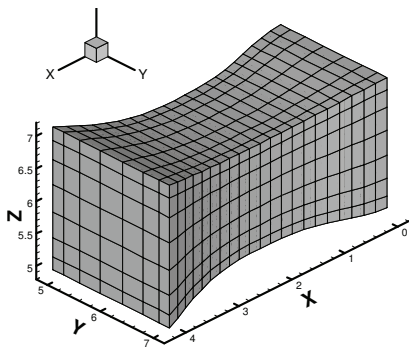
۵-۲- نازل همگرایی مادون صوت

مثال دیگر یک مجرای همگرا با سطح مقطع دایره‌ای شکل به صورت تقارن محوری مطابق شکل ۷ می‌باشد که چون عدد ماخ جریان ورودی آن کمتر از یک است به صورت یک نازل مادون صوت عمل می‌کند. حدس اولیه در نظر گرفته شده در این حالت یک استوانه می‌باشد، شکل ۸. مشخصات کانال و همچنین جریان در جدول ۳ آورده شده است. با توجه به توزیع فشار روی مرزهای این مجرا مطابق شکل ۹ مشاهده می‌شود که فشار کاهش پیدا می‌کند، چون در جریان مادون صوت با کاهش مساحت مجرا ماخ افزایش و فشار کاهش می‌یابد، که این امر در نمودار توزیع فشار شکل ۹ به طور کامل مشهود است.

**شکل (۷):** هندسه نازل مادون صوت.**شکل (۸):** حدس اولیه برای نازل مادون صوت.



شکل (۱۱): حدس اولیه برای طراحی نازل ایده آل همگرا - واگرا.



شکل (۱۲): هندسه نازل ایده آل همگرا - واگرا.

جدول (۶): شبکه، تکرار و زمان CPU برای نازل ایده آل

همگرا - واگرا.

موارد طراحی	شبکه	تعداد تکرار طراحی	تعداد تکرار تحلیلی (ثانیه)	زمان اجرا طراحی (ثانیه)	زمان اجرا تحلیلی (ثانیه)
نازل ایده آل همگرا - واگرا	۲۱×۷×۷	-	۳۶۰۶۲	-	۵۹۰۹/۷۵۰

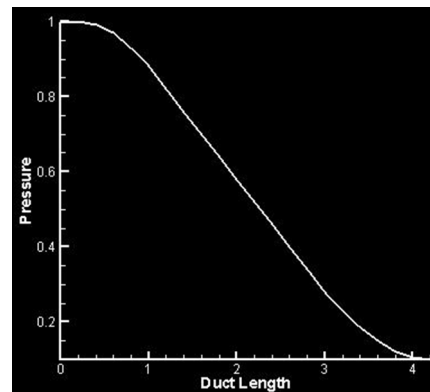
۲-۶- طراحی دیفیوزر S - شکل ایده آل با مدل اول

مثال بعدی طراحی یک دیفیوزر S- شکل ایده آل با استفاده از مدل اول می باشد. مجراهای S- شکل به عنوان دیفیوزر در ورودی دهانه موتورهای جت و موشکها کاربرد دارند. ممکن است نواحی کوچکی در نزدیکی دهانه ورودی وجود داشته باشد که سرعت حتی با وجود فروصوتی بودن جریان ورودی تا محدوده مافوق صوت بالا رود. هدف در اینجا طراحی مجراهای S- شکلی است که مقدار فشار روی مرزهای جامد آن به طور ناگهانی کاهش و یا افزایش پیدا نکند تا احتمال جدایش در دیفیوزر واقعی کاهش یابد و همچنین از ایجاد

دلیل اینکه توزیع فشار محاسبه شده و هدف در راستای دیوارهها بسیار به یکدیگر نزدیک است، فقط توزیع فشار هدف در نمودارهای مربوطه به تصویر کشیده شده اند. چگونگی بی بعدسازی و سخت افزار استفاده شده مانند حالت قبل می باشد.

۶-۱- طراحی نازل ایده آل همگرا - واگرا

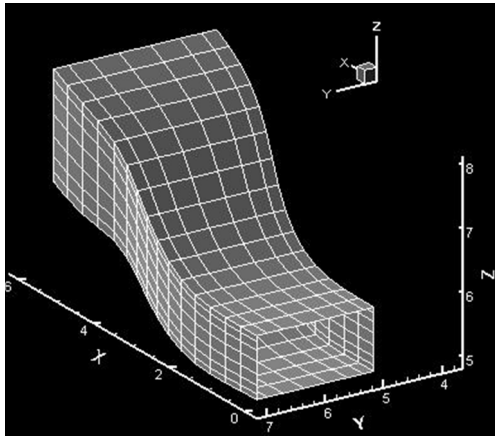
اولین مثال طراحی که در اینجا بررسی می شود طراحی نازل ایده آل همگرا - واگرا می باشد. هرگاه جریانی تک - آنتروپی از سرعت فروصوتی به سرعت فراصوتی انبساط یابد، باید از یک گلوگاه بگذرد. کاربرد اصلی نازل های همگرا - واگرا در تونل های باد فراصوتی می باشد. در اینجا فشار روی مرزها باید به تدریج کاهش یابد (مانند شکل ۱۰) تا پدیده های نامطلوبی چون شوک و جدایش جریان اتفاق نیفتد. چون توزیع فشار روی نقاط میانی در طول مرزها یکسان داده شده است، نازل طراحی شده دارای سطح مقطع مربع شکل می باشد. شرایط ورودی داده شده در جدول ۵ آمده است. حدس اولیه در نظر گرفته شده در این مثال یک مکعب مربع با مساحت ورودی ۴ مطابق شکل ۱۱ می باشد. در شکل ۱۲ هندسه نهایی به دست آمده با استفاده از روش طراحی برای مدل اول با استفاده از شبکه ۲۱×۷×۷ نشان داده شده است. مشخصات حل نیز در این حالت در جدول ۶ آورده شده است.



شکل (۱۰): توزیع فشار روی نقاط میانی مرزهای نازل ایده آل همگرا - واگرا.

جدول (۵): مشخصات بی بعد شده کانال و جریان در نازل ایده آل همگرا - واگرا.

مساحت ورودی	طول کانال	ماخ ورودی	فشار ورود	فشار پشت
۴	۴/۲	۰/۴	۱	۰/۱

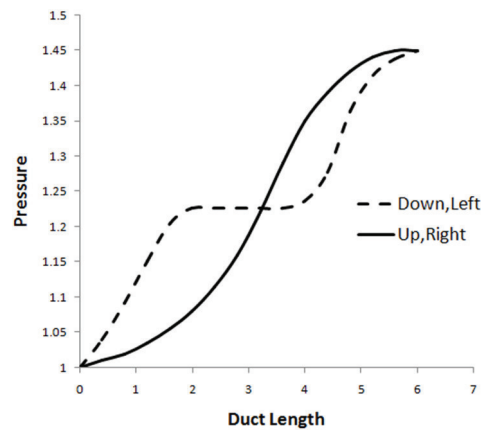


شکل (۱۵): هندسه دیفیوزر S - شکل ایده‌آل.

شوک در داخل مجرا جلوگیری شود. در این مدل به توزیع فشار روی نقاط میانی مرزها به عنوان ورودی نیاز است. توزیع فشار بر روی چهار نقطه میانی در شکل ۱۳ رسم شده است. مجرای طراحی شده در این مثال دارای جریان مادون‌صوت بوده که مشخصات آن در جدول ۷ آمده است. در این مثال حدس اولیه برای هندسه به صورت یک کانال مکعب مستطیل بدون انحنا و با مساحت دهانه ورودی و طول مجرای مشخص می‌باشد که در شکل ۱۴ نشان داده شده است. در نهایت با حل مسئله طراحی، یک دیفیوزر S- شکل به دست می‌آید که در دو صفحه $x-z$ و $x-y$ دارای انحنای S- شکل می‌باشد و هندسه آن در شکل ۱۵ نشان داده شده است. مشخصات حل نیز در این حالت در جدول ۸ آمده است.

جدول (۸): شبکه، تکرار و زمان CPU برای موارد مطرح شده.

موارد طراحی	شبکه	تعداد تکرار و تحلیل	تعداد تکرار و تحلیل	زمان اجرا طراحی (ثانیه)	زمان اجرا (ثانیه)
دیفیوزر S- شکل ایده‌آل با مدل اول	۱۵×۷×۷	-	۳۰۷۸	-	۳۳۱/۱۱۴



شکل (۱۳): توزیع فشار روی نقاط میانی مرزهای دیفیوزر S - شکل ایده‌آل.

۳-۶- طراحی دیفیوزر S- شکل ایده‌آل با مدل دوم

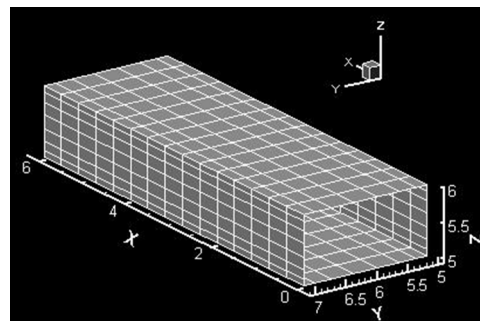
در مثال پیشرو، دیفیوزر S - شکل با استفاده از مدل دوم طراحی می‌شود. در این مجرا سرعت جریان کاهش و فشار افزایش می‌یابد. دهانه ورودی دیفیوزر به شکل بیضی و دهانه خروجی آن به شکل دایره است. هدف در اینجا مانند قبل طراحی مجراهای S - شکلی است که تغییرات ناگهانی در توزیع فشار روی دیواره‌های آن نباشد و همچنین پدیده‌های ناخوشایندی همچون شوک و جدایش جریان در درون مجرا اتفاق نیفتد. مجرای طراحی شده در این مثال دارای جریان مادون‌صوت بوده که مشخصات آن در جدول ۹ ارائه شده است.

جدول (۷): مشخصات بی‌بعد شده کانال و جریان در دیفیوزر S - شکل ایده‌آل با مدل اول.

مساحت ورودی	طول کانال	ماخ ورودی	فشار ورود	فشار پشت
۲	۶	۰/۸۵	۱	۱/۴۵

جدول (۹): مشخصات بی‌بعد شده کانال و جریان در دیفیوزر S - شکل ایده‌آل با مدل دوم.

مساحت ورودی	طول کانال	ماخ ورودی	فشار ورود	فشار پشت
۲	۶	۰/۸۵	۱	۱/۴۵



شکل (۱۴): حدس اولیه برای طراحی دیفیوزر S - شکل ایده‌آل.

همان‌طور که ذکر شد به دلیل اینکه در روش طراحی مستقیم عبارات غیر خطی متعددی ناشی از حاصل ضرب مجهولات فیزیکی و هندسی وجود دارد، میزان غیرخطی بودن معادلات حاکم بیشتر از معادلات حاکم در حالت آنالیز می‌باشد. در اکثر موارد طراحی شده با روش طراحی مستقیم با استفاده از معادلات اوایلر، کد طراحی همگرایی خوبی از خود نشان می‌دهد. برای مقایسه، مشخصات حل انجام شده در این مثال و سایر موارد قبلی در زمینه کد تحلیلی و طراحی در جدول ۱۰ آمده است.

جدول (۱۰): شبکه، تکرار و زمان CPU برای

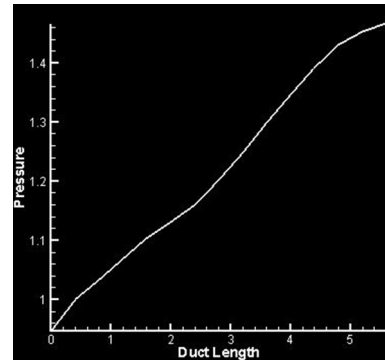
موارد مطرح شده.

موارد طراحی	شماره	تعداد تکرار	تعداد تکرار	تعداد تکرار	زمان اجرا (ثانیه)
نازل با شوک عمودی	۱۵×۷×۷	۴۷۵	۲۱۱۲	۱۳۴۶۷	۲۱۳/۸۸۳
	۳۰×۱۱×۱۱	۱۵۴۷	۴۲۵۱	۳۳۹/۲۳۴	۴۸۴/۵۷۷
	۴۰×۱۵×۱۵	۲۹۴۶	۲۹۹۱	۱۴۴۸/۷۰۵	۱۰۵۰/۲۸۷
نازل مادون صوت	۱۵×۷×۲۱	۱۵۵۴	۳۱۷۴	۲۲۴/۸۵۹	۲۳۶/۶۰۹
	۲۰×۹×۳۱	۲۲۹۳	۷۳۰۲	۱۲۹۲/۴۶۹	۱۱۲۶/۹۹
	۳۰×۷×۲۷	۲۲۹۷	۱۲۹۰۴	۱۲۷۱/۱۰۹	۱۲۰۱/۶۵۴
نازل ایده‌آل همگرا-واگرا	۲۱×۷×۷	-	۳۶۰۶۲	-	۵۹۰۹/۷۵۰
دیفیوزر S-شکل ایده‌آل با مدل اول	۱۵×۷×۷	-	۳۰۷۸	-	۳۳۱/۱۱۴
دیفیوزر S-شکل ایده‌آل با مدل دوم	۱۵×۷×۵۱	-	۸۴۵۹	-	۱۱۷۸۹/۲۲

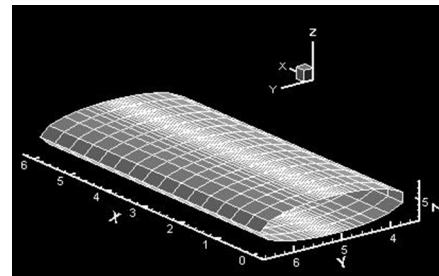
۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش طراحی مستقیم برای مسائل کاربردی بر اساس معادلات اوایلر توسعه داده شد. همچنین، به دلیل اینکه مسائل آنالیز و طراحی شکل متناظر با آن از قوانین فیزیکی یکسانی تبعیت کرده، می‌توان معادلات حاکم بر آنها را در قالب یکسانی قرار داد. کاربرد این فرمولاسیون یکتا در حل مسائل طراحی شکل مهندسی، نشان می‌دهد که هدف اولیه از این تحقیق، یعنی توسعه یک روش طراحی مستقیم برای حل مسائل طراحی شکل، به خوبی درک شده است. این روش حتی در مجاورت ناپیوستگی‌های شدید جریان مانند شوک پایداری خوبی از خود نشان می‌دهد و تنها در جریانات مادون‌صوت برای همگرایی جواب، دارای نوسانات زیاد در مقدار باقیمانده‌ها است. این روش همچنین برای پایداری نیاز به پارامتر تخفیف در شرط مرزی اضافی ندارد که نشان‌دهنده پایداری معادله انرژی

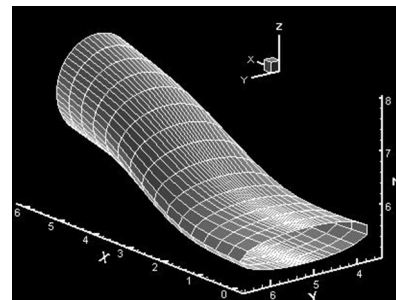
چون توزیع فشار روی نقاط مرزی مشخص نیست ابتدا باید هندسه‌ای را به عنوان ورودی با روش آنالیز حل کرده و فشار روی مرزها را به دست آورد. سپس این توزیع فشار را تصحیح کرده و به عنوان توزیع فشار مطلوب در نظر گرفت. در اینجا توزیع فشار در خط مرکزی مجرا در شکل ۱۶ رسم شده است. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده تغییرات ناگهانی در توزیع فشار نقاط وجود ندارد. در این مثال نیز حدس اولیه برای هندسه به صورت یک کانال بدون انحنا و با مساحت دهانه ورودی و طول مجرای داده شده می‌باشد که در شکل ۱۷ نشان داده شده است. این دیفیوزر در صفحه X-Z دارای انحنای S- شکل بوده و هندسه آن در شکل ۱۸ آورده شده است.



شکل (۱۶): توزیع فشار روی خط مرکزی دیفیوزر S- شکل ایده‌آل.



شکل (۱۷): حدس اولیه برای طراحی دیفیوزر S- شکل ایده‌آل.



شکل (۱۸): هندسه دیفیوزر S- شکل ایده‌آل.

4. Keller, J.J. "Inverse Euler Equations", *Zeitschrift fur AngewandteMathematik und Physik*, 49(3), 363–383, 1998.
5. Ashrafizadeh, A., Raithby, G.D., and Stubley, G.D. "Direct Design of Ducts", *J. Fluids Engineering, Transaction ASME*, Vol. 125, 158–165, 2003.
6. Ashrafizadeh, A., Raithby, G.D., and Stubley, G.D. "Direct Design of Shape. Numerical Heat Transfer-Part B, Volume No. 41, 501–510, 2002.
7. Ashrafizadeh, A., Raithby, G.D., and Stubley, G.D. "Direct Design of Airfoil Shape with a Prescribed Surface Pressure", *Numerical Heat Transfer, Part B:Fundamentals*, Vol. 46, No. 6, 505–527, 2004.
8. Ghadak, F. "Direct Design of 2D Ducts, Using Euler and Laplace Equations", PhD Dissertation, Sharif University of Technology, 2006 (inpersian).
9. Beam, R.M. and Warming, R.F. "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form", *J. of Computational Physics*, Vol. 22, No.1, 87–109, 1976.
10. Liou, M.S. "A Sequel to AUSM: AUSM+", *J. Computational Physics*, Volume No. 129, pp. 364-382, 1996.
11. Nejadi, A. "Direct Design of 3D Ducts, Using Euler Equations", MS. Thesis, Sharif University of Technology, 2009 (inpersian).

نسبت به معادله پیوستگی استفاده شده در حالت دوبعدی در شرط مرزی اضافی است. به نظر نمی‌رسد روش طراحی توسعه داده شده، هیچ نوع محدودیت ذاتی داشته باشد، بنابراین آینده آن بسیار درخشان بوده و می‌توان آن را به معادلات کلی‌تر ناویراستوکس نیز توسعه داد. بنابر تجربه کارهای انجام شده قبلی، می‌توان گفت که این روش دارای ویژگی‌هایی برجسته و متمایز از سایر روش‌ها است و می‌تواند به عنوان نرم‌افزاری عمومی برای طراحی اجسام سه‌بعدی بر اساس معادلات اویلر به کار رود.

۸- مراجع

1. Cheng, C.H. and Wu, C.Y. "An Approach Combining Body Fitted Grid Generation and Conjugate Gradient Methods for Shape Design in Heat Conduction Problems", *Numerical Heat Transfer, Part B*, 37(1), 69–83, 2000.
2. Jameson, A. "Optimal Design via Boundary Control", In *AGARD-VKI Lecture Series. Optimal Design Methods for Aerodynamics*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 3.1–3.33, 1994.
3. Stanitz, J.D. "A Review of Certain Inverse Methods for the Design of Ducts with 2- or 3-Dimensional Potential Flows", In: *Proceedings of the Second Int. Conf. on Inverse Design Concepts and Optimization in Engineering Sciences (ICIDES-II)*, The Pennsylvania State Univ., University Park, A, Oct. 26–28, 1987.