

بررسی فرآیند توزیع مجدد انرژی جنبشی آشفته در جریان کانال با استفاده از شبیه‌سازی مستقیم عددی

امین موسائی^۱

گروه مهندسی مکانیک

دانشگاه یاسوج

(تاریخ دریافت: ۹۲/۰۸/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۱۲/۲۰)

چکیده

در این تحقیق، فرآیند توزیع مجدد انرژی جنبشی آشفته در جریان کانال بررسی شده است. برای این منظور، از شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان تراکم‌ناپذیر یک سیال نیوتنی در یک کانال در عدد رینولدز برشی $Re_\tau = 180$ برای تولید یک بانک اطلاعاتی از داده‌های جریان استفاده شده است. سپس این داده‌ها مورد تجزیه و تحلیل آماری قرار گرفته‌اند. فرآیند توزیع مجدد انرژی جنبشی آشفته به کمک تانسور همبستگی بین فشار و نرخ کرنش مورد بررسی قرار گرفته است. نوسان فشار و نرخ کرنش و ضریب همبستگی آنها تحلیل شده است. معادله‌ای برای نوسان نرخ کرنش استخراج شده و عبارات موجود در آن با استفاده از نتایج شبیه‌سازی محاسبه شده‌اند. سپس با استفاده از یک حل نیمه تحلیلی، همبستگی بین فشار و نرخ کرنش محاسبه و با نتایج شبیه‌سازی مقایسه شده است. نتایج این تحقیق به طور کمی نشان می‌دهد که تانسور همبستگی بین فشار و نرخ کرنش، انرژی جنبشی که در مؤلفه جهت جریان تولید شده را به دو جهت دیگر انتقال می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: توزیع مجدد انرژی جنبشی، شبیه‌سازی مستقیم عددی، جریان کانال آشفته، همبستگی بین فشار و نرخ کرنش.

Investigation of Turbulent Kinetic Energy Redistribution in a Channel Flow Using Direct Numerical Simulation

A. Moosaie

Mechanical Engineering Department

Yasouj University

(Received: 6 November, 2013; Accepted: 11 March, 2014)

ABSTRACT

In this study, the turbulent kinetic energy redistribution process is investigated. To this aim, the direct numerical simulation (DNS) of incompressible flow of a Newtonian fluid through a channel at a shear Reynolds number of $Re_\tau = 180$ is used to produce a flow data base. Then, these data are statistically analyzed. The turbulent kinetic energy redistribution is studied using the pressure-strain-rate correlation tensor. Pressure and strain-rate fluctuations as well as the correlation coefficient between them are analyzed. An equation for the strain-rate fluctuations is derived whose terms are calculated based on the simulation results. Then, using a semi-analytical solution, the pressure-strain-rate correlation is computed and compared with the DNS results. The results of this research quantitatively show that the pressure-strain-rate correlation transfers the kinetic energy that is produced in the stream wise component to the other two components.

Keywords: Kinetic Energy Redistribution, Direct Numerical Simulation (DNS), Turbulent Channel Flow, Pressure-Strain-Rate Correlation.

۱- مقدمه

درک فیزیک جریان آشفته در نزدیکی دیوار و نیز مکانیزم‌های تولید و انتقال انرژی جنبشی و اندازه حرکت در این جریان‌ها دارای اهمیت اساسی است. به لحاظ بنیادی، درک این مسئله برای توسعه مدل‌های آماری آشفتگی جهت استفاده در شبیه‌سازی‌های مبتنی بر معادلات ناویر - استوکس میانگین‌گیری شده یا معادلات رینولدز (RANS)^۱ و نیز مدل‌های زیر شبکه برای شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ (LES)^۲ مهم است.

به عنوان مثال، در جریان آشفته در نزدیکی دیوار، ساختمان‌های استریکی^۳ سرعت بالا و پایین در جهت جریان اصلی ایجاد می‌شوند [۲۰]. دینامیک این ساختمان‌ها در فرایند تزریق و جاروب کردن و در نتیجه در ایجاد نیروی مقاومت آشفته بسیار مؤثر است. متأسفانه، با افزایش عدد رینولدز، اندازه این ساختمان‌های جریان کاهش می‌یابد. بنابراین چنانچه LES یک جریان نزدیک دیوار در اعداد رینولدز بالا انجام گیرد، می‌بایست یا شبکه محاسباتی آن قدر ریز باشد که این ساختمان‌ها را شبیه‌سازی کند و یا مدل زیر شبکه به نحو هوشمندانه‌ای اثر این ساختمان‌ها را مدل کند. در حالت اول حجم محاسبات LES تقریباً برابر با شبیه‌سازی مستقیم عددی (DNS) خواهد بود که در اعداد رینولدز بالا یک چالش محاسباتی و برای بسیاری از مسایل کماکان غیرقابل انجام است. بنابراین راه حل اقتصادی در اعداد رینولدز بالا، استفاده از مدل‌های زیر شبکه هوشمندی است که اثر این ساختمان‌ها را مدل کنند. تاکنون، مدل جامعی که این پیچیدگی‌های جریان را در نظر بگیرد، در دست نیست. برای توسعه چنین مدلی نیاز به درک عمیقی از مکانیزم‌های آشفتگی در نزدیکی دیوار است.

علاوه بر این، چنانچه اولین گره محاسباتی در نزدیکی دیوار درون زیرلایه لزج قرار نگیرد، که در اعداد رینولدز بالا معمولاً چنین است، برای LES دقیق جریان، نیاز به یک تابع دیوار جهت توصیف دینامیک آشفتگی در نزدیکی دیوار می‌باشد. توابع دیوار با دقت بالا برای دیوارهای تخت و یا با انحنا کم موجود است. ولی برای دیوارهای با انحنا زیاد و در هنگام جدایی لایه مرزی، توابع دیوار موجود دقت بسیار پایینی داشته و در بعضی پاسخ‌های غیرفیزیکی ایجاد می‌کنند [۳]. توسعه توابع دیوار دقیق برای چنین مسایلی نیز مثال دیگری است که اهمیت درک آشفتگی در نزدیکی دیوار را مشخص می‌سازد. لازم به توضیح است که توسعه توابع دیوار برای دیوارهای

انحنادار و جریان‌های جدا شده می‌تواند یکی از گام‌های مهم در LES جریان آشفته در هندسه‌های پیچیده باشد [۴].

در تحقیق حاضر، یکی از مکانیزم‌های بسیار مهم در جریان آشفته در نزدیکی دیوار یعنی فرایند توزیع مجدد انرژی آشفتگی بررسی می‌گردد. در جریان آشفته توسعه یافته در یک کانال، تولید انرژی آشفتگی متوسط فقط توسط مؤلفه سرعت در جهت اصلی جریان صورت می‌گیرد. بنابراین چنانچه هیچ مکانیزم توزیع مجدد انرژی بین مؤلفه‌های سرعت موجود نباشد، لازم است که در جهت دیگر انرژی آشفتگی صفر باشد. به این معنا که تنها یکی از عناصر روی قطر اصلی تانسور تنش رینولدز غیر صفر و دو عنصر دیگر صفر باشند. در عمل مشاهده می‌شود که هر سه عنصر مخالف صفر هستند. بنابراین می‌بایست یک فرایند توزیع مجدد انرژی آشفتگی در جریان موجود باشد. به عبارتی انرژی آشفتگی در جهت اصلی جریان که توسط برهم کنش گردان سرعت متوسط و تنش برشی رینولدز تولید می‌شود، توسط فرایند توزیع مجدد انرژی به دو جهت دیگر منتقل می‌گردد. تنش برشی رینولدز خود ناشی از مؤلفه‌های سرعت نوسانی در جهت اصلی جریان و جهت عرضی (یعنی دو جهت موازی با دیوار) است. فویسی^۴ و همکاران [۵] این فرایند را برای جریان آشفته مافوق صوت در کانال در اعداد ماخ مختلف بررسی نموده‌اند و نشان دادند که این فرایند در اعداد ماخ بالا مختل می‌شود.

در تحقیق حاضر، از تکنیک محاسباتی شبیه‌سازی مستقیم عددی (DNS)^۵ برای شبیه‌سازی جریان آشفته استفاده شده است. زیرا برای مطالعه دقیق جریان باید مطمئن بود که همه اثرات مشاهده شده در جریان، تظاهرات فیزیکی بوده و ناشی از خطاهای مدل‌سازی نیستند. شبیه‌سازی مستقیم عددی (DNS) به روشی گفته می‌شود که در آن همه مقیاس‌های فضایی و زمانی جریان آشفته حل می‌گردند و نیاز به هیچ مدل آشفتگی ندارد. امروزه DNS یک ابزار بسیار قدرتمند تحقیقاتی جهت مطالعه جریان‌های آشفته و به طور خاص مکانیک آشفتگی در نزدیکی دیوار است [۶ و ۷]. زیرا در مطالعات تجربی جریان آشفته، هم هزینه تحقیقات بسیار زیاد بوده و هم اندازه‌گیری کمیت‌های جریان در نزدیکی دیوار مشکل و اغلب با خطای زیادی همراه است. از طرفی ایجاد یک بانک اطلاعاتی بزرگ از جریان آشفته، که برای مطالعات آماری مورد نیاز است، با استفاده از آزمایش زمان‌بر و گران خواهد بود. در عوض DNS راهی به سوی بررسی جزئیات فیزیکی مکانیزم‌ها و

1 - Reynolds-Averaged Navier-Stokes

2 - Large Eddy Simulation

3 - Streaky Structures

4 - Foyi

5 - Direct Numerical Simulation

در این مقاله، کمیت درون علامت $\langle \dots \rangle$ نشان‌دهنده کمیت متوسط است. u_i و p' به ترتیب سرعت‌ها و فشار نوسانی هستند. چنانچه معادلات (۱) و (۲) میانگین‌گیری شوند، معادلات حرکت رینولدز برای میدان‌های سرعت و فشار متوسط به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\overline{D} \langle U_i \rangle}{\overline{D} t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}, \quad (5)$$

که در آن:

$$\frac{\overline{D} \langle U_i \rangle}{\overline{D} t} = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle}{\partial x_j}, \quad (6)$$

مجهول جدید $\langle u_i u_j \rangle$ که در معادله اندازه حرکت (۵) ظاهر شده است، تانسور تنش ظاهری رینولدز نامیده می‌شود.

از معادلات حرکت لحظه‌ای (۱) و (۲) و معادلات حرکت متوسط (۴) و (۵) می‌توان معادله دیفرانسیلی برای تکامل زمانی تنش‌های ظاهری رینولدز استخراج نمود:

$$\frac{\overline{D} \langle u_i u_j \rangle}{\overline{D} t} + \frac{\partial T_{kij}}{\partial x_k} = P_{ij} + R_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad (7)$$

که در آن تانسورهای:

$$T_{ijk} = \langle u_i u_j u_k \rangle - \nu \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \langle u_i p' \rangle \delta_{jk} + \frac{1}{\rho} \langle u_j p' \rangle \delta_{ik}, \quad (8)$$

$$P_{ij} = -\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} - \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}, \quad (9)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{\rho} \langle p' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \rangle = \frac{1}{\rho} \langle p' s'_{ij} \rangle, \quad (10)$$

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rangle, \quad (11)$$

به ترتیب شار تنش رینولدز، عبارت تولید، همبستگی فشار و نرخ کرنش، و عبارت استهلاک نامیده می‌شوند. در معادله (۸)، δ_{ij} دلتای کرونکر می‌باشد. در معادله (۱۰)، s'_{ij} تانسور نرخ کرنش نوسانی است:

$$s'_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad s'_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (12)$$

جمع عناصر روی قطر اصلی s'_{ij} یعنی s'_{ii} به دلیل معادله پیوستگی برای سرعت نوسانی صفر است و در نتیجه رابطه $R_{ii} = 0$ برقرار می‌باشد.

انرژی جنبشی آشفتگی از جمع عناصر روی قطر اصلی تانسور تنش رینولدز $\langle u_i u_j \rangle$ یعنی $\langle u_i u_i \rangle$ بدست می‌آید:

$$TKE = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle. \quad (13)$$

با قرار دادن $i = j$ در معادله (۷) و در نظر گرفتن $R_{ii} = 0$ معادله ترابری انرژی جنبشی آشفته به دست می‌آید:

$$\frac{\overline{D} \langle u_i u_i \rangle}{\overline{D} t} + \frac{\partial T_{kii}}{\partial x_k} = P_{ii} + \epsilon_{ii}. \quad (14)$$

اندرکنش‌های موجود در جریان‌های آشفته به دست می‌دهد. همچنین، DNS اجازه می‌دهد که فرضیه‌ها و تئوری‌ها مورد آزمایش دقیق قرار گیرند و مطالعه جریان تحت شرایط کنترل شده‌ای که در صورت لزوم فیزیکی نیستند را ممکن می‌سازد. به عنوان مثال، می‌توان از مطالعه اثرات تغییر در شرایط مرزی مسئله نام برد. اگر چه ممکن است شرایط مرزی مورد مطالعه در هیچ مسئله واقعی وجود نداشته باشند، اما مطالعه آنها بسیار آموزنده است. زیرا نشان می‌دهد که مکانیزم‌های خاصی در جریان آشفته تحت اثر چه شرایط مرزی روی می‌دهند.

نکته جدید در این پژوهش در مقایسه با کارهای انجام یافته قبلی، بررسی فرایند توزیع مجدد انرژی در جریان آشفته تراکم‌ناپذیر در کانال است. به طور خاص اجزا تشکیل‌دهنده همبستگی بین فشار و نرخ کرنش مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین برای نخستین بار، معادله‌ای برای گشتاور دوم نوسان نرخ کرنش استخراج و تمامی عبارات موجود در آن با استفاده از نتایج DNS مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند.

ادامه این مقاله به ترتیب زیر سازمان یافته است؛ در بخش ۲ تئوری و معادلات حاکم ارائه شده‌اند. همچنین فرایند توزیع مجدد انرژی آشفتگی معرفی شده است. بخش ۳ روش‌های عددی مورد استفاده را به اختصار بیان می‌دارد. در بخش ۴ جزئیات شبیه‌سازی انجام شده ارائه و اعتبار نتایج به دست آمده نشان داده شده است. بخش ۵ به بررسی فرایند توزیع مجدد انرژی آشفتگی در جریان کانال شبیه‌سازی شده می‌پردازد. در بخش ۶، راهی برای مطالعه فرایند توزیع مجدد انرژی با جزئیات بیشتر ارائه شده است.

۲- تئوری و معادلات حاکم

جریان تراکم‌ناپذیر و تک‌دمای یک سیال نیوتنی در نظر گرفته می‌شود. دینامیک سیال توسط معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس توصیف می‌گردد:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

که در آن U_i ، p ، ρ و ν به ترتیب میدان سرعت لحظه‌ای، میدان فشار لحظه‌ای، چگالی و لزجت سینماتیکی هستند. در روابط فوق و در طول این مقاله، از قرارداد جمع اندیسی انشتین استفاده شده است، به این معنی که روی اندیس تکراری عمل جمع انجام می‌شود.

با تجزیه رینولدز می‌توان نوشت:

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i, \quad p = \langle p \rangle + p', \quad (3)$$

توجه شود که:

$$\frac{\overline{\partial(u_i u_i)}}{\partial t} = 2 \frac{\overline{\partial TKE}}{\partial t} \quad (15)$$

تانسور همبستگی فشار و نرخ کرنش یعنی R_{ij} در معادله ترابری تنش رینولدز (۷) وجود دارد، ولی در معادله ترابری انرژی جنبشی آشفته حذف می‌گردد. پس این عبارت نقشی در تولید و یا استهلاک انرژی جنبشی نداشته و تنها سبب انتقال انرژی جنبشی از یک مؤلفه تنش نرمال رینولدز به مؤلفه دیگر می‌گردد. به عنوان مثال، در جریان آشفته توسعه‌یافته در کانال، با توجه به تقارن‌ها و همگن بودن آماری مسئله در جهات موازی با دیوار، تنها مؤلفه غیر صفر عبارت تولید انرژی آشفتگی عبارت است از:

$$P_{11} = -\langle uw \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial z} \quad (16)$$

طبق معادله فوق، تولید انرژی آشفتگی تنها برای مؤلفه $\langle uu \rangle$ از تنش‌های نرمال رینولدز اتفاق می‌افتد. بنابراین چنانچه هیچ مکانیزم توزیع مجدد انرژی آشفتگی در جریان کانال وجود نداشته باشد، می‌بایست مؤلفه‌های $\langle vw \rangle$ و $\langle ww \rangle$ صفر باشند. این در حالی است که اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی و نتایج DNS نشان می‌دهند که این دو مؤلفه غیر صفر هستند. مکانیزم توزیع مجدد انرژی (همبستگی بین فشار و نرخ کرنش) مسئول این پدیده است.

با نگاهی به معادله (۱۰) در می‌یابیم که فشار نوسانی p' یکی از عوامل تشکیل‌دهنده تانسور همبستگی بین فشار و نرخ کرنش است. در واقع نوسان فشار راهی است که جریان آشفته از طریق آن فرایند توزیع مجدد انرژی را ایجاد می‌کند [۸].

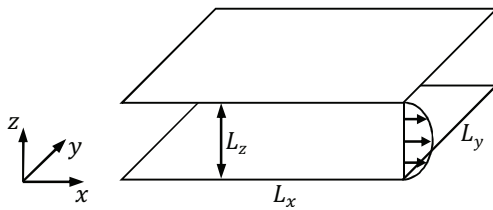
۳- روش‌های عددی برای شبیه‌سازی جریان

برای حل معادلات ناویر - استوکس تراکم‌ناپذیر (۱) و (۲)، از یک برنامه رایانه‌ای دینامیک سیالات محاسباتی که در انستیتوی هیدرومکانیک دانشگاه فنی مونیخ توسعه داده شده استفاده شده است [۹]. این کد از یک روش گسسته‌سازی حجم محدود مرتبه دوم در فضا و یک روش انتگرال‌گیری زمانی رونگه - کوتا مرتبه سوم با حافظه کم [۱۰] بهره می‌برد. معادله پواسون برای فشار در هر گام زمانی و در هر زیر گام رونگه - کوتا به طور مستقیم حل می‌شود. برای حل مستقیم از تبدیل فوریه در دو جهت پرئودیک و از یک حلگر سه قطری توماس (TDMA) در جهت عمود به دیوار استفاده شده است. حلگر فوق در دو نسخه برای سوپر رایانه‌های اسکالر و برداری برنامه‌نویسی و بهینه‌سازی شده که در این تحقیق از نسخه اسکالر آن استفاده شده است. متغیرهای جریان در یک شبکه

محاسباتی جابجا شده ذخیره شده‌اند. یعنی فشار در مرکز سلول و سرعت‌ها بر روی وجوه سلول ذخیره شده‌اند. حلگر جریان فوق به کمک روش تجزیه میدان و با استفاده از کتابخانه MPI برای پردازش موازی آماده شده است. در مرز هر زیر دامنه، شرایط مرزی با استفاده از سلول‌های گاوست تبادل می‌شوند.

۴- شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان کانال آشفته

جریان در شکل ۱ نشان داده شده است. شرایط مرزی به قرار زیر هستند. در جهت جریان x و در جهت عرضی y مرز پرئودیک داریم. در جهت عمود بر دیوار z هم شرط عدم لغزش اعمال شده است. جریان توسط یک گرادیان فشار ثابت در جهت جریان رانده می‌شود.



شکل (۱): هندسه، دستگاه مختصات و ابعاد کانال.

دامنه جریان شبیه‌سازی شده، یک مکعب مستطیل به ابعاد $(L_x, L_y, L_z) = (3\pi h, 2\pi h, 2h)$ است. این دامنه به وسیله یک شبکه محاسباتی کارترین که دارای $(N_x, N_y, N_z) = (128, 128, 128)$ سلول است، گسسته شده است. شبکه محاسباتی در مجموع شامل ۲۰۹۷۱۵۲ سلول است. شبکه در جهات همگن x و y یکنواخت بوده و در جهت z برای ایجاد دقت بیشتر در نزدیکی دیوار فشرده شده است. طبق رابطه:

$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} = -\frac{\tau_w}{h} \quad (17)$$

که در آن τ_w تنش برشی متوسط دیوار است، ضریب لزجت، چگالی و گرادیان فشار اعمالی چنان تنظیم شده‌اند که به عدد رینولدز برشی $Re_\tau = 180$ برسیم. عدد رینولدز برشی با رابطه زیر تعریف می‌شود:

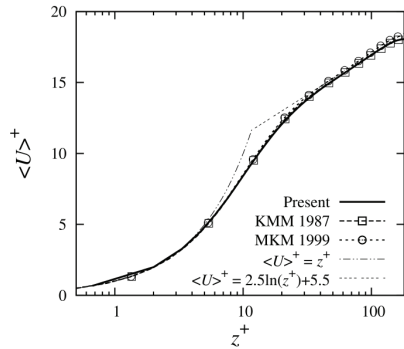
$$Re_\tau = \frac{\rho u_\tau h}{\mu} = \frac{u_\tau h}{\nu} \quad (18)$$

که در آن سرعت برشی u_τ با رابطه:

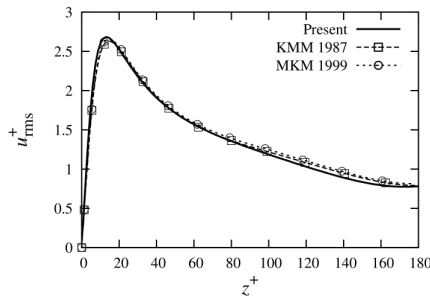
$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (19)$$

تعریف می‌گردد.

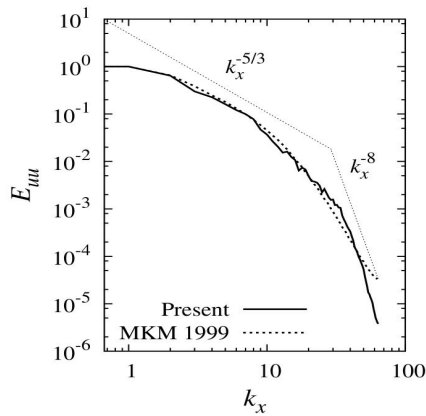
با استفاده از سرعت برشی u_τ می‌توان کمیات جریان آشفته را بی‌بعد نمود که به آن بی‌بعد کردن داخلی یا Ω



شکل (۲): نمایه سرعت متوسط در مقیاس داخلی.



شکل (۳): نمایه rms نوسان سرعت در جهت x .



شکل (۴): طیف یک بعدی انرژی آشفته در جهت x .

۵- نتایج DNS برای فرایند توزیع مجدد انرژی

با انتگرال‌گیری زمانی معادلات ناویر-استوکس در DNS برای یک مدت به نسبت طولانی، نمونه‌های آماری زیادی ذخیره شده‌اند که برای محاسبه کمیت‌های آماری جریان آشفته مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی از کمیت‌هایی که محاسبه شده است، تانسور همبستگی بین فشار و نرخ کرنش می‌باشد. تانسور R_{ij} به صورت زیر بی‌بعد می‌گردد:

$$R_{ij}^+ = \frac{\rho h}{\tau_w U_b} R_{ij} = \frac{h}{(u_\tau)^2 U_b} R_{ij}, \quad (22)$$

دریست گفته می‌شود. به عنوان مثال، سرعت متوسط $\langle U \rangle$ و فاصله از دیوار z را می‌توان به شکل زیر بی‌بعد کرد:

$$\langle U \rangle^+ = \frac{\langle U \rangle}{u_\tau}, \quad z^+ = \frac{\rho u_\tau z}{\mu} = \frac{u_\tau z}{\nu}. \quad (20)$$

چنانچه فواصل میان نقاط گرهی در مقیاس درونی دیوار نشان داده شوند، خواهیم داشت:

$$(\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z_{\min}^+) = (13/25, 8/84, 0/675), \quad (21)$$

که در آن Δz_{\min}^+ فاصله نزدیک‌ترین گره محاسباتی به دیوار در جهت z است. اعداد ارائه شده در رابطه (۲۱) در انطباق با مقادیر توصیه شده در [۱۱] برای انجام DNS جریان آشفته کانال می‌باشند.

گام زمانی Δt به کار رفته برای شبیه‌سازی به صورت $\Delta \tilde{t} = \Delta t \cdot U_b/h$ بی‌بعد شده است که در آن U_b سرعت متوسط حجمی گذرنده از کانال است. در شبیه‌سازی حاضر گام زمانی بی‌بعد به اندازه $\Delta \tilde{t} = 0.1$ در نظر گرفته شده که شرط $CFL \leq 0.5$ را تضمین می‌کند. برای گزارش بازه زمانی تولید داده‌ها از واحد جریانی $T_{FT} = L_x/U_b$ استفاده می‌شود. در شبیه‌سازی حاضر ابتدا به مدت ۵۰ برابر T_{FT} به جریان اجازه داده شده تا توسعه پیدا کند و سپس جریان به طور کامل توسعه‌یافته برای مدت ۲۰ برابر T_{FT} شبیه‌سازی شده تا نمونه‌های آماری ذخیره شوند.

اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از DNS موجود با مقایسه با نتایج DNS دیگر پژوهشگران انجام می‌گیرد. شکل ۲ نمایه سرعت متوسط را در مقیاس داخلی دیوار نشان می‌دهد. تنش نرمال رینولدز در جهت x نیز در شکل ۳ نشان داده شده است. همچنین شکل ۴ طیف یک بعدی انرژی جنبشی آشفته ناشی از نوسان‌های سرعت در جهت x را به عنوان تابعی از اندازه مقیاس‌های جریان در جهت x نشان می‌دهد. تطابق بسیار خوبی بین نتایج موجود و نتایج مرجع کیم^۱ و همکاران [۱۲] و موزر^۲ و همکاران [۱۳] مشاهده می‌گردد که تأییدکننده کیفیت DNS انجام شده است. به طور خاص، طیف انرژی در شکل ۴ نشان می‌دهد که مقیاس‌های کوچک آشفتگی (مقیاس کولموگوروف) به خوبی حل شده‌اند، چرا که استهلاک انرژی با شیب ۷- یا ۸- به خوبی مشاهده می‌گردد. همچنین شیب ۵/۳- در ناحیه مقیاس‌های لخت نیز دیده می‌شود که البته طول آن به دلیل کوچک بودن نسبی عدد رینولدز کوتاه است.

1- Kim
2- Moser

در ادامه، جزئیات R_{11} را در نظر می‌گیریم. تحلیل دیگر مؤلفه‌ها به طور مشابهی انجام می‌شود که در اینجا برای رعایت اختصار به آنها پرداخته نمی‌شود. برای R_{11} رابطه زیر برقرار است:

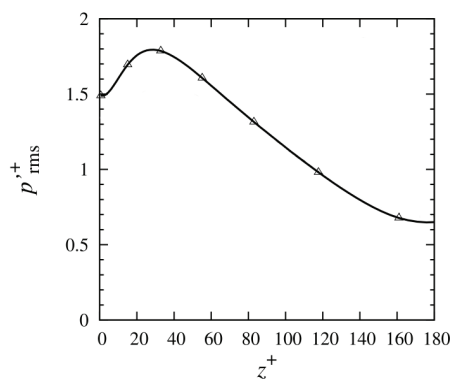
$$R_{11} = p'_{rms} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{rms} R \left\{ p', \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \quad (23)$$

که در آن $R \left\{ p', \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$ ضریب همبستگی بین نوسان فشار و نوسان نرخ کرنش می‌باشد. سه کمیت موجود در سمت راست معادله (۲۳) در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ نشان داده و در زیر بررسی شده‌اند.

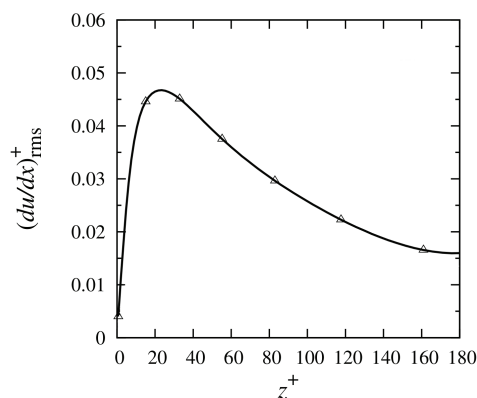
شکل ۷ نمایه rms نوسان فشار در عرض کانال را نشان می‌دهد. بیشینه نوسان‌های فشار در حدود $z^+ = 25$ اتفاق می‌افتد. این همان جایی است که بیشینه قدر مطلق همبستگی بین فشار و نرخ کرنش و در نتیجه بیشترین توزیع مجدد انرژی واقع می‌شود. نوسان فشار با رابطه زیر بی‌بعد می‌گردد:

$$p'^+_{rms} = \frac{p'_{rms}}{\tau_w} = \frac{p'_{rms}}{\rho(u_\tau)^2} \quad (24)$$

نمایه rms نوسان نرخ کرنش در شکل ۸ رسم شده است. نوسان‌های نرخ کرنش نیز در حدود $z^+ = 22$ به بیشینه مقدار خود می‌رسد که این نیز، همانند آنچه که برای نوسان فشار مشاهده شد، منطبق بر بیشینه توزیع مجدد انرژی جنبشی می‌باشد.



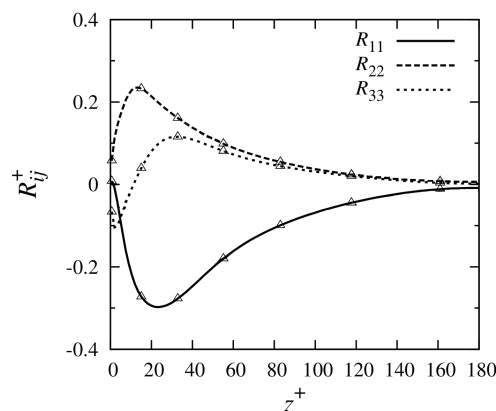
شکل (۷): نمایه rms نوسان فشار به عنوان تابع فاصله از دیوار.



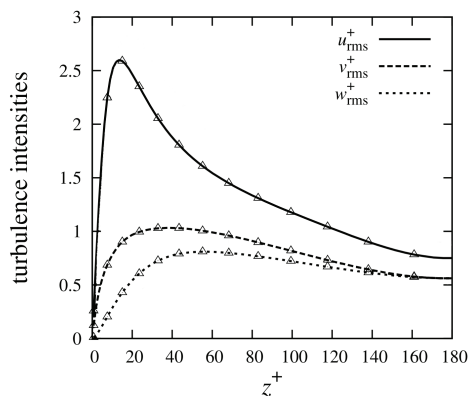
شکل (۸): نمایه rms نوسان نرخ کرنش به عنوان تابع فاصله از دیوار.

که در آن U_b سرعت متوسط گذرنده از کانال است. جمع عناصر روی قطر اصلی تانسور R_{ij} از نظر تئوری باید صفر باشد. در نتایج به دست آمده، بیشینه جمع عناصر روی قطر اصلی تانسور R_{ij} برابر با $10^{-8} \times 1/6$ است که نشان‌دهنده دقت بالای حل معادله پواسون برای فشار در شبیه‌سازی انجام شده می‌باشد.

شکل ۵ عناصر روی قطر اصلی تانسور R_{ij} را نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد که R_{11} در تمام عرض کانال منفی است. این بدین معناست که توسط این مؤلفه، انرژی جنبشی آشفتگی از تنش رینولدز نرمال $\langle uu \rangle$ گرفته می‌شود. همچنین دیده می‌شود که R_{22} و R_{33} تقریباً در همه جای کانال مثبت هستند. تنها در ناحیه باریکی در نزدیکی دیوار R_{33} منفی است. بدین ترتیب، انرژی جنبشی که توسط R_{11} از $\langle uu \rangle$ استخراج می‌شود به وسیله R_{22} و R_{33} به ترتیب به $\langle vv \rangle$ و $\langle ww \rangle$ تزریق می‌گردد. در ضمن مقدار R_{22} از R_{33} بیشتر است، به همین دلیل $\langle vv \rangle$ از $\langle ww \rangle$ مطابق شکل ۶ بیشتر می‌باشد.



شکل (۵): عناصر روی قطر اصلی تانسور همبستگی بین فشار و نرخ کرنش.



شکل (۶): نمایه‌های rms نوسان سرعت در سه جهت.

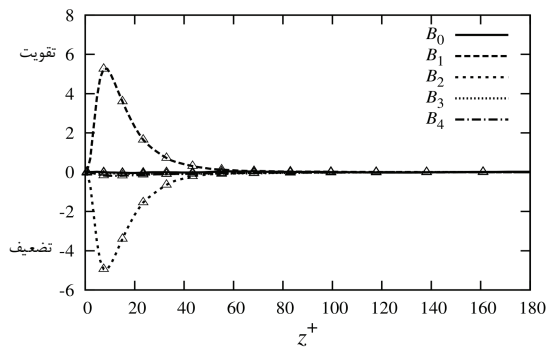
(۲۵)، معادله ترابری نرخ کرنش است نه نوسان نرخ کرنش. اما به دلیل همگنی آماری جریان کانال داریم:

$$\frac{\partial(U)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (۳۲)$$

بنابراین، معادله (۲۵)، معادله ترابری برای نوسان نرخ کرنش نیز هست. همچنین توجه شود که:

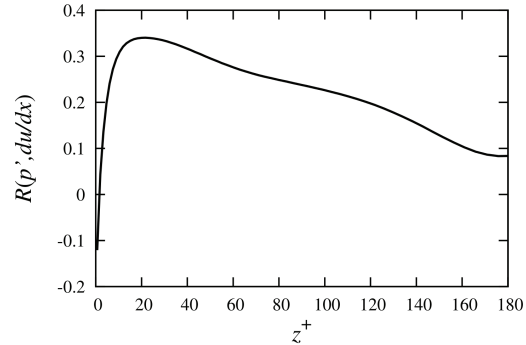
$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\text{rms}} = \sqrt{\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \rangle} \quad (۳۳)$$

عبارات B_0 تا B_4 در جریان کانال از نتایج DNS محاسبه شده و در ادامه بررسی می‌گردند. شکل ۱۰ عبارات موجود در سمت راست معادله (۲۵) به دست آمده از DNS را نشان می‌دهد که آن را بودجه نوسان نرخ کرنش می‌نامیم. مقادیر مثبت سبب تقویت این نوسان‌ها گشته و مقادیر منفی سبب تضعیف آنها می‌گردند. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، دو سهم بزرگ از آن B_1 و B_2 هستند. فرایند خود اندرکنش، یعنی اندرکنش غیرخطی میدان نوسان نرخ کرنش با خودش سبب ایجاد این نوسان می‌گردد. این مکانیزم شبیه به بسیاری از مکانیزم‌های آشفتگی بوده که در آن اندرکنش غیرخطی سبب تولید کمیت آشفته می‌گردد، مانند مکانیزم تولید تنش‌های رینولدز و نیز مکانیزم تولید انرژی آشفتگی. از طرف دیگر بیشترین استهلاك نوسان نرخ کرنش از طریق اثر رورتیسیته محلی صورت می‌گیرد. از آنجا که سهم اندرکنش میدان فشار و استهلاك لزج کوچک بوده و در شکل ۱۰ به خوبی دیده نمی‌شود، آنها در شکل ۱۱ به تنهایی ترسیم شده‌اند. هر دو مکانیزم سبب کاهش نوسان در نرخ کرنش می‌گردند. سهم عبارت شار نرخ کرنش ناچیز بوده و قابل صرف‌نظر است. این نتیجه نیز شبیه به مکانیزم شار در بودجه تنش‌های رینولدز می‌باشد.



شکل (۱۰): بودجه نوسان نرخ کرنش تابعی از فاصله از دیوار.

نمایه ضریب همبستگی بین نوسان فشار و نرخ کرنش نیز در شکل ۹ ترسیم شده است. دیده می‌شود که این ضریب در زیر لایه لزج منفی بوده، سپس مثبت شده و در نهایت حدود $z^+ = 20$ به بیشینه مقدار خود می‌رسد. سپس کاهش می‌یابد و در مرکز کانال مقدار آن به زیر ۰/۱ می‌رسد.



شکل (۹): ضریب همبستگی بین نوسان‌های فشار و نرخ کرنش.

تحلیل جزئی‌تر نوسان نرخ کرنش با بررسی بودجه آن در میدان جریان امکان‌پذیر است. این کار برای نخستین بار توسط نویسنده برای مطالعه کاهش درگ به کمک فیبرها (جریان آشفته سیال غیرنیوتنی) صورت گرفته است [۱۴]. در اینجا این روش برای مطالعه جریان آشفته سیال نیوتنی به کار می‌رود. معادله زیر برای گشتاور دوم نوسان نرخ کرنش از معادلات حرکت ناویر-استوکس توسط نویسنده استخراج شده است [۱۴]:

$$\frac{\overline{D}(f^2)}{Dt} = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \quad (۲۵)$$

که در آن:

$$f = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \langle f^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \quad (۲۶)$$

$$B_0 = -\langle u_k \frac{\partial f^2}{\partial x_k} \rangle \quad (۲۷)$$

$$B_1 = -\langle 2f(f^2 + D_{12}^2 + D_{13}^2) \rangle \quad (۲۸)$$

$$B_2 = \frac{1}{4} \langle 2f(\omega_y^2 + \omega_z^2) \rangle \quad (۲۹)$$

$$B_3 = -\frac{1}{\rho} \langle 2f \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \rangle \quad (۳۰)$$

$$B_4 = \nu \langle 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} \rangle \quad (۳۱)$$

در معادله (۲۵)، عبارات B_0 تا B_4 به ترتیب شار f ، عبارت خود اندرکنش، اثر رورتیسیته محلی، اثر محلی و غیرمحلی توسط میدان فشار و استهلاك لزج است. توجه شود که معادله

برای راحتی معادله پواسون فوق به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z), \quad (38)$$

که در آن تابع $f(x, y, z)$ به عنوان:

$$f = -2 \frac{\partial \langle U \rangle \partial w}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle), \quad (39)$$

تعریف می‌گردد.

حال با در نظر گرفتن پریودیک بودن جریان کانال در جهات x و y ، می‌توان از معادله پواسون (۳۸) در این دو جهت تبدیل فوریه گرفت:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \hat{p}'(k_x, k_y, z) = \hat{f}(k_x, k_y, z), \quad (40)$$

که در آن $\hat{p}'(k_x, k_y, z)$ و $\hat{f}(k_x, k_y, z)$ به ترتیب تبدیل فوریه توابع $p'(x, y, z)$ و $f(x, y, z)$ در جهات x و y هستند. k_x و k_y به ترتیب اعداد موج در جهات x و y می‌باشند. همچنین داریم:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (41)$$

شرط مرزی زیر برای معادله پواسون (۴۰) را می‌توان از معادلات ناویر - استوکس استخراج نمود:

$$\left. \frac{d\hat{p}'}{dz} \right|_{\text{دیوار}} = \mu \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad (42)$$

که در آن μ ضریب لزجت دینامیکی سیال است.

برای هر عدد موج k_x و k_y ، می‌توان معادله دیفرانسیل (۴۰) را حل نمود و به کمک تبدیل فوریه معکوس، میدان نوسان فشار را به دست آورد. معادله خطی (۴۰) را می‌توان به کمک یک تابع گرین حل نمود. تابع گرین یک معادله دیفرانسیلی، پاسخ آن معادله به ورودی یک تابع ضربه یا همان دلتای دیراک است. تابع گرین $\hat{G}(k, z, z')$ برای اپراتور دیفرانسیلی موجود در معادله (۴۰) توسط کیم [۸] داده شده است. برای $k \neq 0$ ، تابع گرین عبارت است از:

$$\hat{G} = -\frac{\cosh[k(z' - 1)] \cosh[k(z + 1)]}{2k \cosh(k) \sinh(k)}. \quad (43)$$

چنانچه $z < z'$ باشد و برابر است با:

$$\hat{G} = -\frac{\cosh[k(z' + 1)] \cosh[k(z - 1)]}{2k \cosh(k) \sinh(k)}. \quad (44)$$

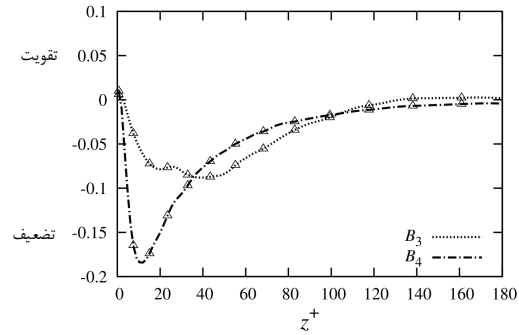
چنانچه $z > z'$ برای حالت $k = 0$ ، تابع گرین با روابط زیر داده می‌شود:

$$\hat{G}(z, z') = \frac{1}{2} (z' - z). \quad (45)$$

چنانچه $z < z'$ باشد و برابر است با:

$$\hat{G}(z, z') = \frac{1}{2} (z - z'). \quad (46)$$

چنانچه $z > z'$ باشد. طبق تئوری توابع گرین، پاسخ معادله پواسون (۴۰) با انتگرال پیچش (کانولوشن) طبق رابطه (۴۷) داده می‌شود:



شکل (۱۱): اندرکنش با میدان فشار و استهلاک لزج در بودجه نوسان نرخ کرنش.

۶- محاسبه همبستگی بین نوسان فشار و نرخ کرنش از روش نیمه تحلیلی

برای به دست آوردن همبستگی بین فشار و نرخ کرنش دو راه وجود دارد؛ راه اول محاسبه آن با استفاده از نتایج DNS است. بدین ترتیب که میدان جریان لحظه‌ای برای مدتی به نسبت طولانی شبیه‌سازی شده و سپس تانسور $R_{ij} = \langle p' s'_{ij} \rangle / \rho$ با میانگین‌گیری از حاصل ضرب نوسان فشار در نوسان نرخ کرنش محاسبه می‌گردد. نتایج حاصل از این روش در بخش قبلی ارائه شد.

راه دوم برای محاسبه R_{ij} استخراج معادله حاکم بر آن و سپس حل آن معادله است. برای استخراج معادله حاکم بر R_{ij} ابتدا معادله حاکم بر فشار را در نظر می‌گیریم. با دیورژانس گرفتن از طرفین معادله اندازه حرکت (۲)، معادله پواسون زیر برای فشار به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} = -\frac{\partial U_i \partial U_j}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (34)$$

همچنین دیورژانس گرفتن از معادله اندازه حرکت

متوسط (۵)، معادله زیر را برای فشار متوسط می‌دهد:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial x_j \partial x_j} = -\frac{\partial \langle U_i \rangle \partial \langle U_j \rangle}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (35)$$

با کم کردن معادله (۳۵) از معادله (۳۴)، به معادله پواسون

زیر برای نوسان فشار می‌رسیم:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j \partial x_j} = -2 \frac{\partial \langle U_i \rangle \partial u_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle). \quad (36)$$

با در نظر گرفتن اینکه جریان کانال در جهت اصلی جریان

x و در جهت عرضی y از نظر آماری همگن است، معادله (۳۶)

برای جریان کانال به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j \partial x_j} = -2 \frac{\partial \langle U \rangle \partial w}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle). \quad (37)$$

تانسور همبستگی بین فشار و نرخ کرنش با استفاده از تحلیل آماری نتایج DNS محاسبه شده است. نشان داده شد که انرژی جنبشی تولید شده در جهت اصلی جریان، از طریق این همبستگی به دو مؤلفه دیگر منتقل می‌شود. همچنین اجزای این همبستگی یعنی نوسان فشار، نوسان نرخ کرنش و ضریب همبستگی میان آنها بررسی و تحلیل شده است. برای تحلیل نوسان نرخ کرنش، معادله‌ای برای آن استخراج گشته و اجزای آن بررسی شده‌اند. در نهایت، همبستگی بین نوسان فشار و نرخ کرنش از یک روش نیمه تحلیلی بر پایه توابع گرین محاسبه شده و نتایج آن با آمار DNS مقایسه گشته است. تطابق خوبی میان نتایج این دو روش مشاهده شد.

۸- مراجع

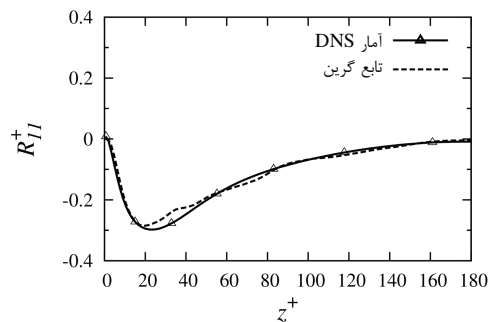
1. Kline, S.J., Reynolds, W.C., Schraub, F.A., and Runstadler, P.W. "The Structure of Turbulent Boundary Layers", J. Fluid Mech. Vol. 30, pp. 741-773, 1967.
2. Kim, H.T., Kline, S.J., and Reynolds, W.C. "The Production of Turbulence Near a Smooth Wall in a Turbulent Boundary Layer", J. Fluid Mech. Vol. 50, pp. 133-160, 1971.
3. Smits, A.J., McKeon, B.J., and Marusic, I. "High-Reynolds Number Wall Turbulence", Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 43, pp. 353-375, 2011.
4. Moin, P. "Advances in Large Eddy Simulation Methodology for Complex Flows", Int. J. Heat Fluid Flow, Vol. 23, pp. 710-720, 2002.
5. Foyi, H., Sarkar, S., and Friedrich, R. "Compressibility Effects and Turbulence Scalings in Supersonic Channel Flow", J. Fluid Mech. Vol. 509, pp. 207-216, 2004.
6. Moin, P., and Mahesh, K. "Direct Numerical Simulation: a Tool in Turbulence Research", Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 30, pp. 539-578, 1998.
7. Friedrich, R., Hüttl, T.J., Manhart, M., and Wagner, C. "Direct Numerical Simulation of Incompressible Turbulent Flows", Comput. Fluids, Vol. 30, pp. 555-579, 2001.
8. Kim, J. "On the Structure of Pressure Fluctuations in Simulated Turbulent Channel Flow", J. Fluid Mech., Vol. 205, pp. 421-451, 1989.
9. Manhart, M., Tremblay, F., and Friedrich, R. "MGLET: A Parallel Code for Efficient DNS and LES of Complex Geometries" in Parallel Computational Fluid Dynamics 2000, pp. 449-456, 2001.
10. Williamson, J.H. "Low-Storage Runge-Kutta Schemes", J. Comput. Phys. Vol. 35, pp. 48-56, 1980.
11. Wagner, C., Hüttl, T.J., and Sagaut, P. "Large-Eddy Simulation for Acoustics", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

$$p'(x, y, z) = \int_{L_z} G * f(x, y, z, z') dz', \quad (47)$$

که در آن انتگرال بر روی عرض کانال L_z (فاصله بین دو دیوار) گرفته شده و پیش $G * f$ همان تبدیل فوریه معکوس $\hat{G}(k_x, k_y, z') \hat{f}(k_x, k_y, z')$ می‌باشد. تبدیل مستقیم و معکوس فوریه را می‌توان به سرعت با استفاده از تکنیک FFT انجام داد. بدین ترتیب، تانسور همبستگی بین فشار و نرخ کرنش از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$R_{ij}(z) = \frac{1}{\rho} \langle p' s'_{ij} \rangle = \int_{L_z} \langle G * f s'_{ij} \rangle(z, z') dz'. \quad (48)$$

روش توصیف شده در فوق برای محاسبه تانسور همبستگی بین فشار و نرخ کرنش در کد فرتن مورد استفاده برای DNS برنامه‌نویسی شده است. برای انجام FFTهای مورد نیاز، از کتابخانه MKL که توسط اینتل توسعه داده شده بهره برده‌ایم. همبستگی محاسبه شده از طریق نیمه تحلیلی فوق در شکل ۱۲ ترسیم و با نتیجه به دست آمده از تحلیل آماری DNS مقایسه شده است. نمودار به دست آمده از تابع گرین به اندازه نمودار به دست آمده از DNS هموار نیست. دلیل آن این است که تعداد نمونه‌های آماری برای محاسبه آن به اندازه کافی بالا نبوده است. برای محاسبه این نمودار از تقریباً ۱۶۰۰۰ نمونه آماری استفاده شده است. به دلیل حجم بالای محاسبات امکان جمع‌آوری نمونه‌های بیشتر نبود. با این حال، تطابق بسیار خوبی بین دو نمودار مشاهده می‌گردد که تأییدی دیگر بر صحت نتایج نشان داده شده است.



شکل (۱۲): همبستگی بین فشار و نرخ کرنش به دست آمده از روش نیمه‌تحلیلی و مقایسه آن با تحلیل آماری نتایج DNS.

۷- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، فرایند توزیع مجدد انرژی آشفتگی با استفاده از شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان آشفته در یک کانال در عدد رینولدز برشی $Re_\tau = 180$ بررسی شده است. برای این منظور،

12. Kim, J., Moin, P., and Moser, R.D. "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Numbers", *J. Fluid Mech.*, Vol. 177, pp. 133-166, 1987.
13. Moser, R.D., Kim, J., and Mansour, N.N. "Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow up to $Re_\tau=590$ ", *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 943-945, 1999.
14. Moosaie, A. "Direct Numerical Simulation of Turbulent Drag Reduction by Rigid Fiber Additives", PhD Thesis, Tech. Uni. München, 2011.