

انتخاب الگوریتم هدایت مبتنی بر زاویه خط دید در

سامانه‌های هدایت

ولی‌اله غفاری

استادیار، مهندسی برق، دانشگاه خلیج فارس، vghaffari@pgu.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۲۷، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۶)

چکیده:

در سامانه‌های هدایت مبتنی بر زاویه خط دید، معمولاً معادله‌ی هدایت با یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی بیان می‌گردد. الگوریتم‌های هدایت کارآمد با تضمین پایداری حلقه هدایت، زاویه‌ی سمت جسم را به گونه‌ای تغییر می‌دهند تا تغییرات زاویه‌ی خط دید در کمترین زمان ممکن صفر گردد. بنابراین، با استفاده از نظریه‌ی سامانه‌های غیرخطی، قانون هدایت می‌بایست به گونه‌ای طراحی گردد تا زاویه‌ی خط دید مقدار ثابتی (بدون تغییر) شود. در این روش، فرمان هدایت به صورت شتاب جانبی محاسبه و به آن جسم اعمال می‌گردد. در پیاده‌سازی عملی این قوانین هدایت، بایستی شتاب جانبی محاسبه‌شده به فرمان زاویه‌ی سمت جسم تبدیل شود. در این مقاله، ابتدا فرمان زاویه‌ی سمت جسم در قانون هدایت تناسبی تعیین شده و سپس، سعی می‌گردد تا قانون هدایت به گونه‌ای تغییر یابد تا با تضمین پایداری حلقه هدایت و حجم محاسبات کمتر، فرمان زاویه‌ی سمت تولید شود. روش پیشنهادی در یک سناریوی هدایت به صورت عددی شبیه‌سازی و کارآمدی آن نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: زاویه خط دید، قانون هدایت، سیستم هدایت.

Guidance algorithm selection based on line of sight angle in guidance systems

Valiollah Ghaffari

Assistant Professor, Persian Gulf University, vghaffari@pgu.ac.ir

(Submitted: 2017/Nov /18; Accepted 2018/Jan/06)

Abstract:

Usually guidance systems based on the Line of sight (LOS) angle are described by an ordinary differential equation. Guidance algorithms attempt to nullify the LOS rate while the closed loop stabilities guaranteed. Using the nonlinear system stability theory, the guidance law is designed such that the LOS angle would be a constant. Hence the guidance commands are applied to the vehicle actuators in term of some lateral accelerations. In practical implementation of the guidance law, the accelerations must be translated into the vehicle angles. Therefore proportional navigation (PN) guidance law firstly investigated in this paper. Then the PN guidance law is corrected such that the vehicle angle would be a constant while the closed loop stability is guaranteed and less computational effort is used. A numerical example is provided to show the efficiency of proposed procedures.

Keywords: Line of sight angle, guidance law, guidance system.

امروزه، با پیشرفت شگرف علم و رشد تکنولوژی، نقش سامانه‌های هدایت کارآمد، در اجسام متحرک از قبیل ربات، هواپیما، کشتی و خودروی بدون سرنشین بدیهی و ضروری می‌باشد. الگوریتم هدایت، مسیر حرکت جسم را به گونه‌ای تعیین می‌نماید تا آن جسم در زمان مناسب به هدف مورد نظر برسد. الگوریتم‌های متنوعی در امر هدایت اجسام متحرک پیشنهاد شده است. روش‌های از قبیل هدایت خط دید، هدایت اینرسی، لیزری، سیمی و تعقیب از معروف‌ترین و پُرکاربردترین نوع هدایت می‌باشند [۱، ۲].

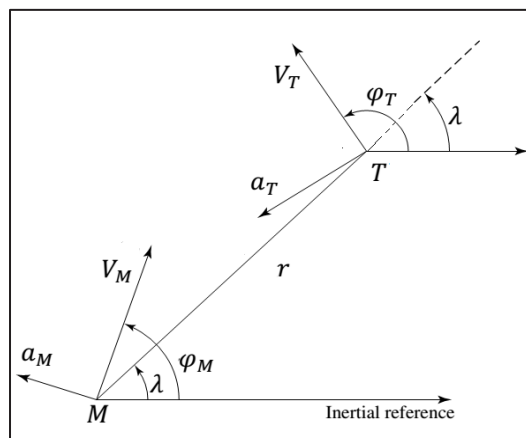
در مطالعات موجود، غالب سامانه‌های هدایت مبتنی بر زاویه‌ی خط دید می‌باشند. در این روش، فرمان هدایت به گونه‌ای تولید می‌گردد تا در حین حرکت تغییرات زاویه‌ی خط دید جسم و هدف صفر گردد. در یک سناریوی هدایت، به معمولاً سرعت جسم از سرعت هدف بیشتر می‌باشد. بنابراین، اگر زاویه‌ی خط دید مقدار ثابتی شود آن وقت اگر جسم با حفظ زاویه فعلی حرکت نماید به هدف مورد نظر خواهد رسید. ساده‌ترین نوع هدایت خط دید، هدایت تناسبی PN می‌باشد. در این روش، متناسب با تغییرات زاویه‌ی خط دید سرعت نزدیک‌شوندگی جسم به هدف فرمان هدایت برای جسم تولید می‌گردد [۳]. قانون هدایت تناسبی، با حفظ پایداری حلقه هدایت، تغییرات زاویه‌ی خط دید را صفر نموده و در نهایت جسم به هدف مورد نظر خواهد رسید. در یک سیستم هدایت، با توجه به اینکه سرعت جسم از هدف معمولاً بیشتر است اگر زاویه‌ی خط دید، مقدار ثابتی شود آن وقت جسم به هدف خواهد رسید. در یک سیستم کنترل، قانون کنترل بایستی به گونه طراحی شود تا خطا صفر شود و خروجی سیستم از سیگنال مطلوب پیروی نماید. در سامانه‌های هدایت مبتنی بر خط دید نیز قانون هدایت بایستی به گونه‌ای طراحی شود تا تغییرات زاویه‌ی خط دید صفر گردد [۴].

با مقایسه‌ی طراحی سیستم هدایت با سیستم کنترل، می‌توان طراحی قانون هدایت در سامانه‌های هدایت مبتنی بر خط دید، به مسأله‌ی طراحی کنترل تبدیل شود. بنابراین، از مفاهیم و روش‌های موجود در تحلیل و طراحی سامانه‌های غیرخطی از قبیل نظریه‌ی پایداری لیاپانف، خطی‌سازی و ... می‌تواند برای طراحی قانون هدایت کارآمد استفاده نمود [۵].

در بین مطالعات موجود الگوریتم‌های هدایت مختلفی مبتنی بر زاویه‌ی خط دید پیشنهاد شده است. از آن جمله می‌توان به طراحی قانون هدایت مبتنی بر لیاپانف [۶]، مدل‌گزشی [۷]، گام به عقب [۸، ۹]، بهینه [۱۰]، مقاوم [۱۱]، پایدار در زمان محدود [۱۲-۱۴]، منطق فازی [۱۵، ۱۶] و ... اشاره نمود. در این پژوهش‌ها معمولاً فرمان هدایت از جنس شتاب جانبی بوده که می‌بایست به جسم اعمال گردد. در پیاده‌سازی عملی این قوانین هدایت، باید فرمان شتاب جانبی به زاویه‌ی سمت مورد نظر تبدیل گردد. روشن است در چنین رویکردی حجم محاسبات زیادی وجود دارد. بنابراین، در این مقاله به منظور پیاده‌سازی عملی قانون هدایت، خروجی الگوریتم‌های هدایت با تبدیل مناسب به فرمان زاویه‌ی جسم بیان می‌گردد. با استفاده از نامساوی‌های ریاضی، قانون هدایت به گونه‌ای اصلاح می‌گردد تا با تضمین پایداری حلقه‌ی هدایت، محاسبات کمتری برای تولید زاویه‌ی جسم انجام گیرد. ساختار مقاله به قرار زیر می‌باشد. ابتدا، یک مسأله‌ی هدایت دُبعدی در بخش ۲ مطرح و فرموله شده است. در بخش ۳ تعدادی الگوریتم هدایت مبتنی بر خط دید پیشنهاد شده است. روش‌های مطرح‌شده در یک سناریوی هدایت به صورت عددی در بخش ۴ شبیه‌سازی شده است. در نهایت در بخش ۵ نتیجه‌گیری مقاله گنجانیده شده است.

۲- بیان مسأله

در دستگاه مختصات اینرسی مسأله‌ی رهگیری دُبعدی، به صورت شکل زیر نشان داده می‌شود:



شکل (۱): شماتیک مسأله‌ی رهگیری در دستگاه مختصات اینرسی.

$$\dot{\phi}_M = \frac{u}{V_M \cos(\lambda - \phi_M)} \quad (۵)$$

همچنین، زاویه‌ی هدف ϕ_T بر حسب شتاب جانبی جسم و هدف (w و u) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{\phi}_T = \frac{w}{V_T \cos(\lambda - \phi_T)} \quad (۶)$$

بنابراین، رابطه‌ی (۳) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی گردد:

$$\ddot{r} = r\dot{\lambda}^2 + w_r - u_r \quad (۷)$$

و همچنین، رابطه‌ی (۴) نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$r\ddot{\lambda} = -2\dot{r}\dot{\lambda} + w - u \quad (۸)$$

در یک حلقه هدایت، فرمان هدایت $u(t)$ بایستی به گونه‌ای انتخاب گردد تا زاویه‌ی خط $\lambda(t)$ دید تغییراتی نداشته و مقدار ثابتی گردد ($\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\lambda}(t) = 0$). پس، با تعریف متغیر جدید سرعت نزدیک شونده‌ی $v_c = -\dot{r}$ خواهیم داشت:

$$v_c = V_M \cos(\lambda - \phi_M) - V_T \cos(\lambda - \phi_T) \quad (۹)$$

در رابطه‌ی (۹)، ارتباط جبری بین سرعت نزدیک‌شونده‌ی جسم به هدف بر حسب سایر پارامترهای سیستم هدایت بیان شده است. همچنین، با تعریف متغیر $x = \dot{\lambda}$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{1}{r} (V_M \sin(\lambda - \phi_M) - V_T \sin(\lambda - \phi_T)) \quad (۱۰)$$

ارتباط جبری تغییرات زاویه‌ی خط دید با سایر پارامترها نیز در رابطه (۱۰) دیده می‌شود. با توجه به رابطه (۷)، دینامیک تغییرات زاویه‌ی خط دید می‌تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$\dot{x} = \frac{1}{r} (2v_c x + w - u) \quad (۱۱)$$

در این رابطه، v_c سرعت نزدیک‌شونده‌ی جسم به هدف می‌باشد. برای طراحی قانون هدایت از رابطه‌ی (۱۱) و برای شبیه‌سازی سیستم هدایت از معادله دیفرانسیل‌های (۱)، (۲)، (۵) و (۶) استفاده می‌شود. می‌توان قانون هدایت مناسب $u(t)$ ، $t \in [t_0 \quad t_f]$ برای این سیستم هدایت طراحی شود که با تضمین پایداری حلقه هدایت، تغییرات زاویه‌ی خط دید $\dot{\lambda}(t)$ نیز صفر شود. پس زاویه‌ی خط دید مقدار ثابتی می‌گردد. بدیهی است که اگر جسم با حفظ زاویه فعلی حرکت نماید به هدف مورد نظر خواهد رسید.

در این نمایش r فاصله نسبی جسم با هدف، V_T و V_M به ترتیب بیانگر سرعت جسم و سرعت هدف می‌باشد. برای سادگی تحلیل و طراحی قانون هدایت فرض می‌شود سرعت جسم و سرعت هدف مقادیر ثابتی می‌باشد. همچنین، ϕ_T و ϕ_M به ترتیب بیانگر زاویه‌ی جسم و زاویه‌ی هدف در دستگاه مختصات اینرسی می‌باشد. زاویه‌ی خط دید جسم با هدف در دستگاه مختصات اینرسی با λ مشخص شده است. برخی از سناریوهای هدایت مانند مسیریابی ربات و خودروی بدون سرنشین ذاتاً در دستگاه مختصات دوبعدی مطرح می‌شود. اما شکل ۱ می‌تواند به صورت سه‌بعدی تعمیم یابد و مسأله‌ی تحلیل پایداری و طراحی قانون هدایت در دستگاه مختصات سه‌بعدی نیز مطالعه گردد [۱۷، ۱۸].

در این مقاله، برای سادگی، مسأله‌ی هدایت دوبعدی مطالعه شده است. مطابق شکل ۱، سرعت نسبی بین جسم و هدف در راستای زاویه‌ی خط دید به صورت زیر نوشته می‌شود [۱]:

$$\dot{r} = V_T \cos(\lambda - \phi_T) - V_M \cos(\lambda - \phi_M) \quad (۱)$$

همچنین، معادله‌ی سرعت در راستای عمود بر زاویه‌ی خط دید به صورت زیر بیان می‌گردد [۱]:

$$r\dot{\lambda} = -V_T \sin(\lambda - \phi_T) + V_M \sin(\lambda - \phi_M) \quad (۲)$$

اگر زمان فعال شدن قانون هدایت t_0 و لحظه‌ی رسیدن جسم به هدف t_f باشد. معادلات حرکت ذکر شده در روابط (۱) و (۲) در بازه‌ی زمانی $t \in [t_0 \quad t_f]$ مطالعه می‌گردد. با مشتق‌گیری از معادله‌های (۱) و (۲)، شتاب نسبی جسم و هدف در راستای زاویه‌ی خط دید به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\ddot{r} = r\dot{\lambda}^2 + V_T \dot{\phi}_T \sin(\lambda - \phi_T) - V_M \dot{\phi}_M \sin(\lambda - \phi_M) \quad (۳)$$

همچنین، به طریق مشابه، معادله شتاب در راستای عمود بر زاویه‌ی خط دید به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$r\ddot{\lambda} = -2\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{\phi}_T V_T \cos(\lambda - \phi_T) - \dot{\phi}_M V_M \cos(\lambda - \phi_M) \quad (۴)$$

با تعریف متغیرهای زیر

$$\begin{aligned} w &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\phi}_T V_T \cos(\lambda - \phi_T) \\ u &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\phi}_M V_M \cos(\lambda - \phi_M) \\ w_r &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\phi}_T V_T \sin(\lambda - \phi_T) \\ u_r &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\phi}_M V_M \sin(\lambda - \phi_M) \end{aligned}$$

زاویه‌ی جسم ϕ_M بر حسب مؤلفه‌های شتاب جسم و

هدف (w و u) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\varphi_M(t) = \varphi_M(t_0) + \int_{t_0}^t \rho(\tau) \dot{\varphi}_T(\tau) d\tau + N \int_{t_0}^t (1 - \rho(\tau)) \dot{\lambda}(\tau) d\tau \quad (12)$$

که در آن $N > 2$ بوده و تابع $\rho(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho(t) = \frac{V_T \cos(\lambda(t) - \varphi_T(t))}{V_M \cos(\lambda(t) - \varphi_M(t))}$$

آنگاه سیستم هدایت پایدار مجانبی شده و تغییرات زاویه‌ی خط دید، صفر خواهد شد.

اثبات: در اهداف بدون شتاب، قانون هدایت تناسبی PN به صورت $u = Nv_c x$ پیشنهاد شده است. بنابراین، با استفاده از ایده‌ی قانون هدایت تناسبی، در سیستم هدایت (۱۱)، قانون هدایت زیر انتخاب گردد:

$$u = Nv_c x + w \quad (13)$$

آن وقت سیستم حلقه بسته به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{x} = -\frac{1}{r}(N-2)v_c x \quad (14)$$

در سیستم هدایت، در بازه‌ی زمانی $t \in [t_0, t_f]$ ، فاصله‌ی نسبی r و سرعت نزدیک‌شوندگی v_c مقادیر مثبتی می‌باشد. با استفاده از معیار پایداری لیاپانف، سیستم هدایت حلقه بسته (۱۴)، پایدار مجانبی می‌گردد. بنابراین، قانون هدایت (۱۳)، باعث صفر شدن تغییرات زاویه‌ی خط دید می‌گردد.

با جایگذاری قانون هدایت (۱۳) در رابطه (۵)، تغییرات فرمان زاویه سمت جسم $\dot{\varphi}_M$ از رابطه‌ی زیر تولید می‌گردد:

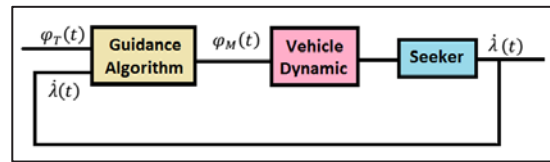
$$\dot{\varphi}_M = \frac{Nv_c x + w}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)} \quad (15)$$

با لحاظ نمودن رابطه‌ی (۹)، داریم:

$$\dot{\varphi}_M = N \frac{V_M \cos(\lambda - \varphi_M) - V_T \cos(\lambda - \varphi_T)}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)} \dot{\lambda} + \dot{\varphi}_T \frac{V_T \cos(\lambda - \varphi_T)}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)} \quad (16)$$

با ساده‌سازی رابطه‌ی (۱۶) خواهیم داشت:

$$\dot{\varphi}_M = N \left(1 - \frac{V_T \cos(\lambda - \varphi_T)}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)} \right) \dot{\lambda} + \dot{\varphi}_T \frac{V_T \cos(\lambda - \varphi_T)}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)} \quad (17)$$



شکل (۲): بلوک دیاگرام سیستم هدایت.

در پیاده‌سازی عملی، قانون هدایت طراحی شده $u(t)$ در نهایت بایستی به فرمان زاویه سمت $\varphi_M(t)$ تبدیل گردد.

با توجه به معادلات حاکم بر حرکت جسم و هدف، بلوک دیاگرام سیستم هدایت را می‌توان به صورت شکل ۲ نشان داد. در سامانه‌های هدایت، تغییرات زاویه‌ی خط دید معمولاً توسط سیکر (جستجوگر) اندازه‌گیری می‌گردد. الگوریتم هدایت با داشتن تغییرات زاویه‌ی خط دید اندازه‌گیری شده و زاویه سمت هدف، فرمان هدایت مناسب برای جسم تولید می‌کند. مدل‌های ریاضی مختلفی برای بیان عملکرد سیکر وجود دارد [۱۹]. با مدل‌سازی دقیق‌تر زیرسامانه‌های سیکر و دینامیک جسم می‌تواند حلقه هدایت مطالعه گردد. در این مقاله، به منظور سادگی تحلیل، در بلوک دیاگرام سیستم هدایت شکل ۲، زیرسامانه‌های آن ایده‌آل فرض شده‌اند. بدین منظور، سیکر با یک بلوک مشتق‌گیر مدل شده و تابع تبدیل دینامیک جسم، نیز واحد در نظر گرفته شده است. در بخش بعد، به انتخاب الگوریتم هدایت مناسب، برای تعیین زاویه‌ی سمت $\varphi_M(t)$ در یک سیستم هدایت دوبعدی پرداخته شده است.

۳- انتخاب الگوریتم هدایت

معادله‌ی حرکت جسم و هدف در دستگاه مختصات دوبعدی، با روابط (۱) و (۲) بیان گردید. در این بخش به دنبال آن می‌باشیم در بازه‌ی زمانی $t \in [t_0, t_f]$ ، با در اختیار داشتن تغییرات زاویه‌ی خط دید، فرمان زاویه‌ی سمت جسم $\varphi_M(t)$ به گونه‌ای تعیین گردد تا حلقه‌ی هدایت پایدار مجانبی شود. به همین منظور، در ادامه چهار لم کاربردی پیشنهاد شده است.

لم ۱: در معادله‌های حرکت (۱) و (۲)، اگر زاویه‌ی سمت جسم $\varphi_M(t) \in [t_0, t_f]$ ، به صورت زیر انتخاب گردد:

بنابراین، با انتگرال‌گیری عددی از رابطه‌ی (۱۷)، فرمان زاویه‌ی سمت جسم $\varphi_M(t)$ از رابطه‌ی (۱۲) به دست می‌آید.

در پیاده‌سازی عملی الگوریتم هدایت (۱۲)، تغییرات زاویه‌ی خط دید λ معمولاً توسط سیکر اندازه‌گیری می‌گردد. با توجه به رابطه‌ی (۱۷) دیده می‌شود تغییرات زاویه‌ی جسم $\dot{\varphi}_M$ متناسب با تغییرات زاویه‌ی خط دید λ می‌باشد. برای پیاده‌سازی قانون هدایت (۱۲) بایستی علاوه بر تغییرات زاویه‌ی خط دید، اطلاعات دیگری مانند زاویه هدف نیز در اختیار باشد. همچنین، نیاز است انتگرال‌گیری عددی انجام شود. بدیهی است در شرایطی ممکن است بتوان به شکل ساده‌تری با حجم محاسبات عددی کمتری رسید و با داشتن فقط تغییرات زاویه‌ی خط دید به فرمان زاویه‌ی سمت جسم دست یافت. در لم ۲، به این مسأله پرداخته شده است.

لم ۲: در معادله‌های حرکت (۱) و (۲)، اگر زاویه‌ی حرکت هدف $\varphi_T(t)$ مقدار ثابتی باشد و فرمان زاویه‌ی سمت جسم $\varphi_M(t)$ از رابطه‌ی زیر تولید گردد:

$$\varphi_M(t) = \varphi_M(t_0) + \beta \int_{t_0}^t \dot{\lambda}(\tau) d\tau \quad (18)$$

به گونه‌ای که بهره $\beta > 0$ همواره در نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\beta > 2(1 - \rho(t)) \quad (19)$$

و تابع $\rho(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho(t) = \frac{V_T \cos(\lambda(t) - \varphi_T(t))}{V_M \cos(\lambda(t) - \varphi_M(t))}$$

آنگاه سیستم هدایت پایدار مجانبی شده و تغییرات زاویه‌ی خط دید، صفر خواهد شد.

اثبات: اگر تغییرات فرمان زاویه‌ی سمت جسم $\dot{\varphi}_M(t)$ به صورت زیر انتخاب شود:

$$\dot{\varphi}_M = \beta \dot{\lambda} \quad (20)$$

آن وقت رابطه‌ی (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$r\ddot{\lambda} = -2\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{\varphi}_T V_T \cos(\lambda - \varphi_T) - \beta \dot{\lambda} V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \quad (21)$$

با ساده‌سازی رابطه (۲۱)، خواهیم داشت:

$$r\ddot{\lambda} = -(2\dot{r} + \beta V_M \cos(\lambda - \varphi_M))\dot{\lambda} + \dot{\varphi}_T V_T \cos(\lambda - \varphi_T) \quad (22)$$

اگر زاویه‌ی هدف ثابت باشد، $(\varphi_T(t) = cte)$ ، خواهیم داشت:

$$r\ddot{\lambda} = -(\beta V_M \cos(\lambda - \varphi_M) - 2v_c)\dot{\lambda} \quad (23)$$

بنابراین، اگر بهره‌ی β به گونه‌ای انتخاب شود که در بازه زمانی $t \in [t_0 \quad t_f]$ ، همواره در نامساوی $\beta > 2 \frac{v_c}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)}$ صدق کند، آن وقت سیستم هدایت پایدار مجانبی شده و تغییرات زاویه‌ی خط دید صفر می‌گردد.

با لحاظ نمودن رابطه‌ی (۹) به نامساوی زیر می‌رسیم:

$$\beta > 2 \frac{V_M \cos(\lambda - \varphi_M) - V_T \cos(\lambda - \varphi_T)}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)} \quad (24)$$

بنابراین، اگر نامساوی (۱۹) برقرار باشد آنگاه تغییرات زاویه‌ی خط دید صفر خواهد شد.

نتیجه: اگر زاویه‌ی جسم و زاویه‌ی هدف نزدیک به زاویه‌ی خط دید باشد. پس نامساوی $|\lambda - \varphi_T| < \frac{\pi}{2}$ و $|\lambda - \varphi_M| < \frac{\pi}{2}$ برقرار بوده و تابع $\rho(t) > 0$ می‌باشد. آن وقت با قانون هدایت $\beta \dot{\lambda} = 2\dot{\varphi}_M$ ، سیستم هدایت پایدار مجانبی می‌گردد.

قانون هدایت پیشنهادشده در لم ۱ دارای حجم محاسبات زیادی می‌باشد. در لم ۲ فرم ساده‌شده‌ای بیان شد که تضمین پایداری آن با وجود شرط (۱۹) کار مشکلی می‌باشد.

در ادامه، قانون هدایت به گونه‌ای مناسب اصلاح شده است تا در مقایسه با لم ۱، حجم محاسبات کمتر شده و پایداری سیستم حلقه بسته نیز تضمین گردد.

لم ۳: در معادله‌های حرکت (۱) و (۲)، اگر فرمان زاویه‌ی سمت جسم $\varphi_M(t)$ ، $t \in [t_0 \quad t_f]$ از رابطه‌ی زیر تولید گردد:

$$\begin{aligned} \varphi_M(t) &= \varphi_M(t_0) \\ &+ \frac{\theta}{V_M} \int_{t_0}^t \dot{\lambda}(\tau) \frac{1}{\cos(\lambda(\tau) - \varphi_M(\tau))} d\tau \\ &+ \frac{V_T}{V_M} \int_{t_0}^t \dot{\varphi}_T(\tau) \frac{\cos(\lambda(\tau) - \varphi_T(\tau))}{\cos(\lambda(\tau) - \varphi_M(\tau))} d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

که بهره‌ی قانون هدایت بوده و در نامساوی $\theta > V_T + V_M$ صدق می‌کند، آنگاه سیستم هدایت پایدار مجانبی شده و تغییرات زاویه‌ی خط دید، صفر خواهد شد.

اثبات: با انتخاب قانون هدایت زیر داریم:

$$u = \theta x + w \quad (26)$$

با لحاظ نمودن رابطه‌ی (۵)، فرمان زاویه‌ی سمت جسم $\varphi_M(t)$ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau)) d\tau \quad (36)$$

که $f(x) \geq 0$ بوده و شرایط اولیه در $V_T + V_M$ برقرار می‌باشد. آنگاه سیستم هدایت پایدار مجانبی شده و تغییرات زاویه‌ی خط دید، صفر خواهد شد. اثبات: اگر قانون هدایت زیر انتخاب شود:

$$u = \theta x + w \quad (37)$$

معادله‌ی (36)، جواب $\dot{\theta} = f(x)$ می‌باشد. بنابراین، داریم:

$$\theta(t) \geq \theta(t_0) \quad (38)$$

سیستم هدایت حلقه‌بسته به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$\dot{x} = -\frac{1}{r}(\theta - 2v_c)x \quad (39)$$

پس جواب معادله‌ی (39) در نامساوی زیر برقرار می‌باشد:

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| e^{-\frac{1}{r(t_0)} \int_{t_0}^t (\theta(\tau) - 2v_c(\tau)) d\tau} = |x(t_0)| e^{\frac{1}{r(t_0)} \int_{t_0}^t (2v_c(\tau) - \theta(\tau)) d\tau} \quad (40)$$

نامساوی (40) به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| e^{\frac{2 \max\{v_c(t)\} - \theta(t_0)}{r(t_0)} t} \quad (41)$$

بنابراین، جواب معادله دیفرانسیل (39) به سمت صفر همگرا می‌گردد ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$) و قانون به‌روزرسانی (36) نیز به مقدار ثابتی همگرا می‌گردد ($\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}(t) = 0$).

نتیجه: در لم 4، دیده می‌شود که قانون به‌روزرسانی متنوعی را می‌توان به کار برد. ساده‌ترین قانون به‌روزرسانی می‌تواند به صورت $\dot{\theta} = -\gamma x^2$ ، $\gamma > 0$ باشد. در بخش بعد به شبیه‌سازی سیستم هدایت با الگوریتم هدایت (35) و قانون به‌روزرسانی مذکور پرداخته شده است.

4- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، برای شبیه‌سازی سیستم هدایت، فرض شده است هدفی با سرعت ثابت 100 متر بر ثانیه و با زاویه‌ی ثابت صفر رادیان در دستگاه مختصات اینرسی در حرکت می‌باشد. زاویه‌ی اولیه جسم صفر و فاصله‌ی اولیه جسم از هدف 20 کیلومتر می‌باشد. اندازه‌ی سرعت جسم 300 متر بر ثانیه و زاویه‌ی خط دید اولیه 0.5 رادیان می‌باشد. زمان انتگرال‌گیری 1 میلی‌ثانیه و پارامترهای قانون به‌روزرسانی به صورت $\theta_0 = 1$ و $\gamma = 600$ انتخاب

$$\dot{\varphi}_M(t) = \frac{\theta \dot{\lambda}(t) + V_T \dot{\varphi}_T(t) \cos(\lambda(t) - \varphi_T(t))}{V_M \cos(\lambda(t) - \varphi_M(t))} \quad (27)$$

با قانون هدایت (26)، سیستم حلقه بسته به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$\dot{x} = -\frac{1}{r}(\theta - 2v_c)x \quad (28)$$

در یک سیستم هدایت، نامساوی $r(t) \leq r(t_0)$ معمولاً برقرار می‌باشد. پس نامساوی زیر بدیهی می‌باشد:

$$-\frac{1}{r(t)} \leq -\frac{1}{r(t_0)} \quad (29)$$

از رابطه‌ی (9) روشن است که سرعت نزدیک‌شوندگی $v_c(t)$ ، دارای کران بالایی به صورت زیر می‌باشد:

$$v_c(t) \leq \max_t \{v_c(t)\} \quad (30)$$

جواب تحلیلی معادله‌ی (28) به صورت زیر می‌باشد:

$$x(t) = x(t_0) e^{\int_{t_0}^t -\frac{1}{r(\tau)}(\theta - 2v_c(\tau)) d\tau} \quad (31)$$

با توجه به نامساوی (29)، معادله‌ی (31) دارای کران بالایی به صورت زیر می‌باشد:

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| e^{\frac{1}{r(t_0)} \int_{t_0}^t (2v_c(\tau) - \theta) d\tau} \quad (32)$$

بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی (30)، نامساوی (32) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| e^{\frac{2 \max\{v_c(t)\} - \theta}{r(t_0)} t} \quad (33)$$

اگر نامساوی $\theta > 2 \max_t \{v_c(t)\}$ برقرار شود آن وقت جواب معادله‌ی (28) به صفر همگرا می‌گردد ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$). با توجه به رابطه‌ی (9)، نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\max_t \{v_c(t)\} < V_T + V_M \quad (34)$$

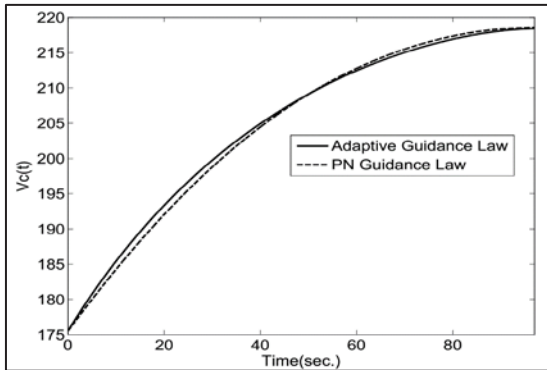
بنابراین، اگر نامساوی $\theta > V_T + V_M$ برقرار باشد آن وقت تغییرات زاویه‌ی خط دید، صفر خواهد شد.

در ادامه، قانون هدایت مطرح شده در لم 3 تعمیم‌یافته و با استفاده از رویکرد قانون هدایت تطبیقی، پارامترهای طراحی اضافی در قانون هدایت لحاظ می‌شود. **لم 4:** در معادله‌های حرکت (1) و (2)، اگر فرمان زاویه‌ی سمت جسم $\varphi_M(t)$ ، $t \in [t_0, t_f]$ از رابطه‌ی زیر تولید گردد:

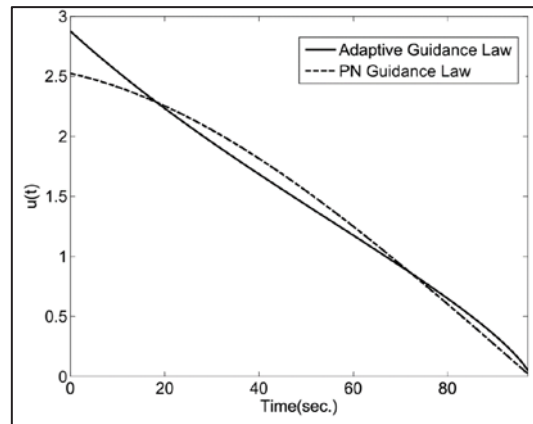
$$\begin{aligned} \varphi_M(t) &= \varphi_M(t_0) \\ &+ \frac{1}{V_M} \int_{t_0}^t \dot{\lambda}(\tau) \frac{\theta(\tau)}{\cos(\lambda(\tau) - \varphi_M(\tau))} d\tau \\ &+ \frac{V_T}{V_M} \int_{t_0}^t \dot{\varphi}_T(\tau) \frac{\cos(\lambda(\tau) - \varphi_T(\tau))}{\cos(\lambda(\tau) - \varphi_M(\tau))} d\tau \end{aligned} \quad (35)$$

و قانون به‌روزرسانی زیر انتخاب شود:

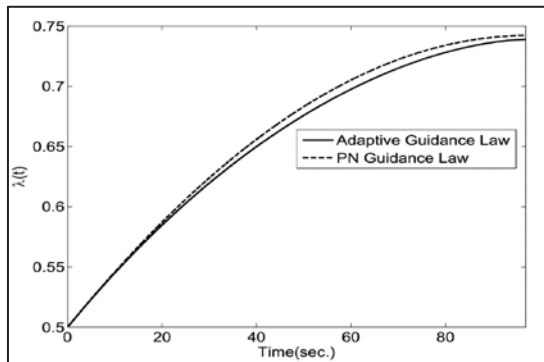
شده است. الگوریتم هدایت لم‌های ۱ و ۴ برای این سناریو انتخاب شده است.



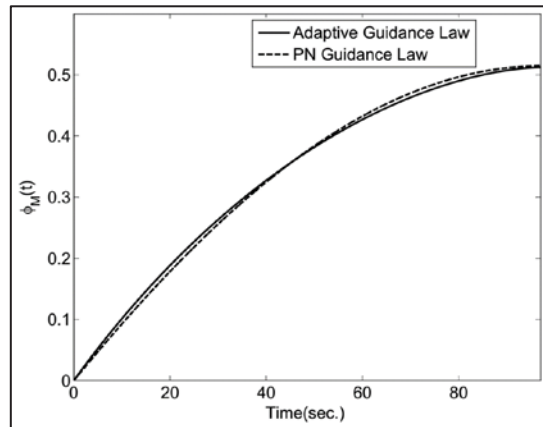
شکل (۶): سرعت نزدیک‌شوندگی جسم به هدف.



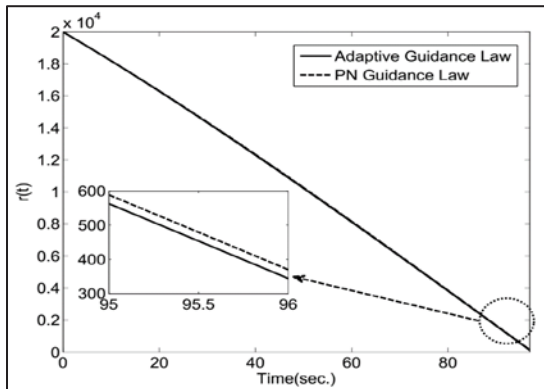
شکل (۳): شتاب جانبی اعمال شده به جسم.



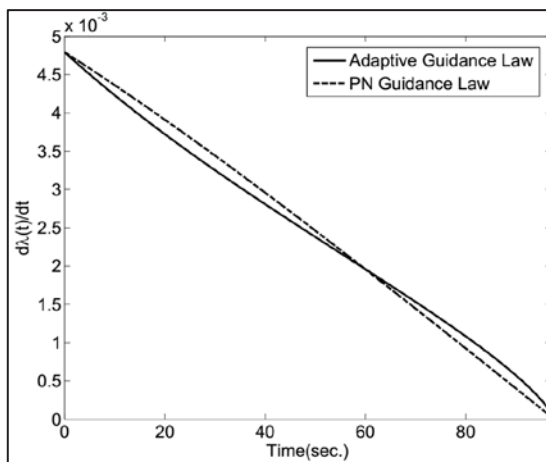
شکل (۷): زاویه‌ی خط دید جسم با هدف.



شکل (۴): زاویه‌ی سمت جسم.



شکل (۸): فاصله نسبی جسم از هدف.



شکل (۵): تغییرات زاویه‌ی خط دید.

از آنجا که شتاب هدف صفر می‌باشد، لم ۱ منجر به قانون هدایت تناسبی PN می‌گردد. شکل ۳ شتاب جانبی به جسم نشان می‌دهد. فرمان زاویه‌ی سمت $\varphi_M(t)$ ناشی از شتاب جانبی در شکل ۴ آورده شده است. اگرچه شتاب جانبی جسم $u(t)$ دارای تفاوت قابل توجه‌ای است، اما با تقریب خوبی می‌توان فرمان زاویه‌ی سمت تولیدشده در دو الگوریتم هدایت، مشابه یکدیگر می‌باشد. در شکل ۵ تغییرات زاویه‌ی خط دید ترسیم شده است. پس زاویه‌ی خط دید جسم با گذشت زمان مقداری ثابت می‌باشد. سرعت نزدیک‌شوندگی جسم با هدف در شکل ۶ و زاویه‌ی خط دید در دستگاه مختصات اینرسی در شکل ۷

- [6] Yanushevsky, R., and Boord, W., "Lyapunov approach to guidance laws design," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 63, pp. 743-749, 2005.
- [7] Shima, T., Idan, M., and Golan, O. M., "Sliding-mode control for integrated missile autopilot guidance," *Journal of guidance, control, and dynamics*, Vol. 29, pp. 250-260, 2006.
- [8] Moosapour, S., Bagherzadeh, M., Alizadeh, G., and Ghaemi, S., "Backstepping guidance law design for missile against maneuvering targets," in *International Conference on Control, Instrumentation and Automation*, pp. 600-605, 2011.
- [9] Behnamgol, V., Vali, A., and Mohammadi, A., "A new backstepping sliding mode guidance law considering control loop dynamics," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 8, pp. 9-17, 2016.
- [10] Gutman, S., "On optimal guidance for homing missiles," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 2, pp. 296-300, 1979.
- [11] Yang, C. D. and Chen, H. Y. "Nonlinear hinf robust guidance law for homing missiles," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 21, pp. 882-890, 1998.
- [12] Zhou, D., Sun, S., and Teo, K. L., "Guidance laws with finite time convergence," *Journal of guidance, control, and dynamics*, Vol. 32, pp. 1838-1846, 2009.
- [13] Binazadeh, T., Shafiei, M. H., and Bazregarzadeh, E., "New approach in guidance law design based on finite-time partial stability theorem," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 8, pp. 1-7, 2015.
- [14] Behnam, V., Gol, I., Zaman, M., Vali, A., and Ghahramani, N. A., "Guidance law design using finite time second order sliding mode control," *Journal of Control*, Vol. 5, pp. 36-44, 2011.
- [15] Dimirovski, G. M., Deskovski, S. M., and Gacovski, Z. M., "Classical and fuzzy-system guidance laws in homing missile systems," in *IEEE Aerospace Conference*, pp. 3032-3047, 2004.
- [16] Sadeghi, E., Karimi, J., and Sadati, S., "UAV 3D robust guidance law design by fuzzy sliding mode approach," *Sharif Journal of Civil Engineering*, 2017.
- [17] Breivik, M., and Fossen, T. I., "Principles of guidance-based path following in 2D and 3D," in *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 627-634, 2005.
- [18] Moosapour, S. H., and Edrisi, M., "Three-dimensional midcourse guidance with moving waypoints," *Journal of Aeronautical Engineering*, Vol. 14, pp. 47-56, 2012.
- [19] Palumbo, N. F., Blauwkamp, R. A., and Lloyd, J. M., "Basic principles of homing guidance," *Johns Hopkins APL Tech. Digest*, Vol. 29, pp. 25-41, 2010.

آورده شده است. سرعت نزدیک‌شوندگی از مقدار ۱۷۰ متر بر ثانیه به تدریج افزایش یافته و در نزدیکی هدف، سرعت نزدیک‌شوندگی ۲۲۰ متر بر ثانیه می‌گردد. پروفایل سرعت نزدیک‌شوندگی با دو قانون هدایت، تقریباً مشابه هم می‌باشد.

مطابق شکل ۸ دیده می‌شود با گذشت زمان فاصله‌ی نسبی جسم از هدف به تدریج کاهش یافته و به صفر می‌رسد. الگوریتم هدایت تطبیقی دارای فاصله از دست‌دهی کمتری (تقریباً ۳۰ متر) نسبت به هدایت تناسبی می‌باشد. از نتایج شبیه‌سازی دیده می‌شود اگر چه برای تولید فرمان زاویه سمت جسم، الگوریتم هدایت لم ۴ نسبت به هدایت تناسبی دارای حجم محاسبات زیادتری می‌باشد اما دو الگوریتم هدایت دارای کارایی مشابه‌ای از لحاظ تغییرات زاویه‌ی خط دید (شکل ۵) می‌باشند.

۵- نتیجه‌گیری

معمولاً در یک سیستم هدایت مبتنی بر خط دید، فرمان هدایت به صورت شتاب جانبی محاسبه و به جسم اعمال می‌گردد. در پیاده‌سازی عملی این قوانین هدایت، بایستی فرمان شتاب جانبی به فرمان زاویه‌ی سمت مناسبی تبدیل و به عملگر جسم اعمال شود. بدین منظور ابتدا زاویه سمت جسم در قانون هدایت تناسبی تعیین گردید. سپس، قانون هدایت تناسبی به گونه‌ای اصلاح شد تا با تضمین پایداری حلقه هدایت و حجم محاسبات کمتر، زاویه سمت جسم تولید شود. روش پیشنهادی در یک سناریوی هدایت به صورت عددی شبیه‌سازی گردید و کارآمدی آن نشان داده شد.

مراجع:

- [1] Siouris, G. M., "Missile guidance and control systems," Springer Science & Business Media, 2004.
- [2] Zarchan, P., "Tactical and strategic missile guidance," American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012.
- [3] Murtaugh, S. A., and Criel, H. E., "Fundamentals of proportional navigation," *IEEE spectrum*, Vol. 3, pp. 75-85, 1966.
- [4] Ogata, K., "Modern control engineering," 2nd ed., 2010.
- [5] Khalil, H. K. "Nonlinear systems," Prentice-Hall, New Jersey, 1996.