تحلیل ارتعاشات اجباری تیر ویسکوالاستیک تحت اعمال ناگهانی نیروی متحرک هارمونیک و جریان جرمی متحرک

عباس زندی باغچه‌مریم[۱] و محمد حسینی[۲]

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی سیرجان

(تاریخ دریافت: ۹۴/۹/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۵/۱۱)

چکیده

در مقاله حاضر، رفتار دینامیکی تیر ویسکوالاستیک تحت تأثیر نیروی متحرک هارمونیک و جریان جرمی بررسی شده است. معادله حاکم بر حرکت، به‌صورت نیمه‌تحلیلی و با استفاده از روش گالرکین و رانگ‌کوتای مرتبه چهار تحلیل شده است. نتایج این بررسی برای چهار شرایط مرزی مختلف، دوسرمفصل، دوسرگیردار، گیردار- مفصل و گیردار- آزاد به‌دست آمده است. نیروی متحرک به‌صورت سرعت یکنواخت، شتاب تندشونده و کندشونده و جریان جرمی با سرعت یکنواخت در نظر گرفته شده است. در این بررسی ابتدا تیر مستقیم بوده و در یک زمان خاص به یک‌باره جریان جرمی و همچنین نیرو به‌طور همزمان و غیرهمزمان بر تیر اثر می‌گذارند و بعد از عبور نیرو از انتهای آن، تأثیر نیرو خارجی بر تیر حذف می‌شود. در این بررسی تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف از جمله نسبت جرمی، حالت‌های مختلف حرکت، تأثیر زمان اعمال نیرو و جریان جرمی و تأثیر شرایط مرزی مختلف بر تغییر مکان تیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای اعتبارسنجی مسئله از مقایسه پاسخ به‌دست‌آمده در غیاب جریان جرمی با پژوهش‌های قبلی اســتفاده شده است. همچنین، به‌عنوان مقایسه‌ای دیگر، نتـایج تغییر مکان به‌دست‌آمده در اینجا با نتایج حاصل از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQ)، مقایسه شده و انطباق خوب جـواب‌هـا مشاهده گردید.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات اجباری، نیروی متحرک هارمونیک، جریان جرمی، شرایط مرزی مختلف

Forced Vibration Analysis of Viscoelastic Beam Subjected to a Suddenly Applied Moving Harmonic Force and Moving Mass Flow

A. Zandi Baghche Maryam
Department of Mechanical Engineering
Sirjan University of Technology

M. Hosseini
Department of Mechanical Engineering
Sirjan University of Technology

(Received: December 11, 2015; Accepted: August 1, 2016)

ABSTRACT

In present study, dynamic response of viscoelastic beams subjected to moving harmonic loads and mass flow is investigated. A semi-analytical solution composed of the Galerkin and fourth order Runge-Kutta methods is adopted to solve the governing equation of motion. The results of this analysis are obtained for four different boundary conditions, namely pinned-pinned, fixed- fixed, fixed- pinned and fixed- free. The moving force is assumed to move with accelerating, decelerating and constant velocity types of motion and the mass flow has a constant velocity. The beam is assumed to be initially straight and the applied harmonic force and mass flow pass suddenly over the beam. Then, the effect of simultaneous and non-simultaneous application of harmonic force and moving mass on the dynamic beam response is investigated. It should be noted that the effect of force is removed after crossing the beam. In the present work, the effects of various parameters such as mass ratio, various types of motions, effect of applying force and mass flow and effects of various boundary conditions on the dynamic displacement of the beam are elucidated. Without mass flow, results are compared with the data in the previous researches and a good agreement is achieved. Also, for another comparison, the results of deflection presented here are compared with the generalized differential quadrature method and excellent agreement is obtained.

Keywords: Forced Vibration, Moving Harmonic Loads, Mass Flow, Various Boundary Conditions

---

۱- کارشناسی ارشد: abas.zandi@yahoo.com

۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): hosseini@sirjantech.ac.ir

۱- مقدمه

فروریختن پل دی[1] در سال ۱۸۴۷ در هنگام عبور یک قطار که که بر روی رودخانه دی در جستر انگلستان کشیده شده بود، توجه مهندسین و محققان بسیاری را به موضوع عبور بار متحرک در سازه‌ها جلب نمود. در مدت یک‌ونیم قرن گذشته، ازدیاد روز افزون سرعت بار متحرک و در عین حال افزایش انعطاف‌پذیری سازه‌ها، بر اهمیت این موضوع نیز افزوده است. هر سازه‌ای که حرکت یک نیرو بر روی آن منجر به ارتعاشات آن سازه شود را می‌توان جزء این دسته از مسائل شمرد که در بسیاری از صنایع و شاخه‌های مهندسی کاربردهای آن را می‌توان مشاهده نمود. بررسی بارگذاری متحرک بر روی ارتعاشات پل، لوله‌های حامل جریان سیال، بال هواپیما، جرثقیل‌های ساختمانی، اره چوب‌بری، دیسک‌های رایانه‌ای، ترمز وسایل نقلیه و ابزار برش در ماشین‌کاری تنها مثال‌های معدودی از کاربردهای این نوع مدل‌سازی می‌باشند [۳-۱].

اولین مطالعه بر روی ارتعاش پل توسط ویلیس[2] [۱] در سال ۱۸۴۷ انجام شده است. او فرمول‌بندی معادله حرکت را برای یک مسئله پل راه‌آهن برای اولین‌بار انجام داد و معادله را با فرض تیر بدون جرم و جرم متحرک با سرعت ثابت استخراج کرد. ماکرتیچ[3] [۲] در سال ۱۹۹۲ اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی را بر روی تیر وارد کرد. وی در مطالعه خود اثر شتاب کریولیس را به‌صورت کامل وارد نکرد. گرین و کبن[4] [۳] در سال ۱۹۹۷ مسئله را به‌صورت جرم متحرک همراه با فنر و میراگر مدل کردند. مفید و آکین[5] [۴] در سال ۱۹۹۶ روشی برای آنالیز دینامیکی تیر ابداع کردند و آن را به اختصار DET[6] نامیدند. لی[7] [۵] در سال ۱۹۹۶ پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو را تحت اثر جرم متحرک با سرعت ثابت به‌دست آورد. وی احتمال جدا شدن جرم را از تیر در حین حرکت بررسی کرد، ولی اثرات وجود فنر و میراگر را در سامانه جرم متحرک در تحقیقات خود لحاظ نکرد. آسیلو[8] [۶] در سال ۲۰۰۱ ارتعاشات یک تیر دوسرمفصل دارای مقطع غیریکنواخت که در انتها دارای بستر الاستیک و تحت نیروی متمرکز محوری می‌باشد را از روش رایلی مورد تحلیل قرار داد. در ادامه تحقیق انجام شده توسط چن[9] و همکارانش [۷] در سال ۲۰۰۱ با ارائه مطالعه‌ای مشابه و کاملتر، پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو نامحدود تحت نیروی متحرک هارمونیک بر روی بستر ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها سرعت بحرانی و فرکانس رزونانس را به‌دست آوردند. وو و شی[10] [۸] در سال ۲۰۰۱ ارتعاشات لوله‌های حامل جریان سیال تحت تأثیر نیروی متحرک با سرعت ثابت را با استفاده از روش انتقال ماتریس به‌دست آورده و با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه نمودند. یاوری و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۲ با روش DET، اثرات ضخامت تیر و سرعت جرم متحرک را بر پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو به‌دست آوردند. لی[11] و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۴ ارتعاشات عرضی و تنش محوری یک تیر با نیروی متحرک دلخواه را براساس فرضیات تیر تیموشنکو مطالعه نمودند و اثرات سرعت‌های مختلف و تنش محوری را بر روی ارتعاشات تیر بررسی کردند. کارگرنوین و یونسیان [۱۱] در سال ۲۰۰۴ پاسخ دینامیکی فرم بسته تیر تیموشنکو نامتناهی تحت اثر بار گسترده هارمونیک متحرک با توزیع دلخواه را به‌دست آوردند. معادلات حاکم به روش تبدیل فوریه مختلط و تئوری انتگرال کانولوشن حل شده‌اند و اثر سرعت و فرکانس نیروی متحرک بر پاسخ دینامیکی تیر مورد مطالعه قرار گرفت. کارهای تکمیلی مربوط به مسئله جرم متحرک شامل استفاده از پاسخ دینامیکی به‌دست‌آمده برای دست‌یابی به نمودارهای توزیع لنگر، برش و تنش در تیرها است که از این دست کارهای تکمیلی می‌توان به بیاندی[12] و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۰۴ اشاره نمود. سیمسک[13] [۱۳] در سال ۲۰۱۰ ارتعاشات یک تیر دوسرمفصل واقع بر بستر الاستیک تحت یک جرم متحرک را با استفاده از تئوری غیرکلاسیک کوپل تنش اصلاح و با استفاده از معادلات لاگرانژ به‌دست آورد. وی اثرات پارامتر مقیاس طول، نسبت پواسون، سرعت جرم متحرک و بستر

1- Dee Bridge
2- Willis
3- Mackertich
4- Cebon
5- Akin
6-Discrete Element Technique
7- Lee
8- Auciello
9- Chen
10- Shih
11- Lee
12- Biondi
13- Şimşek

الاستیک را بر پاسخ دینامیکی میکروتیر بررسی کرد. بلات[1] و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۱۰ پاسخ دینامیکی یک دوسرمفصل و با جرم غلتان را با استفاده از دو روش عددی به‌دست آورند و نتایج را با یکدیگر مقایسه نمودند. شرابتی و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۱۱ با استفاده از روش المان محدود و معرفی یک المان تیر که اثرات شتاب جانب مرکز و کریولیس را در نظر می‌گیرد، به تحلیل دینامیکی یک تیر اویلر برنولی با شرایط مرزی دوسرمفصل تحت تأثیر جرم متحرک پرداختند. صادقی و کریمی [۱۶] در سال ۲۰۱۱ رفتار ارتعاشاتی یک لوله حامل جریان سیال را با استفاده از روش گالرکین حل کرده و ارتعاشات عرضی را برحسب پارامترهای مختلف بررسی کردند. نتایج نشان داد که افزایش سرعت جرم متحرک موجب کاهش فرکانس سامانه می‌شود. یو[2] و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۲ به بررسی ارتعاشات یک لوله نامحدود با بستر الاستیک تحت جریان سیال و یک نیروی متحرک با سرعت ثابت با استفاده از روش ماتریس انتقال پرداختند. آن‌ها شرایط انتشار موج در لوله را بررسی کردند و سرعت بحرانی سیال و نیرو را که طی آن موج در امتداد لوله انتشار می‌یابد را به‌دست آوردند. کارگرنوین و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۱۲ ارتعاشات یک تیر تیموشنکو کامپوزیتی تحت جرم غلتان که به‌طور نوسانی در حال حرکت است را مطالعه نمودند. افتخار اعظم و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۱۳ معادلات مربوط به ارتعاشات تیر تیموشنکو که تحت تأثیر یک جرم غلتان می‌باشد را با استفاده از اصل توسعه‌یافته همیلتون استخراج کرده و پاسخ‌های ارتعاشی برای مقادیر مختلف پارامترها را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها پاسخ دینامیکی تیر تحت سه حالت نیروی متحرک، جرم متحرک و جرم معلق[3] متحرک را بررسی کردند. جعفری و فتح‌آبادی [۲۰] ارتعاشات اجباری تیر تیموشنکو ساخته‌شده از ماده هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بار متحرک با سرعت ثابت را بررسی کردند. در این بررسی نشان داده شد که مقدار سرعت بحرانی نیروی متحرک با افزایش ضریب بهره افزایش می‌یابد. قمشی بزرگ و کشمیری [۲۱] به بررسی رفتار دینامیکی یک تیر انعطاف‌پذیر همراه با جرم‌های متحرک دارای حرکت متناوب با استفاده از روش اختلالی هموتوپی پرداختند. نتایج به‌دست‌آمده نشان دادند که اثر اصطکاک بین جرم و تیر بر روی نتایج آنالیز پایداری تأثیر دارد. پورشهسواری و همکاران [۲۲] با استفاده از آنالیز مودال برای سامانه‌های متغیر با زمان به استخراج فرکانس‌های طبیعی یک تیر تحت اثر جرم متحرک پرداختند. بیگلری و آزور [۲۳] براساس تئوری تیموشنکو پاسخ الاستو- دینامیکی تیر ساندویچی مرکب با شرایط تکیه‌گاهی دوسرمفصل تحت بارگذاری جرم متحرک را بررسی کردند. در این بررسی مشخص شد که ضخامت و سفتی جانبی هسته تأثیر بسزایی در سرعت بحرانی دارد. میسیورک[4] [۲۴] در سال ۲۰۱۳ پاسخ دینامیکی یک تیر کامپوزیت تحت بار متحرک را توسط شیوه ریاضی جدیدی حل نموده و قسمت حل خصوصی پاسخ را به‌صورت حل دقیق به‌دست آورده است. نیکخو و همکارانش [۲۵] پاسخ دینامیکی تیر تحت جرم متحرک با سرعت ثابت را با روش نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. در این بررسی اثرات سرعت بحرانی نیروی متحرک بر تغییر مکان سامانه بررسی گردید. در این برسی مشخص شد که با افزایش وزن متحرک سرعت بحرانی کاهش می‌یابد. افتخاری [۲۶] با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی اصلاح شده و براساس تئوری اویلر برنولی و تیموشنکو به بررسی ارتعاشات تیر تحت نیروی متحرک با سرعت ثابت پرداخت. مشخص شد که روش عددی تربیع دیفرانسیلی مورد استفاده در این مقاله دقت بالایی در نتایج دارد. در پژوهشی دیگر افتخاری [۲۷] ارتعاشات اجباری سازه‌ها تحت نیروی متحرک را با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی مطالعه کرد. اخیراً افتخاری [۲۸] ارتعاشات غیرخطی تیر نامحدود واقع بر بستر پسترناک تحت نیروی متحرک با سرعت ثابت را بررسی نمود. در پژوهش‌های متعددی اوز و پاکدمیرلی[5] [۲۹] به بررسی ارتعاشات و ناپایداری تیرهای متحرک پرداختند. از اولین مطالعه در این زمینه اوز و پاکدمیرلی به تحلیل ارتعاشی یک تیر متحرک با سرعت محوری متغیر پرداختند. در این مطالعه نواحی پایدار و ناپایدار و همچنین فرکانس طبیعی سامانه برحسب پارامترهای مختلف و برای مود اول و دوم

1- Bulut
2- Yu
3- Sprung Mass
4- Misiurek
5- Pakdemirli

بررسی شد. آن‌ها نشان دادند که افزایش سفتی موجب افزایش فرکانس طبیعی سامانه می‌شود. در پژوهشی دیگر اوز[1] و همکاران [۳۰] ارتعاشات غیرخطی و ناپایداری دینامیکی تیر دوسرمفصل متحرک را بررسی نمودند. همچنین پاکدمیرلی و اوز [۳۱] براساس تئوری اویلر برنولی به بررسی ارتعاشات تیر متحرک با میرایی ویسکوز پرداختند و بر اساس روش مقیاس چندگانه به بررسی رزونانس و پایداری در تیر پرداختند.

با بررسی مراجع [۳۱-۲۹] مشخص می‌شود که این مطالعات مرتبط به تیر متحرک است، درصورتی‌که مقاله حاضر به بررسی اثرات نیروی متحرک بر ارتعاشات اجباری تیر تحت جریان جرمی می‌پردازد. علاوه‌براین اثرات اعمال جریان جرمی به‌صورت ناگهانی، شرایط مرزی مختلف، بستر ویسکوالاستیک و حالات مختلف حرکت (سرعت یکنواخت، شتاب تندشونده و کند شونده) بر تغییر مکان سامانه در این پژوهش در نظر گرفته شده است. همچنین، مرور مراجع نشان داد که تحلیل ارتعاشات اجباری تحت جریان جرمی و نیروی متحرک که به‌صورت ناگهانی به تیر اعمال می‌شوند کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است. همچنین، تأثیر نحوه اعمال نیرو در بازه‌های زمانی مختلف بررسی نشده است. از این‌رو بخشی از پژوهش حاضر به تحلیل و تفسیر آن‌ها اختصاص یافت. در این مقاله یک تیر تحت جریان جرمی که با یک لوله حامل جریان سیال شبیه‌سازی می‌شود تحت تأثیر نیروی متحرک هارمونیک برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی در نظر گرفته دوسرمفصل، دوسرگیردار، یک‌سر گیردار – یک‌سرمفصل و یک‌سرگیردار – یک‌سر آزاد است. همچنین، نیروی متحرک دارای سرعت ثابت، شتاب تند شونده، شتاب کندشونده و جریان جرمی دارای سرعت یکنواخت است. لازم به‌ذکر است که در این مطالعه به بررسی تأثیرات نحوه اعمال نیرو و جریان جرمی در بازه‌های مختلف زمانی بر روی پاسخ دینامیکی سازه پرداخته شده است. در ابتدا معادله حاکمه با استفاده از اصل توسعه‌یافته همیلتون استخراج می‌گردد سپس خیز تیر، با به‌کارگیری روش گالرکین و رانگ‌کوتا به‌دست آمده است. تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف مانند نحوه اعمال نیرو در بازه زمانی مختلف و تأثیر شرایط مرزی مختلف بر تغییر مکان عرضی مورد مطالعه قرار گرفته است.

1- Öz

از کاربرد این مساله می‌توان در حل مسائل مهندسی مختلف از جمله ارتعاشات تیرهای تحت جریان جرمی (مثل لوله‌های حامل جریان سیال) که به‌طور ناگهانی بر تیر جریان می‌یابد و همچنین پل‌های که جهت عبور وسایل نقلیه به‌کار برده می‌شود اشاره کرد. علاوه‌براین چنانچه عبور وسایل نقلیه بر روی یک پل به‌گونه‌ای باشد که بتوان حرکت پیوسته‌ای از خودروها را بر روی پل درنظر گرفت می‌توان از نتایج این مساله جهت بررسی آن استفاده کرد.

۲- فرمولاسیون مساله و استخراج معادلات

یکی از معروف‌ترین معادله ساختاری در علوم مهندسی، معادله ساختاری کلاسیک می‌باشد که توسط هوک[2] ارائه شده است. براساس این تئوری، تنش در هر نقطه از جسم به کرنش در همان نقطه وابسته می‌باشد طبق این تئوری، انرژی کرنشی در یک ماده الاستیک خطی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV \qquad (۱)$$

که در آن، U انرژی کرنشی و V حجم اشغال‌شده، ε_{ij} تانسور کرنش و σ_{ij} تانسور تنش و ε_{xx} تانسور کرنش می‌باشد. براساس تئوری تیر اویلر- برنولی رابطه کرنش و جابجایی عرضی در رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 W(\mathrm{x,t})}{\partial x^2} \qquad (۲)$$

که در آن، W جابجایی عرضی تیر و z فاصله یک نقطه دلخواه از محور خنثی می‌باشد. در این قسمت براساس تئوری کلاسیک از اصل توسعه‌یافته همیلتون به‌منظور استخراج معادلات حرکت و شرایط مرزی تیر تحت جریان جرمی استفاده شده است. برای این منظور می‌بایست انتگرال تابع لاگرانژین سامانه در یک بازه زمانی دلخواه حداقل گردد [۳۲].

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}(\Gamma - M_0 v_2^2\,\mathrm{u}_L)dt - \int_{t_1}^{t_2} M_0 v_2\left(\frac{\partial W_L}{\partial t} + v_2\frac{\partial W_L}{\partial x}\right)\delta W_L\,dt\right) = 0 \qquad (۳)$$

در رابطه (۳) δ عملگر وریشن، M_0 جرم جریان جرمی بر واحد طول و v_2 سرعت جریان جرمی است. در اصل توسعه‌یافته همیلتون و در شرایط مرزی دوسر تکیه‌گاه‌دار $u_L = W_L = 0$ می‌باشد. Γ تابع لاگرانژین است و در رابطه (۴) قابل بیان است.

2- Hooke

$$\Gamma = T_t + T_f - U + W_{ext} \tag{۴}$$

در معادله بالا، U انرژی کرنشی و W_{ext} کار خارجی است. T_t انرژی جنبشی تیر و T_f انرژی جنبشی جریان جرمی به‌ترتیب در روابط (۵ و ۶) تعریف می‌شود.

$$T_t = \frac{1}{2}\mu\int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dx \tag{۵}$$

$$T_f = \frac{1}{2}M_0 f_2\int_0^L [v_2^{\,2} + (\frac{\partial W}{\partial t} + v_2\frac{\partial W}{\partial x})^2]dx \tag{۶}$$

در رابطه (۵)، μ جرم تیر بر واحد طول و L طول تیر است. با وریشن‌گیری از انرژی جنبشی تیر و جریان جرمی می‌توان به روابط زیر دست یافت:

$$\delta T_t = \mu\int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \delta W}{\partial t}\right)dx \tag{۷}$$

$$\delta T_f = M_0 f_2\int_0^L [(\frac{\partial W}{\partial t})(\frac{\partial \delta W}{\partial t}) + v_2\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial \delta W}{\partial x} + v_2\frac{\partial \delta W}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial x} + v_2^{\,2}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial \delta W}{\partial x}]dx \tag{۸}$$

ضریب جریان جرمی f_2 که مربوط به زمان ورود و خروج جریان جرمی می‌باشد را می‌توان به‌صورت رابطه (۹) نوشت:

$$f_2 = H(t - t_F) - \Pi H(x - v_2(t - t_F))(H(t - t_F) - H(t - t_4)) \tag{۹}$$

که در آن، H تابع هویساید و t_4 زمان گذر جریان جرمی از انتهای تیر و t_F زمان ورود جریان جرمی به ابتدای تیر می باشد و ضریب Π به‌طوری تعریف می‌شود که اگر جریان جرمی به یک‌باره در تیر اثر کند مقدار یک را دارد و اگر در ابتدا جریان جرمی در سرتاسر تیر وجود داشته باشد ضریب $\Pi = 0$ است. در مدل کلوین- ویت از فنر و ضربه‌گیر برای شبیه‌سازی خصوصیات مواد ویسکوالاستیک استفاده شده است که به‌صورت موازی با هم قرار گرفته است و موجب ایجاد کرنش‌های یکسان می‌گردد. برای شبیه‌سازی این‌گونه مواد، مدول الاستیک E با $E(1+\lambda_2\frac{\partial}{\partial t})$ جایگذاری می‌شود [۳۳] که در آن، λ_2 ضریب ویسکوالاستیک است. با جایگزینی معادله (۲) در معادله (۱)، انرژی کرنشی الاستیک در رابطه (۱۰) تعریف می‌شود.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left((1+\lambda_2\frac{\partial}{\partial t})(EI)\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{۱۰}$$

EI سفتی خمشی تیر است. کار ناشی از نیروی خارجی در رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta W_{ext} = \delta W_f + \delta W_d \tag{۱۱}$$

که در آن، δW_f نشان‌دهنده کار مجازی نیروی هارمونیک متمرکز و وزن جریان جرمی است که به یک‌باره وارد تیر می‌شود و δW_d کار مجازی حاصل از میرایی خارجی تیر می‌باشد. δW_f را می توان از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$\delta W_f = \int_0^L (f_1 f(x,t) + \Pi f_2 M_0 g)\delta W dx \tag{۱۲}$$

که در آن، ($g = 9.81\,m/s^2$) شتاب گرانش و f_1 ضریب اثر نیروی متحرک $f(x,t)$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_1 = H(t - t_L) - H(t - t_2) \tag{۱۳}$$

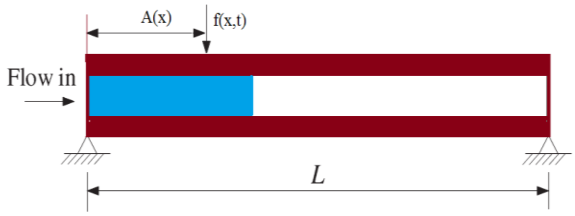
که در آن، t_2 زمان گذر نیرو متمرکز از انتهای تیر و t_L زمان ورود نیروی متمرکز به ابتدای تیر می‌باشد. همچنین با استفاده از قضیه حساب تغییرات کار ناشی از میرایی خارجی تیر در رابطه زیر قابل بیان است:

$$\delta W_d = -\lambda_1\mu\int_0^L \frac{\partial W}{\partial t}\delta W dx \tag{۱۴}$$

به‌طوری‌که $\lambda_1\mu$ ضریب میرایی خارجی تیر است که به‌صورت ضریبی از جرم بر واحد طول μ در نظر گرفته شده است.

۲-۱- معادلات حرکت و شرایط مرزی

یک تیر تحت جریان جرمی همگن دوسرمفصل تحت تأثیر نیروی متحرک $f(x,t)$ را همانند شکل ۱ درنظر بگیرید.



شکل (۱): تیر تحت نیروی متحرک و جریان جرمی.

در ابتدا تیر بدون جریان جرمی بوده و در یک زمان خاص به یک‌باره جریان جرمی و همچنین نیرو به‌طور همزمان و غیرهمزمان بر تیر اثر می‌گذارند و بعد از عبور نیرو از انتهای آن، تأثیر نیرو بر روی تیر حذف می‌شود.

با جایگزینی معادلات (۱۱-۷) در معادله (۳) و پس از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء و با انجام قدری عملیات جبری و همچنین استفاده از لم اساسی حساب تغییرات، معادله حاکم بر دینامیک تیر ویسکوالاستیک با فرض تئوری تیر اویلر- برنولی تحت یک نیروی عرضی $f(x,t)$ به‌صورت رابطه (۱۵) حاصل می‌شود:

$$EI(1+\lambda_2\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\mu(\lambda_1+\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial W}{\partial t}$$
$$+M_0 f_2(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+2v_2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t}+v_2^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})=f(x,t)+M_0 g\Pi f_2 \quad (۱۵)$$

نیروی عرضی $f(x,t)$ را به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$f(x,t)=F(t)\,f_1\,\delta(x-A(t)) \quad (۱۶)$$

کـه در آن، δ تـابع دیـراک اسـت. موقعیـت نیـروی متحـرک به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$A(x)=x_0+v_1 t+\frac{at^2}{2} \quad (۱۷)$$

که در آن، $A(t),a,v_1,x_0$ به‌ترتیب موقعیت اولیه نیروی متمرکز، سرعت اولیه نیروی متحرک، شتاب اولیه نیروی متحرک و توصیف موقعیت دلخواه نیروی متمرکز هستند که در اینجا نیرو متحرک از ابتدای تیر وارد می‌شود.

همچنین شرایط مرزی مختلف، دوسرگیردار، یک‌سرگیردار- یک‌سرمفصل، یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد و دوسرمفصل به‌ترتیب به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$W(0,t)=\frac{\partial W(0,t)}{\partial x}=W(L,t)=\frac{\partial W(L,t)}{\partial x}=0 \quad (۱۸)$$

$$W(0,t)=\frac{\partial W(0,t)}{\partial x}=W(L,t)=\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial x^2}=0 \quad (۱۹)$$

$$W(0,t)=\frac{\partial W(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial^3 W(L,t)}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial x^2}=0 \quad (۲۰)$$

$$W(0,t)=\frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2}=W(L,t)=\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial x^2}=0 \quad (۲۱)$$

و شرایط اولیه به طریق زیر بیان می‌شود.

$$W(x,0)=0,\frac{\partial W(x,0)}{\partial t}=0 \quad (۲۲)$$

۲-۲- حالت‌های مختلف حرکت نیروی متمرکز

نیروی متحرک اعمالی دارای حالت‌های حرکت سـرعت ثابـت، شتاب تند شونده، شتاب کنـد شـونده اسـت و جریـان جرمـی دارای سرعت یکنواخت می باشد. مولفه‌های بی‌بعد شده زمـان به‌ترتیب برای حالت هـای سـرعت ثابـت، شـتاب تندشـونده و شتاب کندشونده و همچنین مولفه شتاب به‌صورت زیر تعریـف می‌شوند:

$$T=\frac{tv_1}{L},a=0 \quad (۲۳)$$

$$T=\frac{tv_1}{2L},a=\frac{v_1^2}{2L} \quad (۲۴)$$

$$T=\frac{tv_1}{2L},a=\frac{-v_1^2}{2L} \quad (۲۵)$$

۳- روش حل

روش‌های حل متعددی برای تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی به معادله دیفرانسیل معمولی وجود دارد که از یکی بهترین و پر کاربردترین از این روش‌ها، روش گالرکین می‌باشد که دقت و درستی آن در مسائل متنوعی مورد آزمایش قرار گرفته است [۳۴]. این روش اولین بار توسط ریاضی دان‌روس، گالرکین ابداع گردید. در این حالت جابجایی ناشی از نیروهای وارد بر تیر به‌صورت یک سری به‌صورت زیر بیان شود،

$$W(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}Q_i(x)q_i(t) \quad (۲۶)$$

به‌طوری‌که $q_i(t)$، i امین مختصات تعمیم‌یافته خیر تیر و $Q_i(x)$ ، i امین نرمال مود ارتعاشی تیر می‌باشد که برای یک تیر با شرایط مرزی مختلف به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q_i(x)=C_1\sin\sigma_i x+C_2\cos\sigma_i x+$$
$$C_3\sinh\sigma_i x+C_4\cosh\sigma_i x \quad (۲۷)$$

که در آن، C_1,C_2,C_3,C_4 ضرایب ثابت هستند که از شرایط مرزی به‌دست می آیند. با جایگذاری معادله جابجایی (۲۶) در معادله حاکم تیر (۱۵) سپس ضرب طرفین در Q_j و بعد انتگرال‌گیری در بازه 0 تا L معادله زیر حاصل می‌شود، که n تعداد مودهای به‌کاررفته در رابطه (۲۶) می‌باشد. با استفاده از شرط تعامد در رابطه (۲۹) که δ_{ij} دلتای کرونیکر است و استفاده از روابط (۳۰) تا (۳۲) جهت ساده‌سازی مساله، معادله حاکم بر حرکت به‌صورت رابطه (۳۳) استخراج می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{n}EI\int_0^L\frac{\partial^4 Q_i}{\partial x^4}Q_j dx q_i(t)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_2 EI\int_0^L\frac{\partial^4 Q_i}{\partial x^4}Q_j dx\frac{dq_i(t)}{dt}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\mu\int_0^L Q_iQ_j dx\frac{d^2q_i(t)}{dt^2}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_1\mu\int_0^L Q_iQ_j dx\frac{dq_i(t)}{dt}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}M_0 v_2^2\int_0^L f_2\frac{\partial^2 Q_i}{\partial x^2}Q_j dx q_i(t)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n}M_0 v_2\int_0^L f_2\frac{\partial Q_i}{\partial x}Q_j dx\frac{dq_i(t)}{dt}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}M_0\int_0^L f_2 Q_iQ_j dx\frac{d^2q_i(t)}{dt^2}$$
$$=\int_0^L F(t)f_1\delta(x-A(t))Q_j dx+\int_0^L M_0 g\Pi f_2 Q_j dx \quad (۲۸)$$

$$\int_0^L Q_i Q_j\, dx = L\delta_{ij} \tag{۲۹}$$

$$S_{ij} = \int_0^L f_2 \frac{\partial Q_i}{\partial x} Q_j\, dx \tag{۳۰}$$

$$P_{ij} = \int_0^L f_2 \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x^2} Q_j\, dx \tag{۳۱}$$

$$H_{ij} = \int_0^L f_2\, Q_i Q_j\, dx \tag{۳۲}$$

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{i=1}^{n} M_0 H_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \mu L\delta_{ij}\Big)\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \\ &+\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mu L\delta_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_2 EIL\delta_{ij}\sigma_i^{\,4} + 2\sum_{i=1}^{n} M_0 v_2 S_{ij}\Big) \\ &\frac{dq_i(t)}{dt} + \Big(\sum_{i=1}^{n} M_0 v_2^{\,2} P_{ij} + \sum_{i=1}^{n} EIL\delta_{ij}\sigma_i^{\,4}\Big) q_i(t) \\ &= \int_0^L F(t) f_1 \delta(x - A(t))\, Q_j\, dx + \int_0^L M_0 g\, \Pi f_2 Q_j\, dx \end{aligned} \tag{۳۳}$$

می‌توان معادله (۳۳) را به‌صورت فرم استاندارد زیر نوشت:

$$[M]\left[\frac{d^2 q}{dt^2}\right] + [C]\left[\frac{dq}{dt}\right] + [K][q] = [F] \tag{۳۴}$$

ماتریس‌های $[K],[C],[M]$ به‌ترتیب ماتریس‌های جرم، ماتریس میرایی و ماتریس سفتی هستند. $[F]$ ماتریس بردار نیروی خارجی و $[q]$ بردار جابجایی می‌باشد که درایه‌ها آن‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} M_0 H_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \mu L\delta_{ij} \tag{۳۵}$$

$$C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mu L\delta_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_2 EIL\delta_{ij}\sigma_i^{\,4} + 2\sum_{i=1}^{n} M_0 v_2 S_{ij} \tag{۳۶}$$

$$K_{ij} = \sum_{i=1}^{n} M_0 v_2^{\,2} P_{ij} + \sum_{i=1}^{n} EIL\delta_{ij}\sigma_i^{\,4} \tag{۳۷}$$

$$F_j(t) = \int_0^L F(t) f_1 \delta(x - A(t))\, Q_j\, dx + \int_0^L M_0 g\, \Pi f_2 Q_j\, dx \tag{۳۸}$$

همچنین، $F(t)$ برای نیروی هارمونیک به‌صورت $F(t)=F_0\cos\bar{\Omega}t$ و برای نیروی غیرهارمونیک به‌صورت $F(t)=F_0$ در نظر گرفته می‌شود. $\bar{\Omega}$ فرکانس تحریک نیرو می‌باشد. در غیاب جریان جرمی $M_0=0$ رابطه (۳۴) به‌صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + 2\zeta_i\omega_i \frac{dq_i(t)}{dt} + \omega_i^{\,2} q_i(t) = F_i(t),\ i = 1,2,..,n \tag{۳۹}$$

ضرایب ارائه شده در معادله فوق با رابطه‌های (۴۰) و (۴۱) قابل بیان است.

$$2\zeta_i\omega_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mu L\delta_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_2 EIL\delta_{ij}\sigma_i^{\,4}}{\mu} \tag{۴۰}$$

$$\omega_i^{\,2} = \frac{EI\sigma_i^{\,4}}{\mu} \tag{۴۱}$$

جهت به‌دست آوردن پاسخ دینامیکی سازه از رابطه (۳۴) که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی می‌باشد روش‌های گوناگونی وجود دارد که در این بررسی از روش رانگ‌کوتا مرتبه چهار استفاده شده است. در ابتدا با استفاده از رابطه (۳۹)، حداکثر جابجایی استاتیکی ناشی از نیروی متمرکز و مکان حداکثر خیز تیر برای شرایط مرزی مختلف و بدون جریان جرمی در جدول **۱** ارائه شده است. به‌طوری‌که W_0 و $x_{\max}$ به‌ترتیب حداکثر خیز استاتیکی تیر و محلی که W_0 در آنجا رخ می‌دهد می‌باشد.

جهت ساده‌سازی و درک بهتر نتایج استخراجی پارامترهای بی‌بعد زیر در مساله به‌کار گرفته شده است.

$$\xi = \frac{x}{L}, w = \frac{q}{L}, \alpha = \frac{v_1}{v_{cr1}}, \psi = \frac{v_2}{v_1}, \Omega = \frac{\bar{\Omega}}{\omega_1}, \beta = \frac{M_0}{M_0 + \mu} \tag{۴۲}$$

در رابطه (۴۲) $\xi,\beta,\Omega,\psi,\alpha$ به‌ترتیب نسبت سرعت نیروی متحرک به سرعت بحرانی، نسبت سرعت جریان جرمی به نیروی متحرک، نسبت فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی اول، نسبت جرمی و طول بی‌بعد شده می‌باشد و سرعت بحرانی در تکیه‌گاه مختلف از رابطه $v_{cr1} = \frac{\omega_1 L}{\sigma_1}$ [۳۵] محاسبه می‌گردد که σ_1 اولین فرکانس مربوط به آن شرایط مرزی است.

جدول (۱): حداکثر جابجایی استاتیکی ناشی از نیروی متمرکز و مکان حداکثر خیز [۳۵].

	دوسرمفصل	دوسرگیردار	گیردار-مفصل	گیردار-آزاد
W_0	$\frac{F_0L^3}{48EI}$	$\frac{F_0L^3}{192EI}$	$\frac{F_0L^3}{48\sqrt{5}EI}$	$\frac{F_0L^3}{3EI}$
$x_{\max}$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}$	$0.55L$	L

۴- نتایج عددی

در این قسمت به بررسی نتایج حاصل از تأثیر تغییرات پارامترهای بی‌بعد مختلف مانند تأثیر نحوه اعمال نیرو و جریان

جرمی بر تیر در زمان‌های مختلف، نسبت سرعت و اثر شرایط مرزی مختلف بر تغییر مکان عرضی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین در این تحقیق فرض می‌شود که نیرو و جریان جرمی همواره از ابتدای تیر وارد بر تیر می‌شوند.

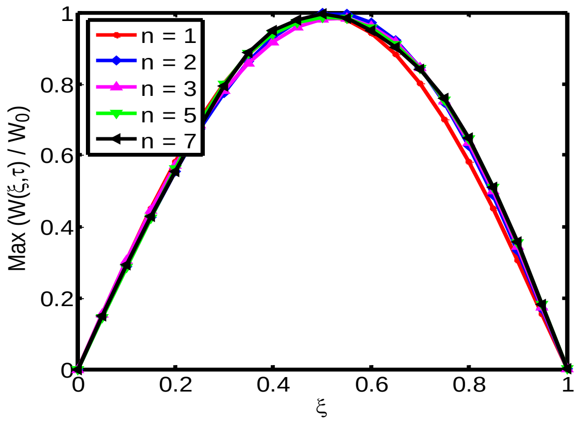
دقت محاسبات با همگرایی بسیار مناسب نتایج بررسی گردیده و همچنین صحت نتایج با مقایسه با نتایج حاصل از روش گالرکین-تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته (GDQ) و آنچه قبلا در تحقیقات قبلی ارائه شده است تایید می‌گردد. مقادیر درنظرگرفته‌شده در این بررسی مگر در مواردی که پارامترهای دیگری قید شده باشد به‌صورت زیر است:

$$\alpha=1,\psi=1,\Omega=1,\beta=0.2,\zeta=0.1 \qquad (۴۳)$$

لازم به‌ذکر است که جداول **۴-۲** و شکل‌های **۱۰-۱** در حالت سرعت یکنواخت نیرو است، همچنین تغییر مکان در شکل‌ها و جداول که در ادامه بررسی می‌شود، در مکان $x_{\max}$ است که در جدول **۱** بیان شده است و مقدار جابجایی دینامیکی حداکثر، در محدوده زمانی گذر نیرو از تیر محاسبه شده است.

به‌منظور بررسی همگرایی روش گالرکین ارائه شده در این تحقیق، مقادیر مربوط به خیز یک تیر اویلر برنولی تحت بار متمرکز متحرک و جریان جرمی در شکل **۲** برای تعداد مختلف مودهای تیر آورده شده است. این نتایج با استفاده از مقادیر حاصل از تئوری کلاسیک $\frac{F_0L^3}{48EI}$ نرمال شده است. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که به‌ازای $n=5$ مقادیر همگرا شده و با تغییر مودهای تیر دیگر تغییری در نتایج حاصل نمی‌شود بنابراین تمام نتایجی در شکل‌های بعدی ارائه می‌شود با توجه به همگرایی مسئله به‌ازای تعداد مود $n=5$ می‌باشد.

همچنین در جدول **۲** نیز نتایج روش حاضر با نتایج حاصل از روش ترکیبی گالرکین- تربیع دیفرانسیلی و مرجع [۳۶] مقایسه شده و به اعتبارسنجی مدل ارائه‌شده پرداخته می‌شود. با توجه به مقایسه انجام‌شده، مشخص است که دقت روش به‌کارگرفته شده در این تحقیق بسیار خوب و قابل اطمینان می‌باشد. در این جدول حداکثر تغییر مکان بدون بعد در طول واحد برحسب مقادیر مختلف پارامتر بدون بعد نسبت سرعت α و شرایط مرزی دوسرمفصل به‌ازای $\beta=0,T_L=0,T_F=0$ به‌دست آمده است. لازم به‌ذکر است که نتایج ارائه‌شده در مرجع [۳۶] بر اساس روش تحلیلی انتگرال کانولوشن می‌باشد.

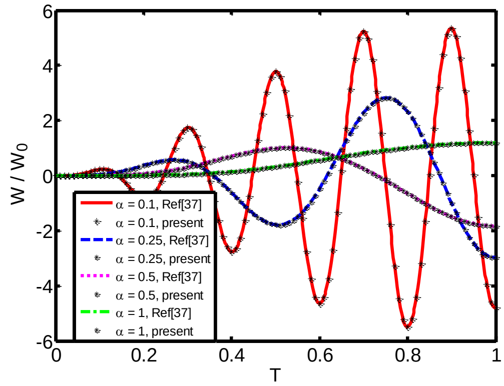


شکل (۲): همگرایی تغییر مکان بی‌بعدشده با تغییر تعداد مودهای تیر و شرایط مرزی دوسرمفصل.

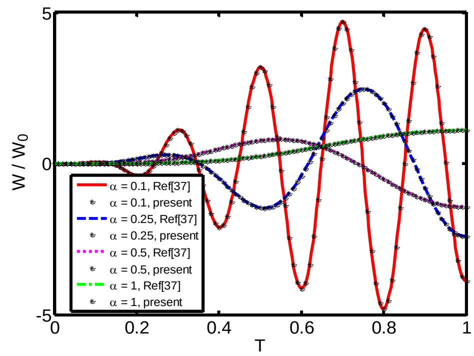
جدول (۲): اعتبارسنجی و مقایسه حداکثر تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر دوسرمفصل تحت نیروی غیرهارمونیک با مرجع [۳۶] و روش گالرکین- تربیع دیفرانسیلی.

	روش حاضر	روش گالرکین-تربیع دیفرانسیلی	مرجع [۳۶]
$\alpha=0.25$	۱/۱۵۹۴۸	۱/۱۵۸۶۵	۱/۱۵۹۰۶
$\alpha=0.5$	۱/۵۰۰۵۲	۱/۵۰۱۴۱	۱/۵۰۱۰۲
$\alpha=1$	۱/۳۰۳۱۸	۱/۲۹۸۸۱	۱/۲۹۹۲۸

شکل‌های **۴-۳** به‌ترتیب برای شرایط مرزی دوسر ساده و دو سرگیردار می‌باشد. در این شکل‌ها تغییرمکان بی‌بعدشده برحسب پارامتر بی‌بعد زمان و مقادیر مختلف α رسم شده است. تیر مورد بررسی دارای مقادیر $\beta=0,T_L=0,T_F=0$ است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده مشخص می‌شود که دقت بالایی در نتایج وجود دارد و نتایج به‌دست‌آمده از کار حاضر به‌خوبی با نتایج مرجع [۳۷] تطابق دارد و می‌توان از صحت نتایج حاصل شده اطمینان حاصل کرد.

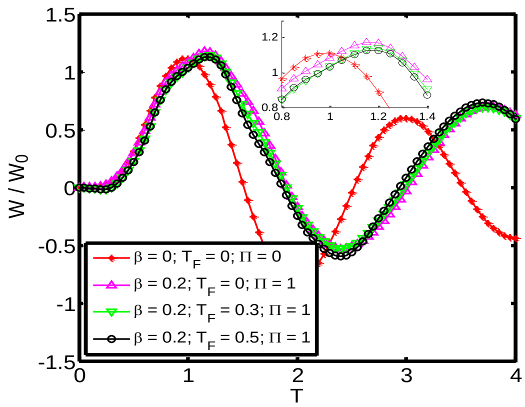


شکل (۳): اعتبارسنجی و مقایسه تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر با مرجع [۳۷] برحسب پارامتر بدون بعد نسبت سرعت α برای شرایط مرزی دوسرمفصل و سرعت یکنواخت نیرو.



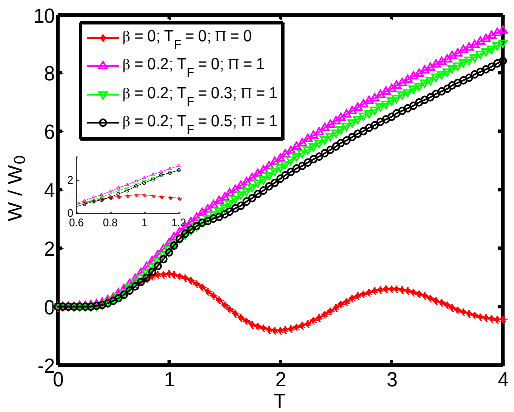
شکل (۴): اعتبارسنجی و مقایسه تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر با مرجع [۳۷] برحسب پارامتر بدون بعد نسبت سرعت α برای شرایط مرزی دوسرگیردار و سرعت یکنواخت نیرو.

جهت مطالعه اثر پارامتر T_F و ضریب جریان Π بر تغییر مکان بی‌بعد شده در مرکز تیر برحسب زمان بی‌بعد شده، به‌ازای مقادیر مختلف $T_F = 0, 0.3, 0.5$ و شرایط مرزی دوسرمفصل و نسبت سرعت $\psi = 1$، شکل **۵** ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که در کل بازه زمانی درنظر گرفته شده با اعمال یک‌باره جریان جرمی، تغییر مکان افزایش یافته و با افزایش T_F در ابتدا تغییر مکان بدون‌بعد کاهش یافته و با گذشت زمان تغییر مکان بی‌بعد بیش‌تری به‌وجود می‌آید. همچنین، مشاهده می‌شود که افزایش زمان و حذف نیرو از تیر باعث کاهش جابجایی بی‌بعد می‌گردد، به‌گونه‌ای که در ابتدا این اثرات زیاد بوده و با افزایش زمان مقدار جابجایی بی‌بعد در حال کاهش است به‌عبارتی دیگر جابجایی بدون‌بعد به‌دلیل خاصیت میرایی تیر با حذف نیرو با گذشت زمان از بین می‌رود.



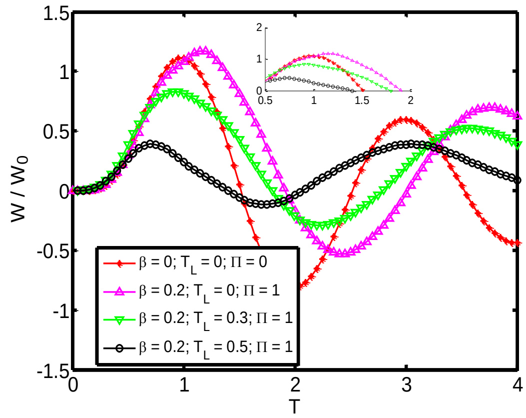
شکل (۵): تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال جریان جرمی T_F و نسبت جرمی β و ضریب جریان Π برای شرایط مرزی دوسرمفصل و سرعت یکنواخت نیرو برحسب $\psi = 1$.

در شکل **۶**، تغییر مکان بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعدشده به‌ازای مقادیر مختلف $T_F = 0, 0.3, 0.5$ و شرایط مرزی دوسرمفصل و نسبت سرعت $\psi = 2$ رسم گردیده است. با توجه به گراف‌های به‌دست‌آمده در می‌یابیم که، افزایش نسبت سرعت جریان جرمی به نسبت سرعت نیرو ψ، موجب ناپایداری سازه می‌گردد به‌طوری‌که با اعمال به یک‌باره جریان جرمی در $\psi = 2$ تغییر مکان به‌طور محسوسی افزایش می‌یابد که این باعث از هم گسیختگی سازه می‌شود. همچنین، چنانچه جریان جرمی در زمان‌هایی پس از اعمال نیروی متمرکز به تیر وارد شود تغییر مکان بدون‌بعد کم‌تری ناشی از نیروهای وارده مشاهده می‌شود.



شکل (۶): تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال جریان جرمی T_F و نسبت جرمی β و ضریب جریان Π برای شرایط مرزی دوسرمفصل و سرعت یکنواخت نیرو برحسب $\psi = 2$.

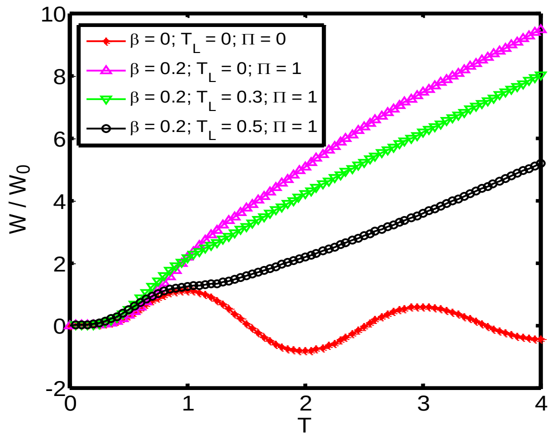
جهت مطالعه تأثیر زمان ورود نیروی متحرک بر تغییر مکان بی‌بعد عرضی تیر تحت جریان جرمی به‌ازای پارامتر زمان بی‌بعدشده $T_L = 0, 0.3, 0.5$، نتایج در شکل **۷** بررسی شده و اثر نسبت جرمی بر جابجایی‌ها برحسب زمان بی‌بعدشده ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که تغییر مکان بی‌بعد در حالتی‌که نیروی متحرک و جریان جرمی به‌طور همزمان بر تیر اثر می‌کند، بیش‌تر از حالت‌های دیگر اعمال نیرو است. در زمان ابتدایی، خیز برای حالت‌های مختلف تقریبا یکسان بوده و با افزایش زمان بی‌بعدشده اختلاف خیز بین آن‌ها افزایش می‌یابد. تفسیر چنین رفتاری می‌تواند به‌دلیل تأثیر نیروهای خارجی متحرک بر رفتار دینامیکی سازه باشد.



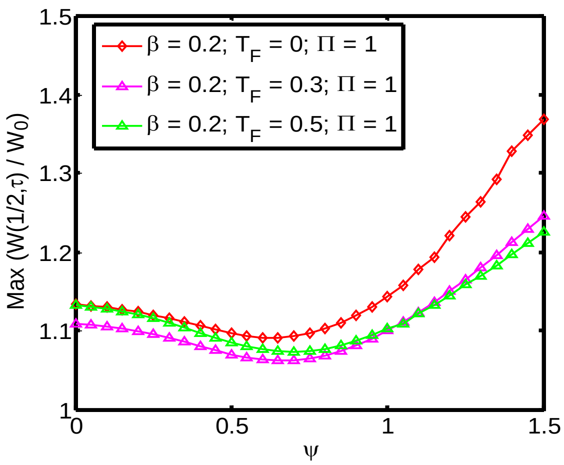
شکل (۷): تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال نیرو T_L و نسبت جرمی β و ضریب جریان Π برای شرایط مرزی دوسرمفصل و سرعت یکنواخت نیرو برحسب $\psi = 1$.

علاوه بر این در شکل **۸** جابجایی بی‌بعد ناشی از نیروی خارجی و جریان جرمی در زمان‌های مختلف اعمال نیرو و $\psi = 2$ برای نیروی هارمونیک ترسیم گردیده است. با مشاهده نتایج و تحلیل آن مشخص می‌شود که اعمال یک‌باره سیال و نیرو در نسبت سرعت بالا موجب ناپایداری سازه می‌گردد. بنابراین می‌توان این‌گونه بیان نمود که افزایش نسبت سرعت جریان جرمی به سرعت نیرو تأثیری زیادی بر ناپایداری سازه دارد و موجب افزایش تغییر مکان بی‌بعد ناشی از نیروهای وارده می‌گردد.

جهت مطالعه اثر پارامتر نسبت سرعت جریان جرمی به سرعت نیرو ψ بر تغییر مکان بی‌بعدشده به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال نیرو T_F برای شرایط مرزی دوسرمفصل و سرعت یکنواخت نیرو، شکل **۹** ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که افزایش نسبت سرعت موجب افزایش تغییر مکان بی‌بعد می‌گردد. علاوه‌براین مشاهده می‌شود که افزایش نسبت سرعت باعث افزایش آثار نیروی خارجی بر تغییر مکان بی‌بعد می‌شود به‌گونه‌ای که در ابتدا این اثرات تقریباً یکسان بوده و با افزایش آن تغییر مکان بی‌بعد افزایش می‌یابد.



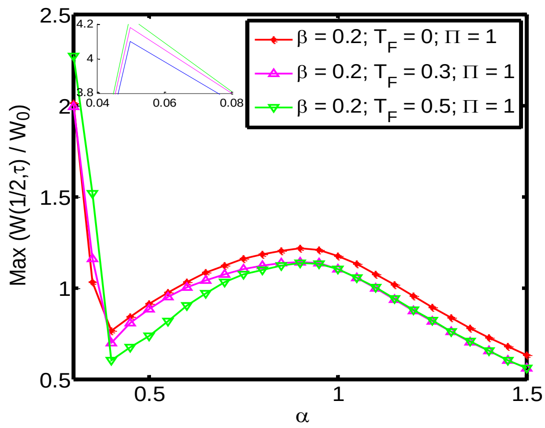
شکل (۸): تغییر مکان بی‌بعد شده برحسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال نیرو T_L و نسبت جرمی β و ضریب جریان Π برای شرایط مرزی دوسرمفصل و سرعت یکنواخت نیرو برحسب $\psi = 2$.



شکل (۹): تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال نیرو T_F و نسبت جرمی β و ضریب جریان Π برای شرایط مرزی دوسرمفصل و سرعت یکنواخت نیرو برحسب نسبت سرعت جریان جرمی به سرعت نیرو ψ.

به‌منظور بررسی اثر پارامتر نسبت سرعت به سرعت بحرانی (α) بر تغییر مکان بی‌بعدشده و شرایط مرزی دوسرمفصل،

شکل **۱۰** ترسیم گردیده است. با توجه به گراف‌ها مشاهده می‌شود که افزایش نسبت سرعت α موجب کاهش تغییر مکان بی‌بعد می‌شود. به‌عبارتی دیگر در سرعت‌های کم‌تر از سرعت بحرانی، تغییر مکان بی‌بعد بیش‌تر شده و در سرعت‌های بالاتر تغییر مکان بی‌بعد کم‌تر است.



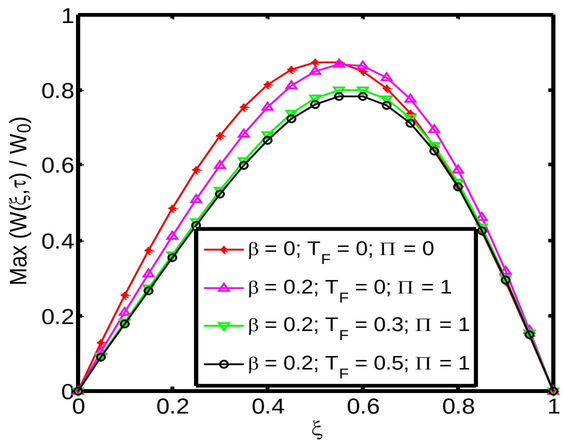
شکل (۱۰): تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال نیرو T_F و نسبت جرمی β و ضریب جریان Π برای شرایط مرزی دوسرمفصل و سرعت یکنواخت نیرو برحسب نسبت سرعت به سرعت بحرانی α.

در جدول **۳** نیز حداکثر مقدار جابجایی بدون‌بعد ناشی از نیروی متحرک در طول زمان واحد به‌ازای زمان اعمال جریان جرمی در تیر نسبت به اعمال نیرو $T_F = 0, 0.3, 0.7$ و برحسب $\beta = 0.1$ برای شرایط مرزی مختلف حاصل شده است. با توجه به آن ملاحظه می‌شود که در شرایط مرزی دوسرمفصل در مقایسه با شرایط مرزی‌های دیگر، جابجای نسبی بیش‌تر است. در اینجا همان‌طورکه قبلاً اشاره گردید جابجایی نسبی تیر به‌صورت نسبت تغییر مکان دینامیکی بر جابجایی استاتیکی است که برای شرایط مرزی مختلف، جابجایی استاتیکی در جدول **۱** آورده شده است.

نتایج جدول **۳** با افزایش این مقادیر حداکثر تغییر مکان بدون‌بعد ابتدا کاهش یافته سپس افزایش می‌یابد. در این جدول حداکثر جابجایی بدون‌بعد دینامیکی ناشی از نیروی متحرک به‌ازای زمان اعمال نیرو نسبت به اعمال جریان جرمی برحسب $\beta = 0.1$ برای شرایط مرزی مختلف حاصل شده است. با توجه به آن ملاحظه می‌شود که در شرایط مرزی دوسرمفصل، نسبت جابجایی در مقایسه با نسبت جابجایی شرایط مرزی‌های دیگر مقادیری بیش‌تری دارد. به‌عبارتی دیگر برای شرایط مرزی دوسرمفصل نسبت جابجایی دینامیکی به جابجایی استاتیکی در مقایسه با شرایط مرزی دیگر بیش‌تر است.

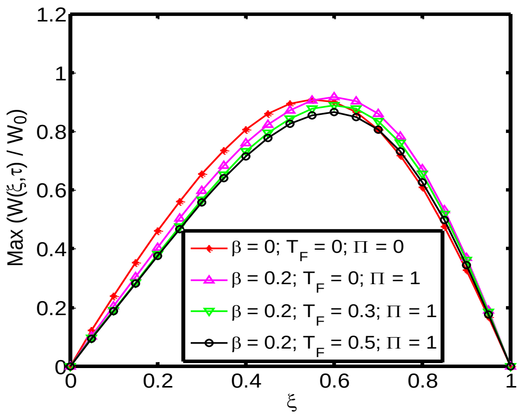
جدول (۳): نسبت حداکثر جابجایی بی‌بعد دینامیکی به جابجایی استاتیکی ناشی از نیروی متحرک برحسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای زمان اعمال جریان جرمی در تیر نسبت به اعمال نیرو برحسب $\beta = 0.1$ برای شرایط مرزی مختلف.

شرایط مرزی	$T_F = 0$	$T_F = 0.3$	$T_F = 0.7$
دوسرمفصل	۰/۹۲۱۲۴	۰/۹۵۲۷۶	۰/۹۳۵۶۶
دوسرگیردار	۰/۷۵۸۰۸	۰/۷۹۴۶۹	۰/۷۷۲۵۳
گیردار-مفصل	۰/۶۶۴۰۸	۰/۶۷۹۹۶	۰/۶۷۲۶۱
گیردار-آزاد	۰/۱۴۸۴۷	۰/۱۵۴۶۳	۰/۱۷۳۱۴



شکل (۱۱): تغییر مکان بی‌بعد شده بر حسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال نیرو T_F و نسبت جرمی β و ضریب جریان Π برای شرایط مرزی دوسرمفصل و شتاب تندشونده نیرو.

شکل **۱۱** به بررسی تغییر مکان بی‌بعد شده برای شتاب تندشونده نیروی متحرک و شرایط مرزی دوسرمفصل پرداخته شده است. در شکل **۱۲** نیز تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بدون‌بعد به‌ازای شرایط مرزی دوسرمفصل و شتاب کندشونده نیروی متحرک به‌دست آمده است. به‌طوری‌که با افزایش زمان اعمال نیرو و جریان جرمی خیز تیر کاهش یافته و در ابتدا و انتها تیر به‌دلیل وجود تکیه‌گاه مقدار خیز صفر می‌باشد. علاوه‌براین لازم به‌ذکر است در شکل‌های **۱۱ و ۱۲** زمان درنظر گرفته شده تا زمان گذر نیروی متحرک از روی تیر است.



شکل (۱۲): تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بی‌بعد تیر به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر زمان اعمال نیرو T_F و نسبت جرمی β و ضریب جریان Π برای شرایط مرزی دوسرمفصل و شتاب کندشونده نیرو.

در جدول **۴** حداکثر تغییر مکان بی‌بعد برحسب مقادیر مختلف پارامتر بدون‌بعد زمان $\tau_L = 0, 0.2, 0.4$ حاصل شده است. با مشاهده نتایج و تحلیل آن مشخص می‌شود که عکس نتایج جدول **۳** با افزایش این مقادیر حداکثر تغییر مکان بدون‌بعد ابتدا کاهش یافته سپس افزایش می‌یابد. در این جدول حداکثر جابجایی بدون‌بعد دینامیکی ناشی از نیروی متحرک به‌ازای زمان اعمال نیرو نسبت به اعمال جریان جرمی برحسب $\beta = 0.1$ برای شرایط مرزی مختلف حاصل شده است. با توجه به آن ملاحظه می‌شود که در شرایط مرزی دوسرمفصل، نسبت جابجایی در مقایسه با نسبت جابجایی شرایط مرزی‌های دیگر مقادیری بیش‌تری دارد. به‌عبارتی دیگر برای شرایط مرزی دوسرمفصل نسبت جابجایی دینامیکی به جابجایی استاتیکی در مقایسه با شرایط مرزی دیگر بیش‌تر است. شکل **۱۱** به بررسی تغییر مکان بی‌بعد شده برای شتاب تندشونده نیروی متحرک و شرایط مرزی دوسرمفصل پرداخته شده است. در شکل **۱۲** نیز تغییر مکان بی‌بعدشده برحسب مکان بدون‌بعد به‌ازای شرایط مرزی دوسرمفصل و شتاب کندشونده نیروی متحرک به‌دست آمده است. به‌طوری‌که با افزایش زمان اعمال نیرو و جریان جرمی خیز تیر کاهش یافته و در ابتدا و انتها تیر به‌دلیل وجود تکیه‌گاه مقدار خیز صفر می‌باشد. علاوه‌براین لازم به‌ذکر است در شکل‌های **۱۱ و ۱۲** زمان درنظر گرفته شده تا زمان گذر نیروی متحرک از روی تیر است.

جدول (۴): نسبت حداکثر جابجایی بی‌بعد دینامیکی به جابجایی استاتیکی ناشی از نیروی متحرک به‌ازای زمان اعمال نیرو نسبت به اعمال جریان جرمی برحسب $\beta = 0.1$ برای شرایط مرزی مختلف.

شرایط مرزی	$T_L = 0$	$T_L = 0.2$	$T_L = 0.4$
دوسرمفصل	۰/۹۲۱۲۴	۰/۳۳۵۳۹	۱,۰۹۴۹۱۹
دوسرگیردار	۰/۷۵۸۰۸	۰/۱۸۷۲۱	۰,۸۱۸۶۷
گیردار-مفصل	۰/۶۶۴۰۸	۰/۱۴۵۴۱	۱,۰۷۲۶۸
گیردار-آزاد	۰/۱۴۸۴۷	۰/۰۲۱۶۸	۰/۷۸۴۵۸

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات یک تیر همگن تحت جریان جرمی و نیروی متحرک هارمونیک با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت. برای حل معادله حاکم تیر تحت حالات مختلف حرکت نیروی خارجی متحرک (سرعت یکنواخت، شتاب تندشونده و شتاب کندشونده)، از روش ترکیبی گالرکین- رانگ‌کوتای مرتبه چهارم استفاده شد. سپس در تحلیل نتایج به بررسی تأثیر تغییرات پارامترهای بی‌بعدشده مختلف مانند سرعت نیروی متحرک، نسبت سرعت نیروی متحرک به سرعت جریان جرمی، تأثیر شرایط مرزی، نسبت جرمی و تأثیر نحوه اعمال نیرو و جریان جرمی بر تغییر مکان عرضی پرداخته شد. همچنین، این نتایج با نتایج عددی حاصل از روش ترکیبی گالرکین- تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته مقایسه شد و ملاحظه گردید که این روش بسیار کارآمد و قابل اطمینان بوده همچنین هزینه و زمان محاسبات را کاهش می‌دهد.

با بررسی نتایج مشاهده شد که با اعمال یک‌باره جریان جرمی، تغییر مکان افزایش یافته و با افزایش T_F در ابتدا تغییر مکان بدون‌بعد کاهش یافته و با گذشت زمان تغییر مکان بی‌بعد بیش‌تری به‌وجود می‌آید. همچنین، افزایش نسبت سرعت جریان جرمی به سرعت نیرو تأثیری زیادی بر ناپایداری سازه دارد و موجب افزایش تغییر مکان بی‌بعد ناشی از نیروهای وارده می‌گردد. این نتیجه حاصل شد که تغییر مکان بی‌بعد در حالتی‌که نیروی متحرک و جریان جرمی به‌طور همزمان بر تیر اثر می‌کند بیش‌تر از حالت‌های دیگر اعمال نیرو است. نتایج به‌دست‌آمده تبیین‌کننده این است که افزایش نسبت سرعت (ψ) موجب افزایش تغییر مکان بی‌بعد

می‌گردد. همچنین، مشخص گردید که چنانچه سرعت نیروی متحرک کم‌تر از سرعت بحرانی باشد تغییر مکان بی‌بعد تیر با افزایش سرعت نیرو بیش‌تر می‌شود و برای سرعت‌های بیش‌تر از سرعت بحرانی، افزایش سرعت نیرو منجر به کاهش تغییر مکان بی‌بعد می‌گردد.

۶- مراجع

1. Willis, R. “The Effect Produced by Causing Weights to Travel Over Elastic Bars”, Report of Commissioners Appointed to Inquire Into the Application of Iron to Railway Structures, Appendix, HM Stationery Office, London, UK, 1847.
2. Mackertich, S. “Response of a Beam To a Moving Mass”, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 92, No. 3, pp. 1766-1769, 1992.
3. Green, M. and Cebon, D. “Dynamic Interaction Between Heavy Vehicles and Highway Bridges”, Computers & Structures, Vol. 62, No. 2, pp. 253-264, 1997.
4. Mofid, M. and Akin, J. E. “Discrete Element Response of Beams with Traveling Mass”, Advances in Engineering Software, Vol. 25, No. 2, pp. 321-331, 1996.
5. Lee, H. “Transverse Vibration of a Timoshenko Beam Acted on by an Accelerating Mass”, Applied Acoustics, Vol. 47, No. 4, pp. 319-330, 1996.
6. Auciello, N. “On the Transverse Vibrations of Non-uniform Beams with Axial Loads and Elastically Restrained Ends”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, No. 1, pp. 193-208, 2001.
7. Chen, Y.H., Huang, Y.H. and Shih, C.T. “Response of an Infinite Timoshenko Beam on a Viscoelastic Foundation to a Harmonic Moving Load”, Journal of Sound and Vibration”, Vol. 241, No. 5, pp. 809-824, 2001.
8. Wu, J.S. and Shih, P.Y. “The Dynamic Analysis of a Multispan Fluid-Conveying Pipe Subjected to External Load”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 239, No. 2, pp. 201-215, 2001.
9. Yavari, A., Nouri, M. and Mofid, M. “Discrete Element Analysis of Dynamic Response Timoshenko Beams Under Moving Mass”, Advances in Engineering Software, Vol. 33, No. 3, pp. 143-153, 2002.
10. Lee, U., Kim, J. and Oh, H. “Spectral Analysis for the Transverse Vibration of an Axially Moving Timoshenko Beam”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 271, No. 3, pp. 685-703, 2004.
11. Kargarnovin, M.H. and Younesian, D. “Dynamics of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation Under Moving Load”, Mechanics Research Communications, Vol. 31, No. 6, pp. 713-723, 2004.
12. Biondi, B., Muscolino, G. and Sidoti, A. “Methods for Calculating Bending Moment and Shear Force in the Moving Mass Problem”, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 126, No. 1, pp. 542-552, 2004.
13. Şimşek, M. “Dynamic Analysis of an Embedded Microbeam Carrying a Moving Microparticle Based on the Modified Couple Stress Theory”, International Journal of Engineering Science, Vol. 48, No. 12, pp. 1721-1732, 2010.
14. Bulut, H. and Kelesoglu, O. “Comparing Numerical Methods for Response of Beams with Moving Mass”, Advances in Engineering Software, Vol. 41, No. 7, pp. 976-980, 2010.
15. Sharbati, E. and Szyszkowski, W. “A new FEM Approach for Analysis of Beams with Relative Movements of Masses”, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 47, No. 9, pp. 1047-1057, 2011.
16. Sadeghi, M.H. and Karimi-Dona, M.H. “Dynamic Behavior of a Fluid Conveying Pipe Subjected to a Moving Sprung Mass–an FEM-state Space Approach”, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 88, No. 4, pp. 123-131, 2011.
17. Yu, D., Wen, J., Shen, H. and Wen, X. “Propagation of Steady-State Vibration in Periodic Pipes Conveying Fluid on Elastic Foundations with External Moving Loads”, Physics Letters A, Vol. 376, No. 45, pp. 3417-3422, 2012.
18. Kargarnovin, M.H., Ahmadian, M.T. and Jafari-Talookolaei, R.A. “Dynamics of a Delaminated Timoshenko Beam Subjected to a Moving Oscillatory Mass”, Mechanics Based Design of Structures and Machines, Vol. 40, No. 2, pp. 218-240, 2012.
19. Azam, S.E., Mofid, M. and Khoraskani, R.A. “Dynamic Response of Timoshenko Beam Under Moving Mass”, Scientia Iranica, Vol. 20, No.1, pp. 50-56, 2013.
20. Jafari, A.A. and Fathabadi, M. “Forced Vibration of FGM Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers Carrying Moving Load”, Aerospace Mechanics Journal, Vol. 9, No.2, pp. 69-67, 2013 (in Persian).
21. Ghomeshi Bozorg, M. and Keshmiri, M. “Stability Analysis of a Beam Under the Effect of Moving Masses Using Homotopy Perturbation Method”, Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 34. No. 1, pp. 79-95, 2015 (in Persian).
22. Pourshahsavari, H., Ghorbani, E. and Keshmiri, M. “Modal Analysis of a Beam Mass System Using Time Varying Modal Analysis Methods”, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No.8, pp. 42-56, 2013 (in Persian).

23. Biglari, H. and Azvar, M. “On the Effects of Core Parameters on Elastodynamic Response of Timoshenko Composite Sandwich Beam Under Moving Mass”, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 2, pp. 63-69, 2014 (in Persian).
24. Misiurek, K. and Śniady, P. “Vibrations of Sandwich Beam Due to a Moving Force”, Composite Structures, Vol. 104, No. 1, pp. 85-93, 2013.
25. Nikkhoo, A., Farazandeh, A., Hassanabadi, M.E. and Mariani, S. “Simplified Modeling of Beam Vibrations Induced by a Moving Mass by Regression Analysis”, Acta Mechanica, Vol. 226, No. 7, pp. 2147-2157, 2015.
26. Eftekhari, S.A. “A Modified Differential Quadrature Procedure for Numerical Solution of Moving Load Problem”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Doi: 10.1177/0954406215584630, pp.1-17, 2015.
27. Eftekhari, S.A. “A Differential Quadrature Procedure with Regularization of the Dirac-delta Function for Numerical Solution of Moving Load Problem”, Latin American Journal of Solids and Structures, Vol. 12, No. 7, pp. 1241-1265, 2015.
28. Eftekhari, S.A. “A Differential Quadrature Procedure for Linear and Nonlinear Steady State Vibrations of Infinite Beams Traversed by a Moving Point Load”, Meccanica, Doi: 10.1007/s11012-016-0373-7, 2016.
29. Öz, H. R. and Pakdemirli, M. “Vibrations of an axially moving beam with time-dependent Velocity”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 227, No. 2, pp. 239-257, 1999.
30. Öz, H.R., Pakdemirli, M. and Boyacı, H. “Non-linear Vibrations and Stability of an Axially Moving Beam with Time-Dependent Velocity”, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 36, No. 1, pp. 107-115, 2001.
31. Pakdemirli, M. and Öz, H.R. “Infinite Mode Analysis and Truncation to Resonant Modes of Axially Accelerated Beam Vibrations”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 311, No. 3, pp. 1052-1074, 2008.
32. Benjamin, T. B. “Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid. I. Theory”, The Royal Society, Vol. 261, No. 1307, pp. 457-486, 1961.
33. Ghavanloo, E. and Fazelzadeh, S.A. “Flow-Thermoelastic Vibration and Instability Analysis of Viscoelastic Carbon Nanotubes Embedded in Viscous Fluid”, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 44, No. 1, pp. 17-24, 2011.
34. Hosseini, M. and Fazelzadeh, S. “Thermomechanical Stability Analysis of Functionally Graded Thin-Walled Cantilever Pipe with Flowing Fluid Subjected to Axial Load”, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 11, No. 3, pp. 513-534, 2011.
35. Fryba, L. “Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads”, Thomas Telford, 1999.
36. Hilal, M. A. and Zibdeh, H. “Vibration Analysis of Beams with General Boundary Conditions Traversed by a Moving Force”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 229, No. 2, pp. 377-388, 2000.
37. Hilal, M. A. and Mohsen, M. “Vibration of Beam with General Boundary Conditions Due to a Moving Harmonic Load”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 232, No. 4, pp. 703-717, 2000.