

تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با بستر الاستیک و فشار خارجی

علیرضا شاطرزاده^۱ کامران فروتن^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی شاهرود

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۳/۰۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۲/۰۷)

چکیده

پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده، یکی از مهم‌ترین سازه‌ها در صنایع هوافضا می‌باشند. در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده که توسط محیط الاستیک احاطه‌شده و تحت فشار خارجی قرار دارد، ارائه شده است. محیط الاستیک بر حسب دو پارامتر بستر الاستیک مدل پیشنهادی وینکلر- پاسترناک فرض شده است. جنس تقویت‌کننده‌ها نیز مدرج تابعی می‌باشد. روابط کرنش-جابجایی با توجه به روابط غیرخطی فن کارمن و تئوری کلاسیک پوسته‌ها به‌دست آمده است. برای حل دینامیکی غیرخطی مسأله از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای و روش گالرکین استفاده شده است. با در نظر گرفتن یک عبارت سه جمله‌ای برای شکل خیز، رابطه فرکانس-دامنه ارتعاش غیرخطی به فرم ساده‌ای تبدیل می‌شود. پاسخ دینامیکی غیرخطی با روش رانگ کوتا مرتبه چهارم به دست می‌آید. رفتار کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مدرج تابعی تقویت‌شده نیز بر اساس معیار بدیناسکی- راث بررسی می‌شود. اثر پارامترهایی از جمله تقویت‌کننده‌ها، بستر الاستیک و نیروی محرکه بر منحنی ارتعاش غیر خطی فرکانس- دامنه و تأثیر میرایی و سرعت بارگذاری بر پاسخ‌های دینامیکی غیر خطی پوسته- های استوانه‌ای مدرج تابعی، بررسی شده است. همچنین فرکانس‌های طبیعی، بارهای کمانش استاتیکی و دینامیکی غیرخطی نیز محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: آنالیز دینامیکی غیرخطی، پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده، کمانش، بستر الاستیک، مواد تابعی

Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened FGM Cylindrical Shells With Elastic Foundation Under Uniform External Pressure

A. Shaterzadeh

K. Foroutan

Mechanical Engineering Department

Shahrood University of Technology

(Received: 3/June/2015; Accepted: 26/February/2016)

Abstract

The eccentrically stiffened cylindrical shells are one of the most important structures in aerospace industries. In this paper, semi-analytical method for eccentrically stiffened functionally graded (FG) cylindrical shells under external pressure and surrounded by an elastic medium is presented. The proposed model is based on Winkler and Pasternak elastic foundation parameters. According to the Von Karman nonlinear equations and the classical plate theory (CPT) of shells, strain displacement relations are obtained. The smeared stiffeners technique and Galerkin method, used for solving nonlinear dynamic problem. With considering three terms approximation for the deflection shape, the frequency-amplitude relation for non-linear vibrations obtained. The nonlinear dynamic response is obtained from fourth order Runge-Kutta method. The nonlinear dynamic buckling behavior of stiffened FGM shells is investigated based on the Budiansky-Roth criterion. The effect of parameters such as eccentrically stiffened, elastic foundation and excitation force on the frequency-amplitude curve of the nonlinear vibrations and parameters such as damping and loading speed on the nonlinear dynamic response of the FGM cylindrical shells have been investigated. The natural frequency, static and dynamic buckling load are analyzed, too.

Keywords: Nonlinear dynamic analysis, Stiffened cylindrical shell, Buckling, Elastic foundation, FGM.

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: Kamran.foroutan@gmail.com

۱- مقدمه

تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای، مورد علاقه‌ی بسیاری از محققان در سراسر جهان می‌باشد. در تحلیل استاتیکی، بسیاری از مطالعات بر کمانش و پس‌کمانش ناشی از بارهای حرارتی و مکانیکی متمرکز است. در عمل به منظور تقویت سازه جهت تحمل بارهای اعمالی از تقویت‌کننده‌هایی^۱ با وزن کم استفاده می‌شود. مطالعه بر روی رفتار دینامیکی- استاتیکی غیرخطی این قبیل سازه‌ها از منظر عملی دارای اهمیت ویژه‌ای است. با این حال با بررسی‌های صورت گرفته می‌توان گفت مطالعات انجام‌شده بر تحلیل‌های غیرخطی استاتیکی و دینامیکی با روش‌های تحلیلی بسیار محدود است. در سال‌های اخیر به دلیل قابلیت‌های فراوان مواد مدرج تابعی^۲، استفاده از این مواد در صنایع پیشرفته بسیار گسترش یافته است. مزایای استفاده از این مواد این است که به علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشترک دو ماده متفاوت حذف شده و تنش‌های حرارتی، تنش‌های پسماند و عامل تمرکز تنش، نسبت به مواد مرکب^۳ لایه‌ای و یا روش‌های مرسوم برای مقاوم‌سازی ماده بسیار کاهش می‌یابد. از ورق‌های مدرج تابعی به عنوان سدهای حرارتی در محیط‌هایی با دمای بسیار بالا مانند سازه‌های فضایی، راکتور هسته‌ای، پره‌های توربین، توربین گازی پیشرفته و سیستم احتراقی استفاده شده است. اغلب این مواد از ترکیب سرامیک مهندسی و فلز یا ترکیبی از فلزات ساخته می‌شوند.

شن^۴ [۱] کمانش پوسته‌های نازک استوانه‌ای مدرج تابعی کامل و ناقص در محیط‌های حرارتی تحت فشار جانبی و با استفاده از تئوری کلاسیک و با استفاده از هندسه‌ی تئوری غیرخطی فن‌کارمن- دانل^۵ را ارائه داده است. همچنین با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مراتب بالاتر؛ به بررسی پس‌کمانش^۶ پوسته استوانه‌ای مختلط^۷ مدرج تابعی در

محیط‌های حرارتی تحت بار محوری پرداخته‌است. هوانگ و هان^۸ [۲] به مطالعه کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده^۹ تحت بار پیچشی، فشار محوری، فشار شعاعی، ترکیب فشار محوری و شعاعی بر اساس تئوری پوسته دائل و روابط غیرخطی کرنش- جابه‌جایی برای تغییر شکل‌های بزرگ پرداخته‌اند. شن [۳] کمانش پیچشی و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی در محیط‌های حرارتی را بررسی نموده است. تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی جدارنازک تحت فشار داخلی توسط عظیمی^{۱۰} و همکاران [۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. زوزولیا و ژانگ^{۱۱} [۵] رفتار پوسته‌های استوانه‌ای متقارن مدرج تابعی بر اساس تئوری مرتبه بالا را مورد مطالعه قرار داده‌اند. پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک تحت بار فشار محوری داخلی توسط شن و همکاران [۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. باقری‌زاده^{۱۲} و همکاران [۷] به بررسی کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک پاسترناک^{۱۳} پرداخته‌اند. صوفیه^{۱۴} [۸] تحلیل کمانش پوسته‌های مدور مدرج تابعی تحت بارگذاری ترکیبی با بستر الاستیک از نوع پاسترناک را ارائه داده است. اخیراً، نجفی‌زاده^{۱۵} و همکاران [۹] کمانش استاتیکی خطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بار محوری با تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی را مطالعه کرده‌اند.

بیج^{۱۶} و همکاران [۱۰] تحلیل استاتیکی و دینامیکی غیرخطی صفحات مدرج تابعی، پنل‌های استوانه‌ای و پوسته‌های کوتاه با سیستم تقویت‌کننده همگن را بررسی کرده‌اند. دانگ و هوا^{۱۷} [۱۱] به مطالعه تحلیلی کمانش استاتیکی غیرخطی و تحلیل پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده^{۱۸} تحت بار پیچشی با تقویت‌کننده‌های

8 - Huang and Han

9 - Unstiffened

10 - Azimi

11 - Zozulya and Zhang

12 - Bagherizadeh

13 - Pasternak

14 - Sofiyev

15 - Najafizadeh

16 - Bich

17 - Dung and Hoa

18 - Eccentrically stiffened Functionally graded material

1 - Stiffeners

2 - Functionally graded material

3 - Composite material

4 - Shen

5 - von Karman-Donnell

6 - Postbuckling

7 - Hybrid

جمله‌ای شکل کمانش خطی استفاده کرده‌اند، در حالی که در کار حاضر از یک عبارت سه جمله‌ای شامل شکل پیش‌کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیرخطی برای بیان خیز استفاده شده است و همچنین جنس تقویت‌کننده‌ها مدرج تابعی، نوع بارگذاری فشار عرضی و از بستر الاستیک استفاده شده است. بیچ و همکاران [۲۲ و ۲۳] همچنین به تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته‌های نازک مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته‌اند. آن‌ها دوباره برای بیان خیز از عبارت یک جمله‌ای شکل کمانش خطی استفاده کرده‌اند، نوع بارگذاری را نیز محوری و جنس تقویت‌کننده‌ها را نیز فلز در نظر گرفته‌اند.

مروری بر مطالعات انجام‌شده نشان می‌دهد که مطالعات بسیار کمی بر تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته‌های تقویت‌شده مدرج تابعی احاطه‌شده توسط یک بستر الاستیک با استفاده از روش تحلیلی وجود دارد. در این مقاله، رفتار دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده با سیستم تقویت‌کننده حلقوی و طولی در پوسته تحت فشار خارجی انجام شده است. معادلات دینامیکی غیرخطی با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته و لحاظ کردن روابط کرنش جابه‌جایی غیرخطی تغییر شکل‌های بزرگ و به کمک روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای^{۱۰} با روش گالرکین به دست آمده است. نوآوری کار در این است که از یک عبارت سه جمله‌ای شامل شکل پیش‌کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیرخطی برای تقریب خیز پوسته با تقویت‌کننده مدرج تابعی استفاده شده است و رابطه دامنه-فرکانس از ارتعاش غیرخطی به صورت صریح و روشن به دست آمده است. علاوه بر این، پاسخ دینامیکی غیرخطی با استفاده از روش رانگ کوتا^{۱۱} مرتبه چهارم و بارهای کمانش دینامیکی پوسته‌های مدرج تابعی تقویت‌شده بر اساس معیار بدیانسکی-راث بررسی شده است و جنس تقویت‌کننده‌ها نیز مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که تقویت‌کننده‌ها، شاخص کسر حجمی^{۱۲} و پارامترهای هندسی به شدت بر رفتار دینامیکی پوسته‌ها تأثیرگذار است.

مدرج تابعی پرداخته‌اند. ملک‌زاده فرد^۱ و همکاران [۱۲] به بررسی پاسخ دینامیکی استوانه ضخیم، تحت بارگذاری فشار مکانیکی گذرای متحرک پرداخته‌اند. عیسوند زیبائی^۲ و همکاران [۱۳] به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای نازک با رینگ تقویت شده ساخته شده از مواد هوشمند که ترکیبی از فولاد ضدزنگ و نیکل می‌باشد، پرداخته‌اند.

دانگ و نام^۳ [۱۴] حل تحلیلی دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت فشار خارجی احاطه شده توسط بستر الاستیک با تقویت‌کننده فلز را انجام داده‌اند. دارابی^۴ و همکاران [۱۵] به تحلیل رزونانس پارامتری خطی و غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده پرداخته‌اند. دنیز^۵ و صوفیه [۱۶] ارتعاشات و ناپایداری دینامیکی پوسته‌های مخروطی مدرج تابعی را مورد بررسی قرار داده‌اند. هوانگ و هان [۱۷] کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده در معرض بار محوری وابسته به زمان بر اساس معیار کمانش دینامیکی بدیانسکی-راث^۶ [۱۸] را ارائه داده‌اند. آن‌ها اثر پارامترهای مختلفی از جمله شاخص ناهمگنی، سرعت بارگذاری، پارامترهای ابعادی، افزایش دمای محیط و نقص اولیه را در کمانش دینامیکی غیرخطی مورد بررسی قرار داده‌اند. بررسی ارتعاشات پیچشی و پایداری پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی ارتوتروپیک^۷ با بستر الاستیک توسط نجفو^۸ و همکاران [۱۹] انجام شده است. داک و تانگ^۹ [۲۰] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تابع تنش به همراه معادلات کامل حرکت به بررسی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته‌اند. بیچ و همکاران [۲۱] پاسخ دینامیکی غیرخطی پنل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده تحت بارگذاری محوری را بررسی نموده‌اند. آن‌ها برای بیان خیز از عبارت یک

1 - MalekzadehFard

2 - Isvandzibaei

3 - Dung and Nam

4 - Darabi

5 - Deniz

6 - Budiansky-Roth

7 - Orthotropic

8 - Najafav

9 - Duc and Thang

10 - Smeared stiffeners technique

11 - Runge-Kutta

12 - Volume-fractions index

۲- فرمول بندی مسأله

روابط و فرمول های مورد نیاز به ترتیب ارائه شده است.

۲-۱- مشخصات قانون توانی^۱ مواد مدرج تابعی

در این مقاله مواد مدرج تابعی شامل فلز و سرامیک می باشد. با اعمال قانون توانی، کسر حجمی به صورت رابطه (۱) می باشد:

$$\begin{aligned} V_c &= V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \\ V_m &= V_m(z) = 1 - V_c(z) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن، ضخامت پوسته؛ $h \geq 0$ شاخص کسر حجمی؛ z مختصات ضخامت که بین $-h/2$ و $h/2$ می باشد؛ زیرنویس c و m به ترتیب سرامیک و فلز را نشان می دهد. مشخصه مؤثر (Pr_{eff}) پوسته مدرج تابعی براساس قانون ترکیب خطی به صورت رابطه (۲) تعیین می شود:

$$Pr_{eff} = Pr_m(z)V_m(z) + Pr_c(z)V_c(z) \quad (2)$$

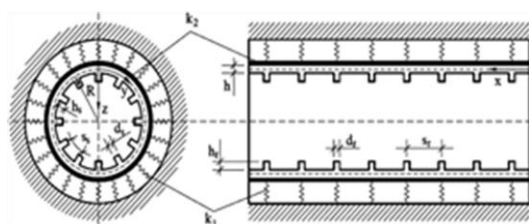
بر طبق قانون ذکر شده، مدول یانگ^۲ و دانسیته جرمی^۳ برای پوسته و تقویت کننده ها به فرم رابطه (۳) بیان می شود:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m V_m + E_c V_c = \\ E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k, & \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ E_s &= E_c + (E_m - E_c) \left(\frac{2z-h}{2h_s} \right)^{k_2} \\ -\frac{h}{2} \leq z &\leq \frac{h}{2} + h_s \\ E_r &= E_c + (E_m - E_c) \left(\frac{2z-h}{2h_r} \right)^{k_3} \\ -\frac{h}{2} \leq z &\leq \frac{h}{2} + h_r \\ \rho(z) &= \rho_m V_m + \rho_c V_c = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \\ \rho_s &= \rho_c + (\rho_m - \rho_c) \left(\frac{2z-h}{2h_s} \right)^{k_2} \\ \rho_r &= \rho_c + (\rho_m - \rho_c) \left(\frac{2z-h}{2h_r} \right)^{k_3} \end{aligned} \quad (3)$$

که E_c ، ρ_m ، E_m به ترتیب مدول یانگ و دانسیته جرمی فلز و سرامیک، $k_2 \geq 0$ و $k_3 \geq 0$ به ترتیب شاخص کسر حجمی تقویت کننده طولی و حلقوی می باشد.

۲-۲- روابط بنیادی و معادلات حاکم

یک پوسته نازک استوانه ای مدرج تابعی به طول L ، شعاع R که توسط بستر الاستیک احاطه شده را در نظر می گیریم. تقویت کننده های حلقوی و طولی مدرج تابعی می باشند (شکل ۱). مختصات اصلی x ، y و z به ترتیب در راستای محوری، محیطی و در جهت شعاعی می باشد.



شکل (۱): پوسته استوانه ای تقویت شده در محیط الاستیک.

کرنش ها در سراسر ضخامت پوسته در فاصله z از سطح میانی به صورت رابطه (۴) می باشد:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z \chi_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z \chi_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - z \chi_{xy} \quad (4)$$

بر طبق روابط غیرخطی کرنش- جابه جایی فن کارمن [۲۴]، مؤلفه های کرنش بر روی سطح میانی پوسته های استوانه ای کامل به فرم رابطه (۵) می باشد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ \varepsilon_y^0 &= v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \\ \chi_x &= w_{,xx}, \quad \chi_y = w_{,yy}, \quad \chi_{xy} = w_{,xy} \end{aligned} \quad (5)$$

با توجه به رابطه (۵)، معادله سازگاری به صورت رابطه (۶) نتیجه می شود:

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = -\frac{1}{R} w_{,xx} + (w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} \quad (6)$$

روابط تنش-کرنش برای پوسته های مدرج تابعی استوانه ای به صورت رابطه (۷) قابل بیان است:

1 - Power law
2 - Young's modulus
3 - Mass density

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_{1s}d_s}{S_s}, A_{12} = \frac{E_1\nu}{1-\nu^2}, A_{14} = \frac{E_2}{1-\nu^2} + \frac{E_{2s}d_s}{S_s} \\
A_{15} &= \frac{E_2\nu}{1-\nu^2}, A_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_{1r}d_r}{S_r}, A_{25} = \frac{E_2}{1-\nu^2} + \frac{E_{2r}d_r}{S_r} \quad (11) \\
A_{33} &= \frac{E_1}{2(1+\nu)}, A_{36} = \frac{E_2}{2(1+\nu)}, A_{44} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + \frac{E_{3s}d_s}{S_s} \\
A_{45} &= \frac{E_3\nu}{1-\nu^2}, A_{55} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + \frac{E_{3r}d_r}{S_r}, A_{66} = \frac{E_3}{2(1+\nu)}
\end{aligned}$$

در روابط (۱۲-۱۴) مدول‌های یانگ محاسبه شده است:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh}(z) dz = \left(E_{ou} + \frac{E_{in} - E_{ou}}{k+1} \right) h \\
E_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} z E_{sh}(z) dz = \frac{(E_{in} - E_{ou}) k h^2}{2(k+1)(k+2)} \quad (12) \\
E_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E_{sh}(z) dz =
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{E_{ou}}{12} + (E_{in} - E_{ou}) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right] h^3$$

$$\begin{aligned}
E_{1s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} E_s(z) dz = \left(E_{in} + \frac{E_{ou} - E_{in}}{k_2+1} \right) h_s \\
E_{2s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z E_s(z) dz = \frac{E_{in} h h_s}{2} \left(\frac{h_s}{h} + 1 \right) \\
&+ (E_{ou} - E_{in}) h h_s \left(\frac{1}{k_2+2} \frac{h_s}{h} + \frac{1}{2k_2+2} \right) \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{3s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z^2 E_s(z) dz = \frac{E_{in} h_s^3}{3} \left(\frac{3}{4} \frac{h^2}{h_s^2} + \frac{3}{2} \frac{h_s}{h} + 1 \right) \\
&+ (E_{ou} - E_{in}) h_s^3 \left(\frac{1}{k_2+3} + \frac{1}{k_2+2} \frac{h}{h_s} + \frac{1}{4(k_2+1)} \frac{h^2}{h_s^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{1r} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_r} E_r(z) dz = \left(E_{in} + \frac{E_{ou} - E_{in}}{k_3+1} \right) h_r \\
E_{2r} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_r} z E_r(z) dz = \frac{E_{in} h h_r}{2} \left(\frac{h_r}{h} + 1 \right) \\
&+ (E_{ou} - E_{in}) h h_r \left(\frac{1}{k_3+2} \frac{h_r}{h} + \frac{1}{2k_3+2} \right) \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{3r} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_r} z^2 E_r(z) dz = \frac{E_{in} h_r^3}{3} \left(\frac{3}{4} \frac{h^2}{h_r^2} + \frac{3}{2} \frac{h_r}{h} + 1 \right) \\
&+ (E_{ou} - E_{in}) h_r^3 \left(\frac{1}{k_3+3} + \frac{1}{k_3+2} \frac{h}{h_r} + \frac{1}{4(k_3+1)} \frac{h^2}{h_r^2} \right)
\end{aligned}$$

S_s, d_s, h_s و S_r, d_r, h_r به ترتیب فاصله، عرض و ضخامت تقویت‌کننده طولی و حلقوی می‌باشد.

با مرتب‌سازی رابطه (۹) بر حسب کرنش‌ها رابطه (۱۵) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{sh} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\
\sigma_y^{sh} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (7) \\
\tau_{xy}^{sh} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}
\end{aligned}$$

که ضریب پواسون (ν) ثابت فرض می‌شود، σ_x^{sh} ، σ_y^{sh} تنش نرمال در مختصات x, y روی پوسته بدون تقویت‌کننده و τ_{xy}^{sh} تنش برشی بر روی پوسته بدون تقویت‌کننده می‌باشد.

همچنین روابط تنش-کرنش برای تقویت‌کننده‌های مدرج تابعی را می‌توان به صورت رابطه (۸) نوشت [۲۰]:

$$\begin{aligned}
\sigma_s^{st} &= E_s \varepsilon_x \\
\sigma_r^{st} &= E_r \varepsilon_y \quad (8)
\end{aligned}$$

که σ_s^{st} ، σ_r^{st} و E_s, E_r به ترتیب تنش نرمال و مدول یانگ برای تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی می‌باشد. در این مقاله تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. برای لحاظ کردن اثر تقویت‌کننده‌ها بر پوسته از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای استفاده می‌کنیم. از اثرات پیچشی تقویت‌کننده‌ها به دلیل کوچکی صرف‌نظر می‌شود. با یکپارچه‌سازی معادلات تنش-کرنش و محاسبه نیروها و ممان‌های منته‌جه برای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده روابط (۹) و (۱۰) را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11} \varepsilon_x^0 + A_{12} \varepsilon_y^0 - A_{14} \chi_x - A_{15} \chi_y \\
N_y &= A_{12} \varepsilon_x^0 + A_{22} \varepsilon_y^0 - A_{15} \chi_x - A_{25} \chi_y \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{xy} &= A_{33} \gamma_{xy}^0 - 2A_{36} \chi_{xy} \\
M_x &= A_{14} \varepsilon_x^0 + A_{15} \varepsilon_y^0 - A_{44} \chi_x - A_{45} \chi_y \\
M_y &= A_{15} \varepsilon_x^0 + A_{25} \varepsilon_y^0 - A_{45} \chi_x - A_{55} \chi_y \quad (10) \\
M_{xy} &= A_{36} \gamma_{xy}^0 - 2A_{66} \chi_{xy}
\end{aligned}$$

A_{ij} مؤلفه‌های سفتی کششی، خمشی و کوپل‌شده پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده می‌باشد که مقدار آن‌ها در رابطه (۱۱) آورده شده است. N_x, N_y و N_{xy} به ترتیب نیروهای نرمال و نیروهای برشی در صفحه می‌باشند. M_x, M_y و M_{xy} نیز به ترتیب گشتاور خمشی و گشتاور پیچشی صفحه‌ای می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
 N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\
 M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_{x,w,xx} & \\
 + 2N_{xy,w,xy} + N_{y,w,yy} + \frac{1}{R}N_y + q_0 & \\
 -k_w w + k_s (w_{,xx} + w_{,yy}) &= \rho_1 w_{,tt} + 2\rho_1 \varepsilon w_{,t}
 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

در رابطه (۱۹) k_w مدول بسترالاستیک وینکلر^۱ و k_s سفتی لایه برشی بر اساس مدل پاسترناک، q_0 فشار خارجی، t زمان و ε ضریب میرایی می‌باشد.

رابطه (۲۰) مقدار ρ_1 را نشان می‌دهد:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz + \int_{-h/2}^{h/2+h_s} \rho(z) \frac{d_s}{S_s} + \int_{-h/2}^{h/2+h_r} \rho(z) \frac{d_r}{S_r} = \\
 \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h + \left(\rho_c + \frac{\rho_c - \rho_m}{k_2+1} \right) \frac{A_s}{S_s} \\
 + \left(\rho_c + \frac{\rho_c - \rho_m}{k_3+1} \right) \frac{A_r}{S_r}
 \end{aligned} \quad (۲۰)$$

با توجه به دو رابطه اول معادلات (۱۹) تابع تنش φ به صورت رابطه (۲۱) تعریف می‌شود:

$$N_x = \varphi_{,yy}, N_y = \varphi_{,xx}, N_{xy} = -\varphi_{,xy} \quad (۲۱)$$

با جایگزینی معادلات (۱۵) در رابطه (۶) و معادلات (۱۷) در سومین معادله (۱۹) و با توجه به معادلات (۴) و (۲۱)، روابط (۲۲) و (۲۳) را داریم:

$$\begin{aligned}
 A_{11}^* \varphi_{,xxxx} + (A_{33}^* - 2A_{12}^*) \varphi_{,xxyy} + A_{22}^* \varphi_{,yyyy} + A_{24}^* w_{,xxxx} \\
 + (A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^*) w_{,xxyy} + A_{15}^* w_{,yyyy} + \frac{1}{R} w_{,xx} \\
 - \left[(w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_1 w_{,tt} + 2\rho_1 \varepsilon w_{,t} + A_{44}^* w_{,xxxx} \\
 + (A_{45}^* + A_{54}^* + 4A_{66}^*) w_{,xxyy} + A_{55}^* w_{,yyyy} \\
 - A_{24}^* \varphi_{,xxxx} - (A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^*) \varphi_{,xxyy} \\
 - A_{15}^* \varphi_{,yyyy} - \frac{1}{R} \varphi_{,xx} - \varphi_{,yy} w_{,xx} + 2\varphi_{,xy} w_{,xy} \\
 - \varphi_{,xx} w_{,yy} - q_0 + k_w w - k_s (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0
 \end{aligned} \quad (۲۳)$$

معادلات (۲۲) و (۲۳) سیستم معادلات غیرخطی بر حسب دو پارامتر مجهول w و φ می‌باشد. آن‌ها به منظور بررسی

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= A_{22}^* N_x - A_{12}^* N_y + A_{14}^* \chi_x + A_{15}^* \chi_y \\
 \varepsilon_y^0 &= A_{11}^* N_y - A_{12}^* N_x + A_{24}^* \chi_x + A_{25}^* \chi_y \\
 \gamma_{xy}^0 &= A_{33}^* + 2A_{36}^* \chi_{xy}
 \end{aligned} \quad (۱۵)$$

مقدار ضرایب A_{ij}^* مربوط به رابطه (۱۵) در رابطه (۱۶) آورده شده است:

$$\begin{aligned}
 A_{11}^* &= \frac{1}{\Delta} A_{11}, A_{22}^* = \frac{1}{\Delta} A_{22} \\
 A_{12}^* &= \frac{A_{12}}{\Delta}, A_{33}^* = \frac{1}{A_{33}} \\
 \Delta &= A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \\
 A_{14}^* &= A_{22}^* A_{14} - A_{12}^* A_{15} \\
 A_{25}^* &= A_{11}^* A_{25} - A_{12}^* A_{15} \\
 A_{15}^* &= A_{22}^* A_{15} - A_{12}^* A_{25} \\
 A_{24}^* &= A_{11}^* A_{15} - A_{12}^* A_{14} \\
 A_{36}^* &= \frac{A_{36}}{A_{33}}
 \end{aligned} \quad (۱۶)$$

با جایگزینی معادلات (۱۵) در معادلات (۱۰)، رابطه (۱۷) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 M_x &= A_{14}^* N_x + A_{24}^* N_y - A_{44}^* \chi_x - A_{45}^* \chi_y \\
 M_y &= A_{15}^* N_x + A_{25}^* N_y - A_{54}^* \chi_x - A_{55}^* \chi_y \\
 M_{xy} &= A_{36}^* N_{xy} - 2A_{66}^* \chi_{xy}
 \end{aligned} \quad (۱۷)$$

که مقدار ضرایب A_{ij}^* مربوط به رابطه (۱۷) در رابطه (۱۸) آورده شده است:

$$\begin{aligned}
 A_{44}^* &= A_{44} - A_{14} A_{14}^* - A_{15} A_{24}^* \\
 A_{55}^* &= A_{55} - A_{25} A_{25}^* - A_{15} A_{15}^* \\
 A_{45}^* &= A_{45} - A_{14} A_{15}^* - A_{15} A_{25}^* \\
 A_{54}^* &= A_{45} - A_{25} A_{24}^* - A_{15} A_{14}^* \\
 A_{66}^* &= A_{66} - A_{36} A_{36}^*
 \end{aligned} \quad (۱۸)$$

معادلات غیرخطی حرکت پسته استوانه‌ای مدور نازک بر اساس تئوری کلاسیک پسته و با فرض $u \ll w$ و $v \ll w$ و $\rho_1 \partial^2 v / \partial t^2 \rightarrow 0$ و $\rho_1 \partial^2 u / \partial t^2 \rightarrow 0$ در رابطه (۱۹) آورده شده است [۱۵، ۲۵ و ۲۶]:

$$\begin{aligned}
 A &= A_{11}^* m^4 \pi^4 + (A_{33}^* - 2A_{12}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + A_{22}^* n^4 \lambda^4 \\
 B &= A_{24}^* m^4 \pi^4 + (A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 \\
 &+ A_{15}^* n^4 \lambda^4 - \frac{L^2}{R} m^2 n^2 \\
 D &= A_{44}^* m^4 \pi^4 + (A_{45}^* + A_{54}^* + 4A_{66}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 \\
 &+ A_{55}^* n^4 \lambda^4 \\
 G &= 81A_{11}^* m^4 \pi^4 + 9(A_{33}^* - 2A_{12}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 \\
 &+ A_{22}^* n^4 \lambda^4 \\
 \lambda &= \frac{L}{R}
 \end{aligned} \quad (27)$$

با جایگزینی معادلات (۲۴) و (۲۵) در معادله (۲۳) و با اعمال روش گالرکین در بازه $0 \leq x \leq L$ و $0 \leq y \leq 2\pi R$ روابط (۲۸-۳۰) را داریم:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{0y} &= Rq_0 - \frac{1}{2} Rk_w (f_2 + 2f_0) - R\rho_1 \frac{d^2 f_0}{dt^2} \\
 &- R \frac{\rho_1}{2} \frac{d^2 f_2}{dt^2} - 2R\rho_1 \varepsilon \frac{df_0}{dt} - R\rho_1 \varepsilon \frac{df_2}{dt} \\
 L^4 \rho_1 \frac{d^2 f_1}{dt^2} &+ 2L^4 \rho_1 \varepsilon \frac{df_1}{dt} + \left(D + \frac{B}{A}\right) f_1 \\
 &+ \left[\frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} + \frac{B}{A} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2\right. \\
 &\left. - \frac{n^2 \lambda^2 (\lambda L - 4A_{24}^* m^2 \pi^2)}{4A_{11}^* m^2 \pi^2}\right] f_1 f_2 + \left(\frac{m^4 \pi^4}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{16A_{11}^*}\right) f_1^3 \\
 &+ \left(\frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} + \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{G}\right) f_1 f_2^2 - \sigma_{0y} h n^2 L^2 \lambda^2 f_1 \\
 &+ L^4 k_w f_1 + L^2 k_s f_1 [(\lambda n)^2 + (m\pi)^2] = 0
 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_1 \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} &+ \rho_1 \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} + 2\rho_1 \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{3}{2} \rho_1 \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial t} \\
 &+ \left\{ \left[4A_{24}^* \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \right] \frac{n^2 \lambda^2}{32A_{11}^* m^2 \pi^2} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \frac{B}{A} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right\} f_1^2 + \frac{\sigma_{0y} h}{R} - q_0 \\
 &+ \frac{1}{2} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{G}\right) f_1^2 f_2 \\
 &+ \left\{ - \left[4A_{24}^* \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \right] \frac{(\lambda L - 4A_{24}^* m^2 \pi^2)}{4A_{11}^* m^2 \pi^2} \right. \\
 &\left. 4A_{44}^* \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \right\} f_2 + k_w \left(\frac{3}{4} f_2 + f_0\right) + k_s f_2 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 = 0
 \end{aligned} \quad (29)$$

علاوه بر این، پوسته استوانه‌ای باید شرایط بسته محیطی را ارضا کند [۱۷ و ۲۵] بنابراین رابطه (۳۱) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[\varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0 \quad (31)$$

ویژگی‌های دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت کننده مورد استفاده قرار می گیرند.

۳- رهیافت دینامیکی روش گالرکین

شرایط تکیه گاهی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت کننده، ساده می باشد و پوسته در معرض توزیع فشار یکنواخت q_0 بر روی یک بستر الاستیک قرار دارد.

خیز پوسته‌های استوانه‌ای را به صورت یک عبارت سه جمله‌ای مشابه رابطه (۲۴) در نظر می گیریم:

$$w = f_0 + f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \quad (24)$$

که $f_0 = f_0(t)$ دامنه مجهول کمانش یکنواخت وابسته به زمان، $f_1 = f_1(t)$ دامنه مجهول کمانش خطی وابسته به زمان، $f_2 = f_2(t)$ دامنه مجهول کمانش غیرخطی وابسته به زمان، می باشد. $\sin^2 \frac{m\pi x}{L}$ ، $\sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}$ و n و m به ترتیب بیانگر شکل کمانش خطی، شکل کمانش غیرخطی، تعداد نیم موج و تعداد موج کامل در راستای محوری و محیطی می باشد.

با جایگزینی معادله (۲۴) در معادله (۲۲) و حل آن، معادله‌ای برای تابع مجهول φ به دست می آید که به صورت رابطه (۲۵) می باشد:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi_1 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \varphi_2 \cos \frac{2ny}{R} - \varphi_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \\
 &+ \varphi_4 \sin \frac{3m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} - \sigma_{0y} h \frac{x^2}{2}
 \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن، σ_{0y} تنش محیطی متوسط می باشد و ضرایب φ_i به صورت روابط (۲۶) می باشد:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \frac{n^2 \lambda^2}{32A_{11}^* m^2 \pi^2} f_1^2 - \frac{(4\lambda L - 16A_{24}^* m^2 \pi^2)}{32A_{11}^* m^2 \pi^2} f_2 \\
 \varphi_2 &= \frac{m^2 \pi^2}{32A_{22}^* n^2 \lambda^2} f_1^2 \\
 \varphi_3 &= \frac{B}{A} f_1 + \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} f_1 f_2 \\
 \varphi_4 &= \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{G} f_1 f_2
 \end{aligned} \quad (26)$$

که مقدار ضرایب در رابطه (۲۷) آورده شده است:

با استفاده از معادلات (۱۵)، (۲۱)، (۲۴) و (۲۵)، رابطه (۳۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$-2A_{11}^* \sigma_{0y} h + \frac{1}{R} (f_2 + 2f_0) - \frac{1}{4} \left(\frac{n}{R} \right)^2 f_1^2 = 0 \quad (32)$$

با حذف σ_{0y} از معادلات (۲۸-۳۰) و استفاده از رابطه (۳۲)، روابط (۳۳-۳۵) داریم:

$$\left(\frac{d^2 f_0}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_0}{dt} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_2}{dt} \right) \quad (33)$$

$$+ a_{11} (f_2 + 2f_0) - a_{12} f_1^2 - a_{13} q_0 + a_{14} k_w (f_2 + 2f_0) = 0$$

$$a_{21} f_1 \left(\frac{d^2 f_0}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_0}{dt} \right) + \left(\frac{d^2 f_1}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_1}{dt} \right) \quad (34)$$

$$+ \frac{a_{21}}{2} f_1 \left(\frac{d^2 f_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_2}{dt} \right) + a_{22} f_1 + a_{23} f_1 f_2 + a_{24} f_1^3$$

$$+ a_{25} f_1 f_2^2 - a_{26} q_0 f_1 + a_{27} k_w f_1 + a_{28} k_s f_1 = 0$$

$$\left(\frac{d^2 f_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_2}{dt} \right) + a_{31} f_1^2 + a_{32} f_1^2 f_2 + a_{33} f_2 \quad (35)$$

$$+ a_{34} k_w \left(\frac{3}{4} f_2 + f_0 \right) + a_{35} k_s f_2 = 0$$

که مقدار ضرایب a_{ij} در روابط (۳۶-۳۸) آورده شده است:

$$a_{11} = \frac{1}{2A_{11}^* R^2 \rho_1}, \quad a_{12} = \frac{n^2}{8A_{11}^* R^3 \rho_1} \quad (36)$$

$$a_{13} = \frac{1}{\rho_1}, \quad a_{14} = \frac{1}{2\rho_1}$$

$$a_{21} = \frac{R n^2 \lambda^2}{L^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{L^4 \rho_1} \left(D + \frac{B^2}{A} \right)$$

$$a_{23} = \frac{1}{L^4 \rho_1} \left[\frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} + \frac{B}{A} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 - \frac{n^2 \lambda^2 (\lambda L - 4A_{24}^* m^2 \pi^2)}{4A_{11}^* m^2 \pi^2} \right]$$

$$a_{24} = \frac{1}{L^4 \rho_1} \left(\frac{m^4 \pi^4}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{16A_{11}^*} \right) \quad (37)$$

$$a_{25} = \frac{1}{L^4 \rho_1} \left(\frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} + \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{G} \right)$$

$$a_{26} = \frac{R n^2 \lambda^2}{L^2 \rho_1}, \quad a_{27} = \frac{1}{\rho_1},$$

$$a_{28} = \frac{1}{L^2 \rho_1} \left[(\lambda n)^2 + (m \pi)^2 \right]$$

$$a_{31} = \frac{1}{\rho_1} \left\{ \left[4A_{24}^* \left(\frac{m \pi}{L} \right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \right] \frac{n^2 \lambda^2}{4A_{11}^* m^2 \pi^2} + 2 \frac{B}{A} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right\}$$

$$a_{32} = \frac{2}{\rho_1} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{G} \right) \quad (38)$$

$$a_{33} = \frac{1}{\rho_1} \left\{ - \left[4A_{24}^* \left(\frac{m \pi}{L} \right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \right] \frac{(\lambda L - 4A_{24}^* m^2 \pi^2)}{A_{11}^* m^2 \pi^2} + 16A_{44}^* \left(\frac{m \pi}{L} \right)^4 \right\}$$

$$a_{34} = \frac{4}{\rho_1}, \quad a_{35} = \frac{4}{\rho_1} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2$$

با ساده‌سازی معادلات (۳۳-۳۵)، معادلات (۳۹-۴۱) را داریم:

$$\left(\frac{d^2 f_0}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_0}{dt} \right) + b_{11} f_0 - b_{12} f_1^2 - b_{13} f_1^2 f_2 + b_{14} f_2 \quad (39)$$

$$- a_{13} q_0 + b_{15} k_w f_0 + b_{16} k_w f_2 - b_{17} k_s f_2 = 0$$

$$\left(\frac{d^2 f_1}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_1}{dt} \right) + a_{22} f_1 + b_{21} f_1 f_0 + b_{22} f_1 f_2$$

$$+ a_{25} f_1 f_2^2 + b_{23} f_1^3 - b_{24} k_w f_1 f_0 - b_{25} k_w f_1 f_2 \quad (40)$$

$$+ b_{26} k_s f_1 f_2 + a_{27} k_w f_1 + a_{28} k_s f_1 = 0$$

$$\left(\frac{d^2 f_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_2}{dt} \right) + a_{31} f_1^2 + a_{32} f_1^2 f_2 + a_{33} f_2 \quad (41)$$

$$+ a_{34} k_w \left(\frac{3}{4} f_2 + f_0 \right) + a_{35} k_s f_2 = 0$$

که مقدار ضرایب b_{ij} در روابط (۴۲) و (۴۳) آورده شده است:

$$b_{11} = 2a_{11}, \quad b_{12} = \left(\frac{1}{2} a_{31} + a_{12} \right), \quad b_{13} = \frac{1}{2} a_{32}$$

$$b_{14} = \left(a_{11} - \frac{1}{2} a_{33} \right), \quad b_{15} = \left(2a_{14} - \frac{1}{2} a_{34} \right) \quad (42)$$

$$b_{16} = \left(a_{14} - \frac{3}{8} a_{34} \right), \quad b_{17} = \frac{1}{2} a_{35}$$

تقویت‌کننده را محاسبه کرد. برای یافتن پاسخ دینامیکی غیرخطی از روش رانگ کوتا مرتبه چهار استفاده شده است.

با نادیده گرفتن جملات مربوط به کمناش یکنواخت و کمناش غیرخطی، معادله (۳۴) به صورت رابطه (۴۸) کاهش می‌یابد:

$$\left(\frac{d^2 f_1}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_1}{dt}\right) + (a_{22} + a_{27}k_w + a_{28}k_s)f_1 + a_{24}f_1^3 - a_{26}f_1 Q \sin(\Omega t) = 0 \quad (48)$$

با فرض ارتعاش آزاد بدون میرایی خطی و صرف نظر از جملات مرتبه بالا، معادله (۴۸) به صورت رابطه (۴۹) درمی‌آید:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + (a_{22} + a_{27}k_w + a_{28}k_s)f_1 = 0 \quad (49)$$

بنابراین فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده به صورت رابطه (۵۰) محاسبه می‌گردد:

$$\omega_{mn} = \sqrt{a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28}} \quad (50)$$

که ω_{mn} فرکانس طبیعی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده - می‌باشد.

با در نظر گرفتن $f_1(t) = \eta \sin \Omega t$ و اعمال روش گالکین، بر معادله (۴۸) رابطه فرکانس-دامنه ارتعاش غیرخطی به صورت رابطه (۵۱) را داریم:

$$\Omega^2 - \frac{4}{\pi} \varepsilon \Omega = (a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28}) \quad (51)$$

که η دامنه ارتعاش غیرخطی $f_1(t)$ است.

با معرفی پارامتر بی بعد فرکانس به صورت $\xi = \Omega / \omega_{mn}$ معادله (۵۱) به صورت رابطه (۵۲) درمی‌آید:

$$\xi^2 - \frac{4\varepsilon}{\pi \omega_{mn}} \xi = 1 + \frac{3}{4} \frac{a_{24}}{\omega_{mn}^2} \eta^2 - \frac{8a_{26}}{3\pi \omega_{mn}^2} Q \quad (52)$$

اگر $Q = 0$ باشد، رابطه دامنه-فرکانس ارتعاش آزاد غیرخطی به صورت رابطه (۵۳) به دست می‌آید:

$$\xi^2 - \frac{4\varepsilon}{\pi \omega_{mn}} \xi = 1 + \frac{3}{4} \frac{a_{24}}{\omega_{mn}^2} \eta^2 \quad (53)$$

$$b_{21} = -b_{11}a_{21}, \quad b_{22} = -b_{14}a_{21} - a_{33}\frac{a_{21}}{2} + a_{23}$$

$$b_{23} = -b_{12}a_{21} - a_{31}\frac{a_{21}}{2} + a_{24} \quad (43)$$

$$b_{24} = \left(a_{21}b_{15} + \frac{a_{21}}{2}a_{34}\right), \quad b_{25} = \left(a_{21}b_{16} + \frac{3}{8}a_{21}a_{34}\right)$$

$$b_{26} = \left(a_{21}b_{17} - \frac{a_{21}}{2}a_{35}\right)$$

اگر $f = w_{\max}$ باشد، پس با توجه به معادله (۲۴)، با مقداره‌ی $x = iL/2m$ و $y = j\pi/2n$ ماکزیمم خیز پوسته به صورت رابطه (۴۴) خواهد شد:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 \quad (44)$$

که i و j عدد صحیح فرد می‌باشند.

معادلات (۳۹-۴۱) و (۴۴) برای بررسی تأثیر پارامترهای ورودی بر رفتار منحنی خیز-ماکزیمم بار پوسته‌های مدرج تابعی با تقویت‌کننده استفاده می‌شود.

۳-۱- آنالیز ارتعاش غیرخطی

برای بررسی ارتعاشات غیر خطی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده فرض می‌کنیم فشار خارجی با شدت $q_0 = Q \sin \Omega t$ اعمال گردد. بنابراین معادلات (۳۹-۴۱) به صورت معادلات (۴۵-۴۷) خواهد شد:

$$\left(\frac{d^2 f_0}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_0}{dt}\right) + b_{11}f_0 - b_{12}f_1^2 - b_{13}f_1^2 f_2 + b_{14}f_2^2 - a_{13}Q \sin(\Omega t) + b_{15}k_w f_0 + b_{16}k_w f_2 - b_{17}k_s f_2 = 0 \quad (45)$$

$$\left(\frac{d^2 f_1}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_1}{dt}\right) + a_{22}f_1 + b_{21}f_1 f_0 + b_{22}f_1 f_2 + a_{25}f_1 f_2^2 + b_{23}f_1^3 - b_{24}k_w f_1 f_0 - b_{25}k_w f_1 f_2 + b_{26}k_s f_1 f_2 + a_{27}k_w f_1 + a_{28}k_s f_1 = 0 \quad (46)$$

$$\left(\frac{d^2 f_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_2}{dt}\right) + a_{31}f_1^2 + a_{32}f_1^2 f_2 + a_{33}f_2^2 + a_{34}k_w \left(\frac{3}{4}f_2 + f_0\right) + a_{35}k_s f_2 = 0 \quad (47)$$

که Q دامنه نیروی تحریک و Ω فرکانس تحریک می‌باشد.

با استفاده از معادلات (۴۵-۴۷)، می‌توان فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد و پاسخ غیرخطی پوسته مدرج تابعی با

۳-۲- آنالیز کمانش

۳-۲-۱- آنالیز کمانش استاتیکی خطی پوسته‌های استوانه‌ای

مدرج تابعی با تقویت‌کننده

با حذف شکل کمانش یکنواخت و کمانش غیرخطی و قرار دادن $\ddot{f}_1 = 0$ ، $\dot{f}_1 = 0$ و این که $f_1 \neq 0$ معادله (۳۴) به صورت رابطه (۵۴) درمی‌آید:

$$a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28} + a_{24} f_1^2 - a_{26} q_0 = 0 \quad (54)$$

با نادیده گرفتن جمله مرتبه دو f_1 در معادله (۵۴)، رابطه (۵۵) را داریم:

$$q_0^{sbu} = \frac{a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28}}{a_{26}} \quad (55)$$

که q_0^{sbu} بار کمانش استاتیکی خطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده می‌باشد.

بار بحرانی کمانش استاتیکی خطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده به صورت رابطه (۵۶) می‌باشد:

$$q_{scr} = \min(q_0^{sbu}) \quad (56)$$

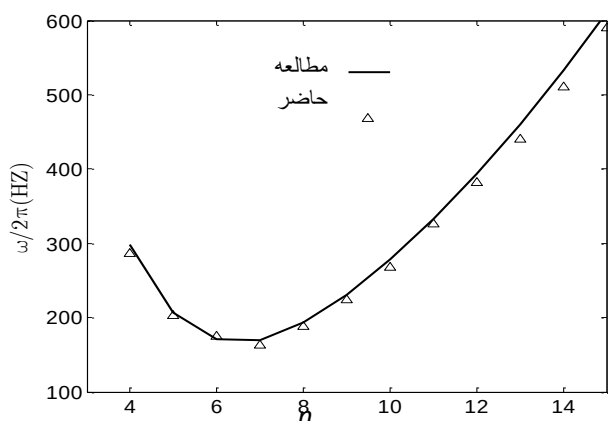
۳-۲-۲- تحلیل کمانش دینامیکی غیرخطی استوانه مدرج تابعی با تقویت‌کننده

بر اساس معادلات (۴۰-۴۲)، تحلیل کمانش بحرانی دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده تحت فشار جانبی مختلف وابسته به زمان خطی مشابه $q_0 = ct$ در نظر گرفته می‌شود که C سرعت بارگذاری (N/m^2s) می‌باشد.

معادلات (۴۰-۴۲) یک دستگاه سه معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم غیر خطی هستند. بنابراین، حل تحلیلی آن‌ها به راحتی مقدور نیست. در این مقاله، این دستگاه معادلات به روش رانگ کوتا مرتبه چهارم حل شده است. زمان بحرانی دینامیکی (t_{cr}) را می‌توان بر اساس معیار بدیناسکی-راث [۱۸] به دست آورد. بر اساس این معیار، برای مقادیر بزرگ سرعت بارگذاری، در منحنی دامنه-زمان جابه‌جایی‌ها سریعاً برحسب زمان افزایش می‌یابند و منحنی با عبور از ناحیه شیب‌دار متناظر با $t = t_{cr}$ که افت پایداری رخ می‌دهد، به ماکزیمم خود می‌رسد. بار متناظر با زمان بحرانی دینامیکی، بار کمانش بحرانی دینامیکی نامیده می‌شود.

۴- نتایج عددی

به منظور راستی آزمایی فرمول‌بندی حاضر، فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت‌شده کامل بدون بستر الاستیک در شکل ۲ آورده شده است که با تحلیل سیوال و نومن [۲۷] مقایسه شده است. همچنین کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت‌شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی که در جدول ۱ آورده شده است با مطالعات باروچ و سینگر [۲۸]، ردی و استارنس [۲۵] و شن [۲۹] مقایسه شده است و فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده با بستر الاستیک در جدول ۲ آورده شده است که با نتایج صوفیه و همکاران [۳۰] و پالیوال و همکاران [۳۱] مقایسه شده است. از بررسی نتایج فوق می‌توان دریافت که نتایج حاصل با سایر مراجع هم‌خوانی مناسبی دارد.



شکل (۲): مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده

جدول (۱): مقایسه بار کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک با تقویت‌کننده داخلی تحت فشار خارجی ($m=1$)

نوع تقویت‌کننده	مطالعه حاضر	باروچ و سینگر	ردی و استارنس	شن
بدون تقویت‌کننده	۱۰۳/۳۲۷ (۴)*	۱۰۲	۹۳/۵	۱۰۰/۷
تقویت‌کننده طولی	۱۰۴/۴۹۴ (۴)	۱۰۳	۹۴/۷	۱۰۲/۲
تقویت‌کننده حلقوی	۳۷۹/۶۹۴ (۳)	۳۷۰	۳۵۷/۵	۳۶۸/۳
هر دو	۳۸۷/۱۹۲ (۳)	۳۷۷	۳۶۵	۳۷۴/۱

* عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

جدول (۲): مقایسه فرکانس پوسته استوانه‌ای بدون

تقویت‌کننده با بستر الاستیک

n	مطالعه حاضر	صوفیه و همکاران	پالیوال و همکاران
۱	۰/۶۷۴۸۰	۰/۶۷۹۲۱	۰/۶۷۸۸۲
۲	۰/۳۶۴۶۳	۰/۳۶۴۶۳	۰/۳۶۳۹۴
۳	۰/۲۰۶۷۰	۰/۲۰۸۰۴	۰/۲۰۵۲۶
۴	۰/۱۳۸۲۴	۰/۲۰۸۰۴	۰/۱۲۷۴۵

جدول (۳): تأثیر R/h و ضریب کسر حجمی k بر

فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با بستر

الاستیک

R/h	k	بدون تقویت‌کننده	با تقویت‌کننده
۱۰۰	۰/۲	۲۱۸۷/۶(۶)*	۳۵۷۹/۵(۵)
۱۰۰	۱	۲۶۵۰/۶(۶)	۳۰۵۰/۸(۵)
۱۰۰	۵	۳۰۲۳/۷(۶)	۲۶۳۵/۴(۵)
۱۰۰	۱۰	۳۱۳۲/۴(۶)	۲۵۲۳/۹(۴)
۱۵۰	۰/۲	۱۸۸۸/۰(۷)	۳۱۹۶/۰(۶)
۱۵۰	۱	۲۲۶۰/۸(۷)	۲۸۹۸/۳(۵)
۱۵۰	۵	۲۲۵۲/۳(۷)	۲۵۸۷/۵(۵)
۱۵۰	۱۰	۲۶۴۳/۱(۷)	۲۴۷۴/۷(۴)
۲۰۰	۰/۲	۱۷۴۱/۳(۷)	۳۰۴۷/۳(۶)
۲۰۰	۱	۲۰۲۶/۸(۷)	۲۸۴۵/۸(۵)
۲۰۰	۵	۲۲۶۰/۶(۷)	۲۵۹۶/۰(۵)
۲۰۰	۱۰	۲۳۲۷/۶(۷)	۲۴۵۲/۲(۴)
۲۵۰	۰/۲	۱۶۸۶/۵(۷)	۲۹۸۶/۷(۶)
۲۵۰	۱	۱۹۳۳/۹(۷)	۲۸۱۹/۸(۵)
۲۵۰	۵	۲۱۳۲/۳(۷)	۲۶۰۳/۸(۴)
۲۵۰	۱۰	۲۱۸۵/۶(۷)	۲۴۳۴/۸(۴)

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

جدول ۴ تأثیر بستر الاستیک و تقویت‌کننده بر روی فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای را نشان می‌دهد که شاخص کسر حجمی پوسته و تقویت‌کننده‌ها (k_3, k_2, k) برابر با ۱، نسبت R/h برابر ۲۵۰، ارتفاع تقویت‌کننده‌ها ($h_s = h_r$) برابر ۰/۰۱ متر، عرض تقویت‌کننده‌ها ($d_s = d_r$) برابر ۰/۰۲۵ متر می‌باشد. همان‌طور که می‌توان دید پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) به شدت بر روی

۴-۱- پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با

تقویت‌کننده

در این قسمت، پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده با بستر الاستیک و شعاع (R) ۰/۵ متر، طول (L) ۰/۷۵ متر بررسی شده است. ترکیب مواد شامل آلومینیوم^۱ با مدول یانگ (E_m) 7×10^{10} نیوتن بر متر مربع، دانسیته جرمی (ρ_m) ۲۷۰۲ کیلوگرم بر متر مکعب و آلومینا^۲ با مدول یانگ (E_c) 38×10^{10} نیوتن بر متر مربع، دانسیته جرمی (ρ_c) ۳۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب می‌باشد. نسبت پواسون (ν) برای سادگی ۰/۳ فرض می‌شود. ارتفاع تقویت‌کننده‌ها معادل ۰/۰۱ متر، پهنای آن‌ها ۰/۰۰۲۵ متر در نظر گرفته می‌شود. سیستم تقویت‌کننده شامل ۱۵ تقویت‌کننده حلقوی و ۶۳ تقویت‌کننده طولی می‌باشد.

جدول ۳ فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج

تابعی با تقویت‌کننده دارای ارتعاش آزاد با پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) 5×10^5 نیوتن بر متر مکعب و $2/5 \times 10^4$ نیوتن بر متر می‌باشد. ارتفاع تقویت‌کننده‌ها ($h_s = h_r$) برابر ۰/۰۱ متر، عرض تقویت‌کننده‌ها ($d_s = d_r$) برابر ۰/۰۲۵ متر می‌باشد. همچنین شاخص کسر حجمی پوسته و تقویت‌کننده‌ها (k_3, k_2, k) با هم برابر است. به وضوح مشخص است که فرکانس طبیعی پوسته‌های تقویت‌شده بالاتر از پوسته‌های بدون تقویت‌کننده می‌باشد. زمانی که نسبت لز افزایش می‌یابد، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند. جدول ۳ نشان می‌دهد که با کاهش نسبت R/h ، فرکانس طبیعی پوسته افزایش می‌یابد.

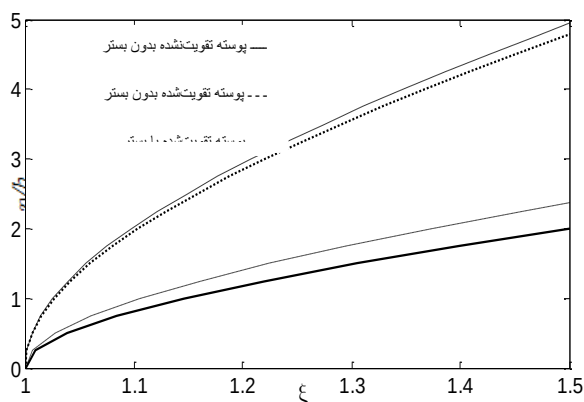
اثر نیروی محرکه q_0 بر روی منحنی ارتعاش غیرخطی فرکانس-دامنه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده داخلی در شکل ۳ نشان داده شده است. دو ضریب بستر الاستیک (k_s و k_w) به ترتیب 5×10^5 نیوتن بر متر مکعب و $2/5 \times 10^4$ نیوتن بر متر و دو مقدار Q برابر 10^5 و 2×10^4 نیوتن بر متر مربع در نظر گرفته می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که با کاهش نیروی محرکه منحنی ارتعاش اجباری به منحنی ارتعاشات آزاد نزدیک‌تر می‌شود.

1 - Aluminum

2 - Alumina

بستر الاستیک (k_s و k_w) به ترتیب 5×10^5 نیوتن بر متر مکعب و $2/5 \times 10^4$ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر 250 ، (k_3, k_2, k_1) برابر ۱ و مدهای (n و m) به ترتیب برابر (۱ و ۸) نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که منحنی فرکانس-دامنه پوسته بدون تقویت‌کننده از پوسته تقویت‌شده و بدون بستر الاستیک پایین‌تر است.

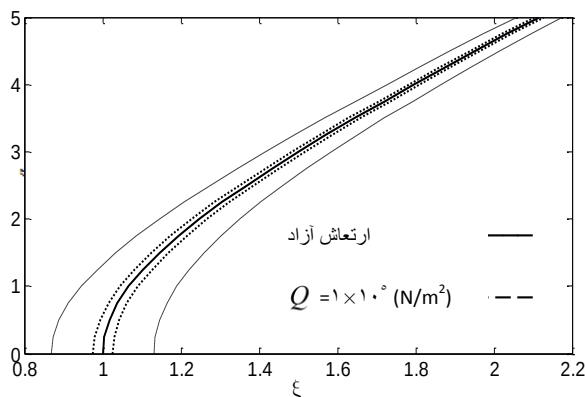
پاسخ‌های غیرخطی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده در شکل ۵ نشان داده شده است. که پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) به ترتیب 5×10^5 نیوتن بر متر مکعب و $2/5 \times 10^4$ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر 250 ، (k_3, k_2, k_1) برابر ۱ و مدهای (n و m) به ترتیب برابر (۱ و ۵) می‌باشد. فرکانس‌های تحریک مربوط به $q_0 = 10^6 \sin(300t)$ از فرکانس طبیعی بسیار کوچک‌تر است. این نتایج نشان می‌دهد که تقویت‌کننده‌ها، به شدت دامنه ارتعاشی پوسته را زمانی که فرکانس‌های تحریک از فرکانس‌های طبیعی دورتر است، کاهش می‌دهد.



شکل (۴): منحنی فرکانس-دامنه ارتعاش غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده

در شکل ۶ پوسته استوانه‌ای با تقویت‌کننده با پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) به ترتیب 5×10^5 نیوتن بر متر مکعب و $2/5 \times 10^4$ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر 250 ، (k_3, k_2, k_1) برابر ۱ و مدهای (n و m) به ترتیب برابر (۱ و ۵) و فرکانس تحریک (Ω) برابر با ۳۰۰ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود زمانی که نیروی محرکه کوچک است، رابطه خیز-سرعت به صورت یک منحنی بسته است. زمانی که نیروی محرکه (Q) افزایش

فرکانس طبیعی پوسته‌ها تأثیر می‌گذارد. همچنین در صورت وجود هر دو پارامتر بستر الاستیک، فرکانس طبیعی بزرگ‌تر می‌شود.



شکل (۳): منحنی فرکانس-دامنه ارتعاش غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده

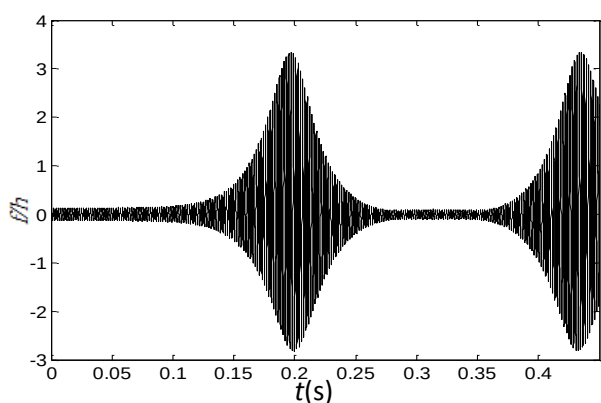
جدول (۴): تأثیر پارامترهای بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی

با تقویت‌کننده	بدون تقویت‌کننده	k_s	k_w
۲۷۵۶/۶(۵)	۱۶۵۴/۱(۸)*	۰	۰
۲۷۷۸/۴(۵)	۱۷۷۶/۷(۸)	10^4	۰
۲۸۱۰/۷(۵)	۱۹۱۴/۰(۷)	$2/5 \times 10^4$	۰
۲۸۶۳/۸(۵)	۲۱۱۷/۶(۷)	5×10^4	۰
۲۷۵۸/۵(۵)	۱۶۵۸/۷(۸)	۰	10^5
۲۷۸۰/۲(۵)	۱۷۸۱/۰(۸)	10^4	10^5
۲۸۱۲/۵(۵)	۱۹۱۸/۰(۷)	$2/5 \times 10^4$	10^5
۲۸۶۵/۶(۵)	۲۱۲۱/۲(۷)	5×10^4	10^5
۲۷۶۵/۹(۵)	۱۶۷۷/۱(۸)	۰	5×10^5
۲۷۸۷/۶(۵)	۱۷۹۸/۲(۸)	10^4	5×10^5
۲۸۱۹/۸(۵)	۱۹۳۳/۹(۷)	$2/5 \times 10^4$	5×10^5
۲۸۷۲/۷(۵)	۲۱۳۵/۷(۷)	5×10^4	5×10^5
۲۷۷۵/۱(۵)	۱۶۹۹/۹(۸)	۰	10^6
۲۷۹۶/۸(۵)	۱۸۱۹/۵(۸)	10^4	10^6
۲۸۲۸/۹(۵)	۱۹۵۳/۷(۷)	$2/5 \times 10^4$	10^6
۲۸۸۱/۶(۵)	۲۱۵۳/۶(۷)	5×10^4	10^6

* عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

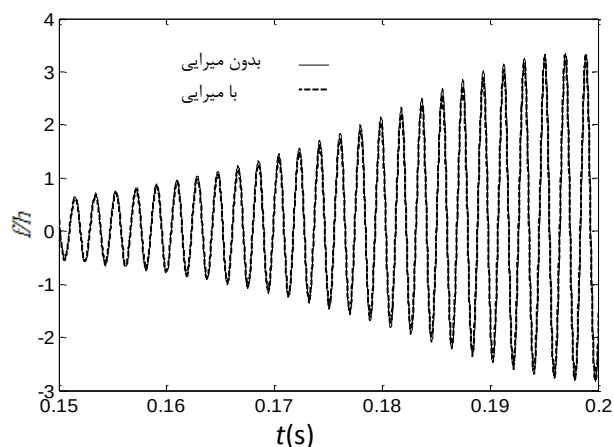
شکل ۴ تأثیر هر دو تقویت‌کننده و بستر الاستیک را بر روی منحنی فرکانس-دامنه ارتعاش آزاد غیرخطی برای پارامترهای

در شکل ۸ مشاهده می‌شود زمانی که فرکانس‌های تحریک به فرکانس‌های طبیعی نزدیک هستند، پدیده‌ای جالب مشابه پدیده هارمونیک ضربان ارتعاش خطی مشاهده می‌شود. فرکانس تحریک (Ω) برابر با ۲۸۰۰ رادیان بر ثانیه است که به فرکانس طبیعی (ω_{mn}) ۲۸۱۹/۸ رادیان بر ثانیه برای پوسته استوانه‌ای با تقویت‌کننده داخلی، نزدیک می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، دامنه ضربه، زمانی که فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی نزدیک می‌شود، در حال افزایش است.



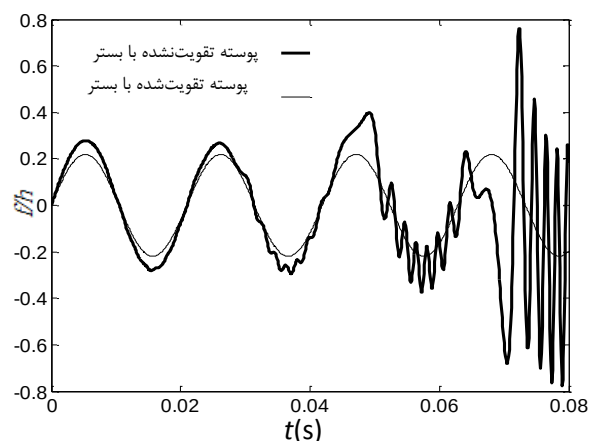
شکل (۸): پاسخ غیرخطی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده

در شکل ۹ و ۱۰ تأثیر میرایی بر پاسخ‌های غیرخطی مشاهده می‌شود، که ضریب میرایی خطی برابر ۰/۳ در نظر گرفته شده است. تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی در دوره‌های اول ارتعاش خیلی کوچک است (شکل ۹) درحالی‌که در دوره‌های بعدی دامنه را به شدت کاهش می‌دهد (شکل ۱۰).

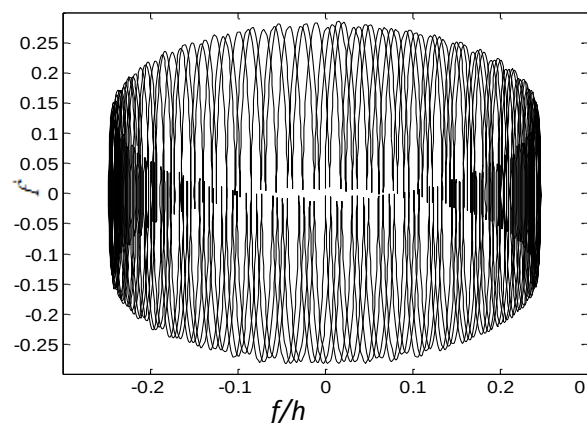


شکل (۹): تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده در دوره‌های اولیه

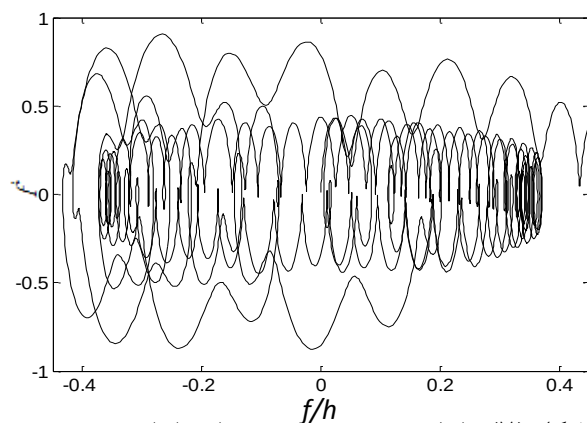
می‌یابد یعنی برابر با $1/5 \times 10^6$ نیوتن بر متر مربع، منحنی خیز-سرعت بی‌نظم‌تر می‌شود که در شکل ۷ مشاهده می‌شود.



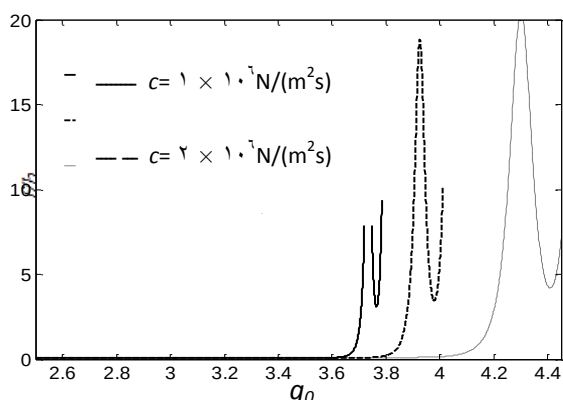
شکل (۵): پاسخ‌های غیرخطی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده



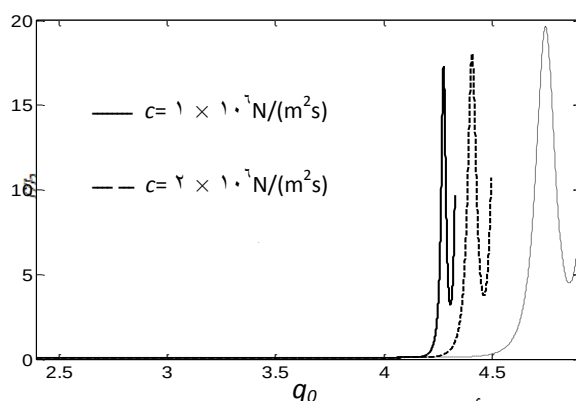
شکل (۶): رابطه خیز-سرعت پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده تحت نیروی محرکه (Q) برابر با 10^6 نیوتن بر متر مربع



شکل (۷): رابطه خیز-سرعت پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده تحت نیروی محرکه (Q) برابر با $1/5 \times 10^6$ نیوتن بر متر مربع

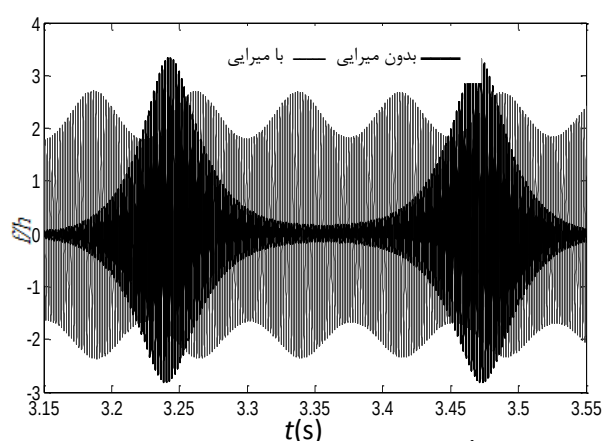


شکل (۱۱): تأثیر سرعت بارگذاری بر پاسخ دینامیکی پوسته تقویت شده تحت فشار خارجی بدون بستر الاستیک و مدهای $(n$ و $m)$ به ترتیب برابر ۱ و ۸



شکل (۱۲): تأثیر سرعت بارگذاری بر پاسخ دینامیکی پوسته تقویت شده تحت فشار خارجی با بستر الاستیک $(k_s$ و $k_w)$ به ترتیب 5×10^5 نیوتن بر متر مکعب و $2/5 \times 10^4$ نیوتن بر متر و مدهای $(n$ و $m)$ به ترتیب برابر ۱ و ۸

تأثیر بستر الاستیک و تقویت کننده بر بارهای کمانش بحرانی غیرخطی در جدول ۵ آورده شده است. در محاسبات پارامترهای بستر الاستیک $(k_s$ و $k_w)$ به ترتیب 5×10^5 نیوتن بر متر مکعب و $2/5 \times 10^4$ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر ۲۵۰، (k_3, k_2, k_1) برابر ۱ و مقدار سرعت بارگذاری (c) برابر با 10^6 نیوتن بر متر مربع ثانیه، فرض شده است. به وضوح مشخص است که بستر الاستیک باعث افزایش قابل توجه بار بحرانی کمانش می شود. به نظر می رسد تقویت کننده های طولی و تقویت کننده های حلقوی به شدت بر بار بحرانی کمانش پوسته ها تأثیر می گذارد. جدول ۵ همچنین نشان می دهد بارهای بحرانی کمانش دینامیکی از بارهای بحرانی کمانش استاتیکی بیشتر است.



شکل (۱۰): تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی پوسته استوانه ای تقویت شده در دوره های ثانویه

۲-۴- کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته مدرج تابعی با

تقویت کننده

به منظور تحلیل کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته های استوانه ای مدرج تابعی با تقویت کننده، پوسته های استوانه ای مدرج تابعی با تقویت کننده و بدون تقویت کننده با بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک با شعاع (R) ۰/۵ متر، طول (L) ۰/۷۵ متر در نظر گرفته می شود. ترکیب مواد مانند بخش قبلی می باشد. ارتفاع تقویت کننده ۰/۰۵ متر و عرض آن ۰/۰۲ متر می باشد. سیستم تقویت کننده شامل ۱۵ تقویت کننده حلقوی و ۶۳ تقویت کننده طولی می باشد.

شکل ۱۱-۱۲ پاسخ های دینامیکی پوسته های تقویت شده با بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک تحت بار مکانیکی را نشان می دهد. این نمودارها نشان می دهد که نقطه مشخصی مانند تحلیل استاتیکی وجود ندارد. در عوض، ناحیه ناپایداری جایی است که منحنی شیب f نسبت به t به شدت افزایش پیدا می کند. بر طبق معیار بدیناسکی- راث [۸]، زمان بحرانی t_{cr} را می توان در میانه این ناحیه در نظر گرفت. بنابراین، می توان نقطه عطف منحنی یعنی $\left. \frac{d^2 f}{dt^2} \right|_{t=t_{cr}} = 0$ را انتخاب

کرد [۷]. تأثیر سرعت بارگذاری بر پاسخ های دینامیکی پوسته های استوانه ای در شکل ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است. سه مقدار سرعت بارگذاری (c) برابر با 10^6 ، 2×10^6 و 5×10^6 نیوتن بر متر مربع ثانیه، انتخاب می شود. به وضوح مشخص است که بارهای کمانش دینامیکی بحرانی و پاسخ ماکزیمم دامنه با افزایش سرعت بار افزایش می یابد.

جدول (۵): تأثیر بستر الاستیک و تقویت‌کننده بر بار بحرانیکمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی ($\times 10^5$)

نوع تقویت‌کننده	بدون بستر الاستیک (استاتیکی)	بدون بستر الاستیک (دینامیکی)	با بستر الاستیک (استاتیکی)	با بستر الاستیک (دینامیکی)
بدون تقویت‌کننده	۱/۲۹۲(۹)*	۱/۵۶۴(۹)	۱/۸۵۰(۹)	۲/۱۲۰(۹)
تقویت‌کننده طولی	۳/۳۴۵(۸)	۳/۷۳۲(۸)	۴/۰۲۲(۸)	۴/۳۰۴(۸)
تقویت‌کننده حلقوی	۱/۳۰۰(۹)	۱/۶۸۹(۹)	۱/۸۵۸(۹)	۲/۳۰۴(۹)
هر دو تقویت‌کننده	۳/۴۶۵(۸)	۳/۷۴۴(۸)	۴/۰۳۸(۸)	۴/۲۷۱(۸)

* عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

ناچیز است، اگرچه دامنه را در دوره‌های بعد به شدت کاهش می‌دهد.

(د) تقویت‌کننده‌ها و بستر الاستیک، پایداری دینامیکی و ظرفیت تحمل بار پوسته‌های مدرج تابعی را بالا می‌برند.

(ه) بیش‌ترین فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد مربوط به پوسته شامل بستر الاستیک با حضور هر دو پارامتر (k_s و k_w) می‌باشد.

(و) نسبت شعاع به ضخامت، بستر الاستیک و موقعیت تقویت‌کننده‌ها تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای دارد.

(ز) تقویت‌کننده‌های طولی تأثیر ناچیز و تقویت‌کننده‌های حلقوی تأثیر قابل توجهی بر بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دارند.

۶- مراجع

1. Shen, H.S. "Postbuckling Analysis of Pressure-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments", Eng. Struct., Vol. 25, No. 4, pp. 487-497, 2003.
2. Huang, H. and Han, Q. "Nonlinear Elastic Buckling and Postbuckling of Axially Compressed Functionally Graded Cylindrical Shells", Int. J. Mech. Sci., Vol. 51, No. 7, pp. 500-507, 2009.
3. Shen, H.S. "Torsional Buckling and Postbuckling of FGM Cylindrical Shells in Thermal Environments", Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 44, No. 6, pp. 644-657, 2009.
4. Azimi, P., Mehrabani, M.M., and Jafari, A.A. "Effect of Internal Pressure on Free Vibration of a FGM Cylindrical Shell", Aerospace Mech. J., Vol. 7, No. 1, pp. 81-90, 2011. (In Persian)
5. Zozulya, V.V. and Zhang, and Ch. "A High Order Theory for Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells", Int. J. Mech. Sci., Vol. 60, No. 1, pp. 12-22, 2012.
6. Shen, H.S. "Postbuckling of Shear Deformable FGM Cylindrical Shells Surrounded by an Elastic Medium", Int. J. Mech. Sci., Vol. 51, No. 5, pp. 372-383, 2009.
7. Bagherizadeh, E., Kiani, Y., and Eslami, M.R. "Mechanical Buckling of Functionally Graded Material Cylindrical Shells Surrounded by Pasternak Elastic Foundation", Compos. Struct., Vol. 93, No. 11, pp. 3063-3071, 2011.
8. Sofiyev, A.H. "Buckling Analysis of FGM Circular Shells Under Combined Loads and Resting on the

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش نیمه تحلیلی برای تحلیل پوسته‌های نازک استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده در معرض فشار خارجی وابسته به زمان که توسط بستر الاستیک احاطه‌شده، پیشنهاد شده است. بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای با جمله‌های غیرخطی فن‌کارمن، معادلات حاکم به دست آمده است. یک عبارت سه‌جمله‌ای شامل شکل پیش‌کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیرخطی برای تقریب خیز پوسته با تقویت‌کننده مدرج تابعی استفاده شده است. با استفاده از روش گالرکین، معادلات دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده به دست آورده شده است و رابطه فرکانس-دامنه ارتعاش غیرخطی به فرم ساده نوشته شده است. پاسخ دینامیکی غیرخطی و بار کمانش دینامیکی بحرانی با استفاده از روش رانگ کوتا و معیار بدیناسکی-راث تحلیل شده است.

بعضی از نتایج به دست آمده از این مطالعه عبارت است:

- (الف) تقویت‌کننده‌ها و بستر الاستیک تأثیر زیادی بر افزایش فرکانس طبیعی پوسته‌ها دارد.
- (ب) زمانی که فرکانس‌های تحریک به فرکانس‌های طبیعی نزدیک هستند، پدیده‌ای جالب مثل پدیده هارمونیک ضربان ارتعاش خطی مشاهده می‌شود.
- (ج) تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی در اولین دوره ارتعاش

- Foundations", *Meccanica*, Vol. 48, No. 4, pp. 829-840, 2013.
20. Duc, N.D. and Thang, P.T. "Nonlinear Dynamic Response and Vibration of Shear Deformable Imperfect Eccentrically Stiffened S-FGM Circular Cylindrical Shells Surrounded on Elastic Foundations", *J. Astr.*, Vol. 40, pp. 115-127, 2015.
 21. Bich D.H., Dung D.V., and Nam V.H., "Nonlinear Dynamical Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Cylindrical Panels", *Compos. Struct.*, Vol. 94, No. 8, pp. 2465-2473, 2012.
 22. Bich D.H., Dung D.V., and Nam V.H., "Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Imperfect Functionally Graded Doubly Curved Thin Shallow Shells", *Compos. Struct.*, Vol. 96, pp. 384-395, 2013.
 23. Bich D.H., Duc N.D., and Quan T.Q. "Nonlinear Vibration of Imperfect Eccentrically Stiffened Functionally Graded Double Curved Shallow Shells Resting on Elastic Foundation Using the First Order Shear Deformation Theory" *Mechanical Sciences*, Vol. 80, pp. 16-28, 2013.
 24. Brush, D.O. and Almroth, B. O. "Buckling of Bars, Plates and Shells", Mc Graw-Hill, New York, 1975.
 25. Reddy, J.N. and Starnes, J.H. "General Buckling of Stiffened Circular Cylindrical Shells According to a Layerwise Theory", *Comput. Struct.*, Vol. 49, No. 4, pp. 605-616, 1993.
 26. Volmir, A.S. "Non-linear Dynamics of Plates and Shells", Science Edition M, USSR, 1972. (in Russian).
 27. Sewall, J.L. and Naumann, E.C. "An Experimental and Analytical Vibration Study of Thin Cylindrical Shells with and Without Longitudinal Stiffeners", NASA technical, note D-4705, pp. 1-54, 1968.
 28. Baruch, M. and Singer, J. "Effect of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells Under Hydro-static Pressure", *J. Mech. Eng. Sci.* Vol. 5, No. 1, pp. 23-27, 1963.
 29. Shen, H.S. "Post-buckling Analysis of Imperfect Stiffened Laminated Cylindrical Shells Under Combined External Pressure and Thermal Loading", *Int. J. Mech.*, Vol. 40, No. 4, pp. 339-355, 1998.
 30. Sofiyev, A.H. "The Non-linear Vibration of FGM Truncated Conical Shells", *Compos. Struct.*, Vol. 94, No. 7, pp. 2237-2245, 2012.
 31. Paliwal, D.N., Pandey, R. K., and Nath, T. "Free Vibration of Circular Cylindrical Shell on Winkler and Pasternak Foundation", *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, Vol. 69, No. 1, pp. 79-89, 1996.
 - Pasternak Type Elastic Foundation", *Mech. Res. Commun.*, Vol. 37, No. 6, pp. 539-544, 2010.
 9. Najafizadeh, M.M., Hasani, A., and Khazaeinejad, P. "Mechanical Stability of Functionally Graded Stiffened Cylindrical Shells", *Appl. Math.*, Vol. 54, No. 2, pp. 1151-1157, 2009.
 10. Bich, D.H., Nam, V.H., and Phuong, N.T. "Nonlinear Postbuckling of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Plates and Shallow Shells", *Vietnam J. Mech.*, Vol. 33, No. 3, pp. 132-147, 2011.
 11. Dung, D.V. and Hoa, L.K. "Nonlinear Buckling and Post-buckling Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Circular Cylindrical Shells Under External Pressure", *Thin-Walled Struct.*, Vol. 63, pp. 117-124, 2013.
 12. Malekzadeh Fard K., ZamaniSani, S.M., and Tajdari, M., Satouri, S. "Dynamic Analysis of the Long Thick Cylindrical Shell Subjected to Mechanical Transient Moving Pressure", *Aerospace Mech. J.*, Vol. 10, No. 3, pp. 43-52, 2014. (In Persian)
 13. Isvandzibaei, M.R., Setareh, M., and Jahani, A. "Comparison of Clamped-Clamped and Clamped-Free Boundary Conditions for Free Vibration of FGM Cylindrical Shell with Ring Support, Based on Third Order Shear Deformation Theory", *Aerospace Mech. J.*, Vol. 6, No. 3, pp. 25-38, 2010. (In Persian)
 14. Dung, D.V. and Nam, V.H. "Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Circular Cylindrical Thin Shells Under External Pressure and Surrounded by an Elastic Medium", *European J.*, Vol. 46, pp. 42-53, 2014.
 15. Darabi, M., Darvizeh, M., and Darvizeh, A. "Non-linear Analysis of Dynamic Stability for Functionally Graded Cylindrical Shells Under Periodic Axial Loading", *Compos. Struct.*, Vol. 83, No. 2, pp. 201-211, 2008.
 16. Sofiyev, A.H. "The Vibration and Stability Behavior of Freely Supported FGM Conical Shells Subjected to External Pressure", *Compos. Struct.* Vol. 89, No. 3, pp. 356-366, 2009.
 17. Huang, H. and Han, Q. "Nonlinear Dynamic Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to a Time-dependent Axial Load", *Compos. Struct.*, Vol. 92, No. 2, pp. 593-598, 2010.
 18. Budiansky, B. and Roth, R.S. "Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells", NASA technical, note D_1510, pp. 597-606, 1962.
 19. Najafov, A.M., Sofiyev, A.H., and Kuruoglu, N., "Torsional Vibration and Stability of Functionally Graded Orthotropic Cylindrical Shells on Elastic