

## استخراج پارامترهای الکترومغناطیسی یک تیغه متامتریالی همگن و همسانگرد با استفاده از روش فضای حالت

داود ظریفی<sup>۱\*</sup>، علی فرحبخش<sup>۲</sup>، محمد سلیمانی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، مربی، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۳- استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران

(تاریخ دریافت: ۹۳/۰۹/۲۸، تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۶/۰۳)

**چکیده:** در این مقاله، استخراج پارامترهای الکترومغناطیسی ساختارهای متامتریالی با استفاده از رویکرد فضای حالت بررسی شده است. هر چند که رویکرد فضای حالت در مسائل پراکندگی الکترومغناطیسی به عنوان یک روش قدرتمند و قاعده مند شناخته می شود، اما به دلیل برخی مشکلات و چالش ها استفاده از این روش در مسائل پراکندگی معکوس الکترومغناطیسی مورد توجه قرار نگرفته است. این روش بر مبنای ماتریس انتقال حالت و ویژگی های آن می باشد. در روش های متداول که عمدتاً به عنوان روش های تمام موج شناخته می شوند، با حل معادله موج در محیط مورد نظر و سپس برقراری شرایط مرزی و حل دستگاه معادلات غیرخطی پارامترهای الکترومغناطیسی محیط مشخص می شوند. البته در محیط های ساده الکترومغناطیسی مانند محیط های همگن همسانگرد امکان به دست آوردن روابط بسته برای مشخصات الکترومغناطیسی محیط وجود دارد؛ اما در محیط های پیچیده الکترومغناطیسی چنین امکانی وجود ندارد. مهم ترین تفاوت این روش با روش های متداول، محاسبه و استفاده مستقیم از ماتریس انتقال حالت است که نیاز به حل مستقیم معادله موج و سپس معادلات غیرخطی را از بین می برد. از مهمترین مزایای این روش در تحلیل مسائل معکوس الکترومغناطیسی می توان به کاهش میزان پیچیدگی غیرخطی بودن مسئله اشاره کرد. پس از ارائه جزئیات و فرمول بندی روش مطرح شده، به منظور اطمینان از صحت نتایج، از آن برای استخراج پارامترهای الکترومغناطیسی شناخته شده ترین ساختار متامتریالی موجود استفاده شده است. مقایسه نتایج حاصل از این روش با روش متداول تمام موج، نشان دهنده عملکرد مطلوب و درستی الگوریتم مطرح شده است.

**واژه های کلیدی:** بازیابی پارامتر، محیط های پیچیده، متامتریال، روش فضای حالت، ماتریس انتقال حالت.

### ۱- مقدمه

قدرتمند مشخص سازی است. در حقیقت، فرایند مشخص سازی، بازیابی پارامتر یا استخراج پارامترهای الکترومغناطیسی (از جمله ضرایب گذردهی الکتریکی و مغناطیسی و...) یکی از مهم ترین مراحل است که در طراحی و بررسی ویژگی های انواع ساختارهای کامپوزیتی و متامتریالی، به منظور مشخص کردن پارامترهای الکترومغناطیسی مؤثر یک محیط، انجام می شود. با استفاده از این فرایند و نتایج عددی و آزمایشگاهی، می توان ساختارهای پیچیده و متامتریالی جدیدی طراحی کرده و بسیاری از مشخصات مهم الکترومغناطیسی آن ها را مورد بررسی قرار داد.

در سال های گذشته با توجه به جلب توجه فراوان به طراحی و کاربرد ساختارهای پیچیده و متامتریالی، استخراج پارامترهای

در طول قرن گذشته، مطالعه و مشخص سازی ساختارهای کامپوزیتی و پیچیده الکترومغناطیسی به واسطه داشتن ویژگی های جالب و کاربردی به عنوان یک موضوع حائز اهمیت در الکترومغناطیس مدرن مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. همچنین با معرفی و تحقق ساختارهای متامتریالی در دهه اخیر، این روند شتاب بیشتری یافته و تحقیقات و مطالعات مرتبط با چنین حوزه گسترده ای، به میزان چشمگیری افزایش پیدا کرده است. واضح است که طراحی، شناسایی دقیق و بررسی ویژگی های ساختارهای پیچیده و متامتریالی مستلزم در اختیار داشتن یک روش

میزان پیچیدگی و غیرخطی بودن مسائل پراکندگی معکوس و همچنین امکان تعمیم برای استفاده در مسائل شامل محیط‌های پیچیده‌تر می‌باشد.

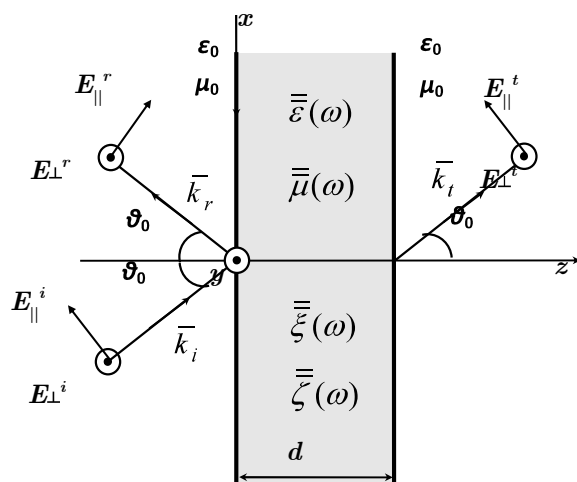
## ۲- رویکرد فضای حالت در تحلیل مسائل الکترومغناطیسی

### ۲-۱- مسائل پراکندگی الکترومغناطیسی

به جرأت می‌توان گفت که روش فضای حالت در تحلیل مسائل پراکندگی الکترومغناطیسی از محیط‌های پیچیده صفحه‌ای به‌عنوان یک روش کاملاً عمومی، قدرتمند و قاعده‌مند شناخته می‌شود [۱۷-۱۳].

به منظور روشن‌تر شدن کاربرد و ویژگی‌های این روش در مسائل الکترومغناطیسی، ابتدا کلیات آن بیان می‌شود. فرض کنید یک تیغه پیچیده با پارامترهای ساختاری  $\bar{\epsilon}$ ،  $\bar{\mu}$  و  $\bar{\xi}$  که به ترتیب ضرایب گذردهی الکتریکی و مغناطیسی و تزویج مگنتوالکتریکی هستند، مطابق شکل (۱) در اختیار است و می‌خواهیم ماتریس‌های انعکاس و انتقال الکترومغناطیسی این تیغه را مشخص کنیم. در این حالت، معادلات کرل ماکسول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{H} = j\omega \bar{B} = j\omega (\bar{\epsilon} \bar{E} + \bar{\xi} \bar{H}) \\ \bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega \bar{D} = -j\omega (\bar{\xi} \bar{E} + \bar{\mu} \bar{H}) \end{cases} \quad (1)$$



شکل ۱: تیغه دونا همسانگرد تحت تابش یک موج صفحه‌ای

الکترومغناطیسی این ساختارها هم مورد توجه قرار گرفته است. به‌طور کلی می‌توان روش‌های ارائه‌شده را به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد:

- روش‌های مبتنی بر میدان‌های داخلی ساختارها و مدل‌سازی‌های تئوری: در این روش‌ها عمدتاً نسبت میدان‌ها در نقاط مختلف ساختار پیچیده یا ماتریالی محاسبه و سپس از روی این مقادیر پارامترهای الکترومغناطیسی ساختار تخمین زده می‌شود [۵-۱]. هر چند که این نوع روش‌ها در شبیه‌سازی‌های عددی قابل استفاده و نسبتاً کارآمد هستند؛ اما به‌دلیل این که در عمل به میدان‌های داخل ساختار دسترسی وجود ندارد، استفاده از این روش‌ها تقریباً غیرممکن است.

- روش‌های مبتنی بر پارامترهای پراکندگی و رویکرد تمام موج: ایده اساسی که در این روش‌ها وجود دارد این است که بین ضرایب انعکاس و انتقال اندازه‌گیری یا محاسبه‌شده تیغه مورد نظر با ضخامت معین و ضرایب انعکاس و انتقال تئوری یک تیغه همگن فرضی با همان ضخامت مقایسه‌ای صورت گرفته و بدین ترتیب پارامترهای ساختار مورد نظر محاسبه می‌شود [۱۰-۶]. مزیت اصلی این روش امکان اعمال هم‌زمان آن به ساختارهای ساده و پیچیده و استفاده از آن، در شبیه‌سازی و کاربردهای عملی است.

- روش‌های مبتنی بر پارامترهای پراکندگی به‌همراه روش‌های عددی و بهینه‌سازی: اصول این نوع روش‌ها مشابه حالت قبلی است، با این تفاوت که در این روش‌ها به جای استفاده از ضرایب انعکاس و انتقال تئوری یک تیغه همگن فرضی و مقایسه با ضرایب انعکاس و انتقال اندازه‌گیری یا محاسبه‌شده، از انواع روش‌های بهینه‌سازی برای محاسبه پارامترهای الکترومغناطیسی ساختار مورد مطالعه استفاده می‌شود [۱۲-۱۱]. مزیت اصلی این روش‌ها در حالت‌های پیچیده از جمله تابش مایل موج به ساختارهای دو ناهمسانگرد که امکان استفاده از رویکرد تمام موج و استخراج روابط بسته تئوری برای ضرایب انعکاس و انتقال وجود ندارد، مشخص می‌شود. اما بزرگ‌ترین مشکل این نوع روش‌ها، نیاز به زمان و حافظه بسیار زیاد، نیاز به مقادیر اولیه مناسب و دقیق و مشکلات عدم همگرایی روش‌های بهینه‌سازی است.

که بالانویس‌های  $t$  و  $r$  در میدان‌ها به ترتیب نشان‌دهنده میدان تابشی، انتقالی و انعکاسی است. با در نظر گرفتن این تعاریف، می‌توان رابطه (۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\bar{E}_T^i(0) + \bar{E}_T^r(0) = [\Phi_1] \bar{E}_T^i(d) + [\Phi_2] \bar{H}_T^i(d) \quad (6)$$

$$\bar{H}_T^i(0) + \bar{H}_T^r(0) = [\Phi_3] \bar{E}_T^i(d) + [\Phi_4] \bar{H}_T^i(d) \quad (7)$$

با تعریف ماتریس امیدانس موج به صورت

$$[Z_0] = \begin{bmatrix} 0 & -\eta_0 \cos \theta_0 \\ \eta_0 / \cos \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

که  $\eta_0$  امیدانس موج فضای آزاد است. با توجه به شکل (۱) می‌توان روابط  $\bar{E}_T^i(0) = -[Z_0] \bar{H}_T^r(0)$  و  $\bar{E}_T^r(0) = [Z_0] \bar{H}_T^i(0)$  را در نظر گرفت [۱۴]. با قرار دادن این روابط در روابط (۶) و (۷) می‌توان نوشت:

$$\bar{E}_T^i(0) + \bar{E}_T^r(0) = [\Phi_1] \bar{E}_T^i(d) + [\Phi_2] [Z_0]^{-1} \bar{E}_T^i(d) \quad (9)$$

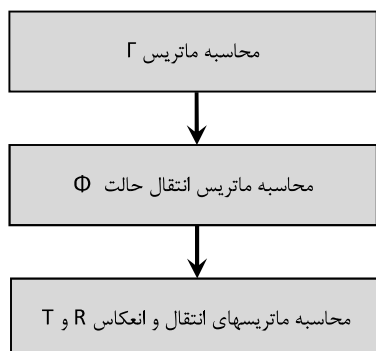
$$[Z_0]^{-1} \bar{E}_T^i(0) - [Z_0]^{-1} \bar{E}_T^r(0) = [\Phi_3] \bar{E}_T^i(d) + [\Phi_4] [Z_0]^{-1} \bar{E}_T^i(d). \quad (10)$$

با استفاده از روابط (۴)، (۵)، (۹) و (۱۰) ماتریس‌های انتقال و انعکاس  $T$  و  $R$  بر حسب ماتریس‌های انتقال حالت و امیدانس موج به دست می‌آیند:

$$[R] = [[\Phi_1][Z_0] + [\Phi_2] - [Z_0][\Phi_3][Z_0] - [Z_0][\Phi_4]] \\ [[\Phi_1][Z_0] + [\Phi_2] - [Z_0][\Phi_3][Z_0] - [Z_0][\Phi_4]]^{-1} \quad (11)$$

$$[T] = 2[Z_0] \\ [[\Phi_1][Z_0] + [\Phi_2] + [Z_0][\Phi_3][Z_0] + [\Phi_4]]^{-1} \quad (12)$$

در این قسمت به نحوه استفاده از رویکرد فضای حالت در مسائل پراکندگی الکترومغناطیسی پرداخته و دیده شد که مراحل چنین رویکردی را می‌توان در سه مرحله خلاصه کرد. در اینجا مراحل در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲: مراحل رویکرد فضای حالت در تحلیل مسائل پراکندگی الکترومغناطیسی

که در این رابطه،  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای است. واضح است که با توجه به ساختار نامحدود مسئله در جهت  $y$  و شرط تطبیق فاز در مرزها داریم:

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad \partial / \partial x = -jk_0 \sin \theta_0 \quad \partial / \partial y = 0$$

موج فضای آزاد است. همچنین با توجه به این که اعمال شرایط مرزی تنها مستلزم در نظر گرفتن مؤلفه‌های عرضی میدان‌هاست، با حذف مؤلفه‌های طولی میدان‌ها از روابط فوق می‌توان معادلات حاکم بر میدان‌های داخل تیغه را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \bar{E}_T \\ \bar{H}_T \end{pmatrix} = [\Gamma_\omega] \begin{pmatrix} \bar{E}_T \\ \bar{H}_T \end{pmatrix} \quad (2)$$

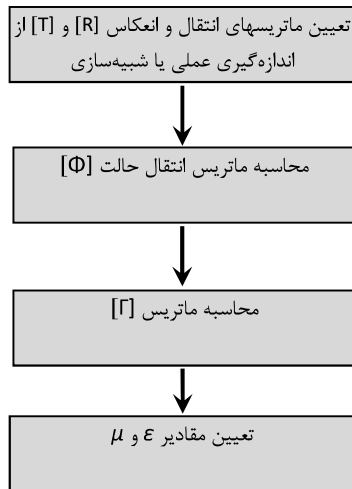
که  $\bar{E}_T = (E_x, E_y)$  و  $\bar{H}_T = (H_x, H_y)$  بردارهای متشکل از مؤلفه‌های مماسی میدان‌ها هستند. مشخص است که  $[\Gamma_\omega]$  همواره ماتریسی  $4 \times 4$  و تابع پارامترهای الکترومغناطیسی تیغه، فرکانس و زاویه تابش موج است. همچنین توجه کنید که غیرهمگنی طولی تیغه، یعنی وابستگی پارامترهای الکترومغناطیسی به  $z$ ، تا این مرحله مشکلی ایجاد نمی‌کند و  $[\Gamma_\omega]$  می‌تواند تابعی از  $z$  نیز باشد. با کمی دقت می‌توان به تشابه رابطه (۲) با معادلات فضای حالت مرسوم در تحلیل مدارها و سیستم‌های کنترل خطی و تغییرناپذیر با زمان پی برد [۱۳]. بنابراین با استدلالی مشابه این حوزه، می‌توان ماتریس انتقال حالت  $[\Phi]$  را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_T \\ \bar{H}_T \end{pmatrix}_{z=0} = [\Phi_{4 \times 4}] \begin{pmatrix} \bar{E}_T \\ \bar{H}_T \end{pmatrix}_{z=d} \\ = \begin{bmatrix} [\Phi_1]_{2 \times 2} & [\Phi_2]_{2 \times 2} \\ [\Phi_3]_{2 \times 2} & [\Phi_4]_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_T \\ \bar{H}_T \end{pmatrix}_{z=d} \quad (3)$$

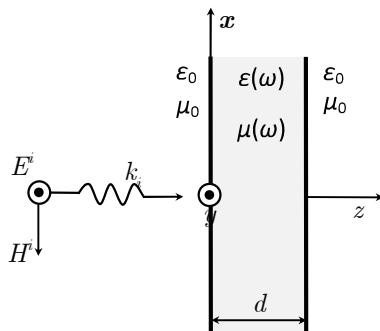
که  $[\Phi] = e^{-[\Gamma_\omega]d}$  است. در حقیقت، ماتریس انتقال حالت مؤلفه‌های مماسی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در دو طرف تیغه را به هم مرتبط می‌سازد. مشاهده می‌کنید که ماتریس انتقال حالت به ۴ زیرماتریس تقسیم شده است. ماتریس‌های انتقال  $[T]$  و انعکاس  $[R]$  را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{E}_T^r(z=0) = [R] \bar{E}_T^i(z=0) \\ = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{bmatrix} \bar{E}_T^i(z=0) \quad (4)$$

$$\bar{E}_T^t(z=d) = [T] \bar{E}_T^i(z=0) \\ = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \bar{E}_T^i(z=0) \quad (5)$$



شکل ۳: مراحل رویکرد فضای حالت در تحلیل مسائل پراکندگی معکوس



شکل ۴: تیغه همسانگرد تحت تابش یک موج صفحه‌ای

درایه مجهول دارد، درحالی‌که ما فقط دو مقدار معلوم در دست داریم.

به نظر می‌رسد این چالش اساسی، عاملی است که سبب شده تا رویکرد فضای حالت که در مسائل پراکندگی الکترومغناطیسی به عنوان یک روش قدرتمند و سیستماتیک شناخته می‌شود، در مسائل پراکندگی معکوس، این چنین ناکارآمد به نظر برسد. ایده‌ای که در اینجا پیشنهاد می‌شود نسبتاً ساده اما بسیار کارآمد بوده و بر پایه یک فرض منطقی مبتنی بر کاربردهای عملی این روش استوار است. توجه می‌کنیم که هدفمان از ارائه، پیاده‌سازی و توسعه رویکرد فضای حالت در استخراج پارامترهای الکترومغناطیسی محیط‌های پیچیده و متامتریالی است.

در این گونه مسائل، معمولاً پس از طراحی محیط‌های پیچیده و متامتریالی و شناخت فیزیکی مقدماتی از ساختار طراحی‌شده، نیازمند روشی هستیم که پارامترهای الکترومغناطیسی ساختاری آن‌ها را تعیین کنیم که تاکنون عمدتاً با روش‌های مبتنی بر رویکرد

## ۲-۲- مسائل پراکندگی معکوس الکترومغناطیسی

اکنون فرض کنید بخواهیم چنین رویکردی را در مسائل پراکندگی معکوس به کار بگیریم. بنابراین مراحل چنین رویکردی را می‌توان به-طور خلاصه مطابق شکل (۳) در نظر گرفت. همان‌طور که در این شکل مشخص است، استفاده از رویکرد فضای حالت در استخراج پارامترهای الکترومغناطیسی محیط‌های پیچیده و متامتریالی صفحه‌ای شامل دو مرحله تعیین و محاسبه ماتریس انتقال حالت با استفاده از ضرایب انتقال و انعکاس اندازه‌گیری‌شده و سپس محاسبه ماتریس  $\Gamma_{\omega}$  و تعیین پارامترهای الکترومغناطیسی تیغه خواهد بود. در حقیقت، هدف ما تعیین پارامترهای الکترومغناطیسی تیغه‌ای با ضخامت معلوم، با استفاده از ضرایب انتقال و انعکاس موج از ساختار است.

## ۳- استخراج پارامترهای الکترومغناطیسی تیغه همسانگرد همگن با استفاده از روش فضای حالت

واضح است که، محاسبه ماتریس انتقال حالت با استفاده از ضرایب انتقال و انعکاس به‌طوری که پاسخ یکتایی به‌دست آید، مستلزم برابر بودن تعداد معلومات و مجهولات است. این نکته همان چالش اصلی رویکرد فضای حالت در این مرحله است. برای روشن‌تر شدن موضوع، در این قسمت، استخراج پارامترهای الکترومغناطیسی یک تیغه همسانگرد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

به عنوان ساده‌ترین حالت، فرض کنید هندسه و ساختار مسئله مطابق شکل (۴) بوده و تیغه مورد نظر یک تیغه همگن همسانگرد با پارامترهای ساختاری  $\epsilon, \mu$  باشد. توجه شود که پارامترهای الکترومغناطیسی ساختاری چنین تیغه‌ای، کاملاً در ضرایب انتقال و انعکاس یک موج صفحه‌ای که به‌صورت عمودی به تیغه می‌تابد تأثیرگذار بوده و بنابراین انتظار می‌رود نیازی به تابش مایل موج نباشد.

در این حالت تابش، با توجه به شکل (۱) مشخص است که تیغه به نوع پلاریزاسیون تابش یعنی TE یا TM حساسیت ندارد. بنابراین با فرض معلوم بودن ضرایب انتقال و انعکاس و با در نظر گرفتن این دو نکته، تنها دو مقدار معلوم به‌دست می‌آید. از طرف دیگر دقت شود ماتریس انتقال حالت  $[\Phi]$  که قرار است از روی ضرایب انتقال و انعکاس به‌دست آید، در حالت کلی یک ماتریس  $4 \times 4$  است و ۱۶

### ۳-۲- قضیه دترمینان ماتریس $[\Phi]$

در این قسمت به ارائه قضیه‌ای در مورد دترمینان ماتریس انتقال حالت یک تیغه همسانگرد می‌پردازیم. این قضیه بیان می‌کند که «دترمینان ماتریس انتقال حالت یک تیغه همسانگرد برابر واحد است». اثبات این قضیه در پیوست آمده است.

### ۳-۳- تکمیل روند استخراج پارامتر

با استفاده از قضیه‌ای که در قسمت قبل ملاحظه شد، تعداد معلومات و تعداد مجهولات مسئله برابر می‌شود. بنابراین می‌توانیم ماتریس  $\Phi$  را به طور کامل مشخص کنیم. با فرض تابش TE یک موج صفحه‌ای با دامنه میدان الکتریکی واحد، با استفاده از روابط (۹-۱۰) می‌توان نوشت:

$$1 + E_y' = (\Phi_{11} + \Phi_{14}/\eta_0)E_y' \quad (15)$$

$$\frac{1}{\eta_0}(1 - E_y') = (\Phi_{41} + \Phi_{11}/\eta_0)E_y' \quad (16)$$

مشاهده می‌شود که دو معادله فوق برای تعیین سه مجهول  $\Phi_{14}$ ،  $\Phi_{11}$  و  $\Phi_{41}$  کافی نیست. اما با توجه به قضیه اثبات‌شده، یک معادله دیگر هم داریم:

$$\det([\Phi]) = 1 \quad (17)$$

پس از مشخص شدن ماتریس انتقال حالت  $\Phi$ ، بایستی ماتریس  $[\Gamma_\omega]$  را نیز محاسبه کنیم نمود که در آن،  $[\Phi] = e^{-[\Gamma_\omega]d}$  است؛ بنابراین  $[\Gamma_\omega]$  را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$[\Gamma_\omega] = -\frac{1}{d} \ln[\Phi] \quad (18)$$

### ۳-۴- بررسی ابهام احتمالی در نتایج

پس از مشخص شدن ماتریس انتقال حالت  $[\Phi]$ ، باید به‌منظور تکمیل فرایند بازیابی پارامتر، ماتریس  $[\Gamma]$  را نیز محاسبه کرد. که در آن،  $[\Phi] = \exp(-\frac{\omega}{c}[\Gamma]d)$  است؛ بنابراین:

$$[\Gamma] = -\frac{c}{\omega d} \ln([\Phi]) = -\frac{\lambda_0}{2\pi d} \ln([\Phi]) \quad (19)$$

که  $\lambda_0$  طول موج در فضای آزاد است. به‌منظور محاسبه لگاریتم  $[\Phi]$  می‌توان از روش کیلی-هامیلتون یا دستور  $\log m$  نرم‌افزار MATLAB استفاده کرد. می‌دانیم که تابع لگاریتمی مختلط  $\ln(A) = \ln|A| + j(\arg(A) + 2m\pi)$  یک تابع چند شاخه‌ای

تمام موج انجام شده است. ایده پیشنهادی، شناخت و تعیین مشخصات و ویژگی‌های ماتریس انتقال حالت محیط‌های مختلف و استفاده از آن‌ها در تعیین درایه‌های این ماتریس از روی داده‌های معلوم ضرایب انعکاس و انتقال است.

### ۳-۱- محاسبه ماتریس‌های $[\Gamma]$ و $[\Phi]$

برای روشن تر شدن موضوع و نشان دادن کارآمدی ایده پیشنهادی، ماتریس  $[\Gamma_\omega]$  یک تیغه همسانگرد تحت تابش عمودی یک موج صفحه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید [۱۴]:

$$[\Gamma_\omega] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & 0 & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\varepsilon & 0 & 0 \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

برای این که بتوان در مورد ویژگی‌ها و مشخصات ماتریس انتقال حالت اظهار نظر کرد، باید این ماتریس را نیز محاسبه نمود. روش‌های متعددی برای محاسبه این ماتریس وجود دارد که در اینجا از روش کیلی-هامیلتون [۱۸] استفاده شد. پس از انجام محاسبات نسبتاً طولانی می‌توان ماتریس  $[\Phi]$  را به صورت زیر نوشت [۱۸]:

$$[\Phi] = e^{-[\Gamma_\omega]d} = e^{-(\omega/c)[\Gamma]d} \quad (14)$$

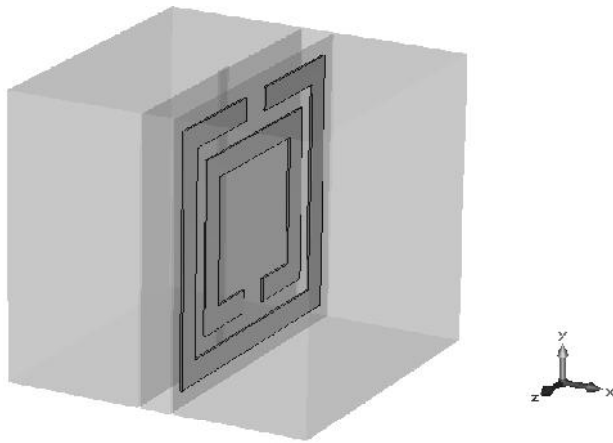
$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \boxed{\Phi_{11}} & 0 & 0 & \boxed{\Phi_{14}} \\ 0 & \Phi_{11} & -\Phi_{14} & 0 \\ 0 & -\Phi_{41} & \Phi_{11} & 0 \\ \boxed{\Phi_{41}} & 0 & 0 & \Phi_{11} \end{bmatrix}$$

که  $A = j\omega\mu d$ ،  $\Phi_{14} = \sqrt{A/B} \sinh \sqrt{AB}$ ،  $\Phi_{11} = \cosh \sqrt{AB}$  و  $B = j\omega\varepsilon d$ ،  $\Phi_{41} = \sqrt{B/A} \sinh \sqrt{AB}$  است. اکنون با شناختی که از ماتریس انتقال حالت چنین محیطی به دست می‌آید، مشاهده می‌شود که تعداد درایه‌های مجهول متمایز و غیر صفر این ماتریس برابر با ۳ است و نه ۱۶. اما هنوز هم تعداد مجهولات که ۳ مورد است با تعداد پارامترهای معلوم که قبلاً ملاحظه شد ۲ مورد می‌باشد.

### ۳-۵- خلاصه روند بازیابی پارامتر

در این قسمت نظر خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که مباحث ریاضی و اثبات‌های صورت گرفته در این بخش نباید به‌عنوان یک عامل ایجادکننده تفصیل و پیچیدگی در این روش تلقی شود؛ چرا که در عمل تنها از نتایج این مباحث استفاده می‌شود. در قسمت بعدی، با ارائه یک مثال نحوه استفاده از این روش را بررسی خواهد شد. به‌طور کلی می‌توان روش بازیابی پارامتر مطرح‌شده را در مراحل زیر خلاصه کرد:

- به‌دست آوردن ضرایب انتقال و انعکاس [R] و [T] از شبیه‌سازی یا اندازه‌گیری عملی
- محاسبه ماتریس انتقال حالت [Φ] با استفاده هم‌زمان از روابط (۱۵)، (۱۶) و (۱۷)
- محاسبه ماتریس [Γ] توسط رابطه (۱۹) و رفع ابهام احتمالی با استفاده از رابطه (۲۲)
- مقایسه ماتریس [Γ] محاسبه‌شده با رابطه (۱۳) و مشخص کردن  $\epsilon$  و  $\mu$  تیغه



شکل ۵: سلول واحد ساختار متامتریالی. سلول واحد از یک تشدیدکننده حلقوی شکاف‌دار و یک نوار فلزی که در دوطرف یک زیرلایه FR-4 با ضخامت  $2.5/0 \text{ mm}$ .

ابعاد این سلول واحد،  $a_x = a_y = a_z = 5/2 \text{ mm}$  است. ضخامت نوارهای فلزی برابر  $14/0 \text{ mm}$ ، ضخامت بازوها و فاصله هوایی به ترتیب برابر  $2/0$  و  $3/0 \text{ mm}$ ، و طول خارجی هر یک از بازوهای تشدیدکننده‌ها به

است و پاسخ یکتایی به‌دست نمی‌دهد. در این قسمت می‌خواهیم این چالش را بررسی کرده و برای رفع آن به دنبال راه‌حلی باشیم.

همان‌طور که در پیوست اشاره شده است، یک ماتریس مربعی مانند [Γ] با مقادیر ویژه  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  و  $\gamma_4$  و بردارهای ویژه  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$  و  $\bar{V}_4$  ماتریسی مانند [M] وجود دارد به‌طوری‌که  $[\Gamma] = [M][\Lambda][M]^{-1}$  و [Λ] یک ماتریس قطری است که به شکل  $\text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$  نوشته می‌شود؛ که در آن، [M] به‌صورت زیر است:

$$[M] = [\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{V}_4]. \quad (20)$$

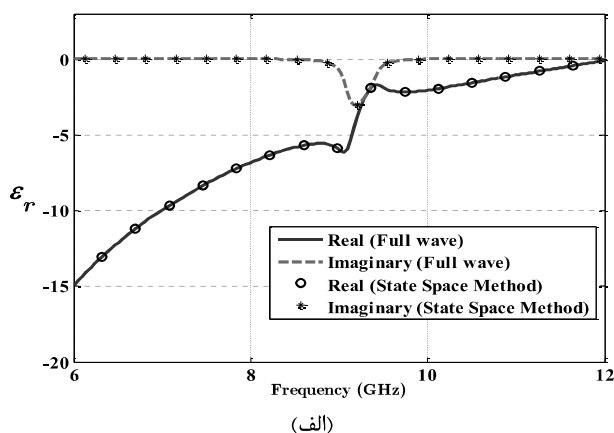
مطابق پیوست، می‌توان نوشت:

$$[\Phi] = [M] \text{diag}(e^{-\gamma_1 \omega d / c}, e^{-\gamma_2 \omega d / c}, e^{-\gamma_3 \omega d / c}, e^{-\gamma_4 \omega d / c}) [M]^{-1} \quad (21)$$

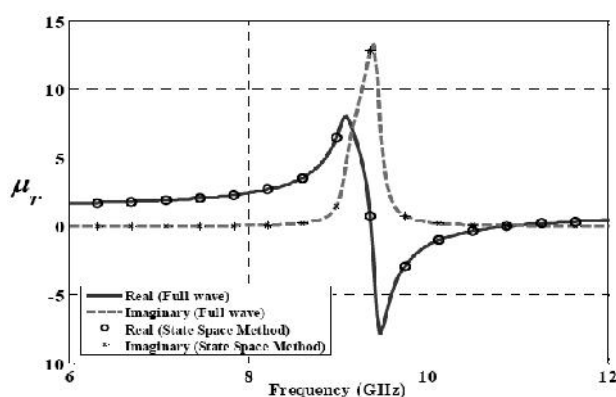
بنابراین، ماتریس‌های [Γ] و [Φ] دارای بردارهای ویژه یکسان  $\bar{V}_n$  هستند. اکنون توجه کنید که در روند تحلیل مسئله پراکندگی معکوس، پس از مشخص‌شدن ماتریس انتقال حالت [Φ]، مقادیر ویژه آن که با  $\lambda_n$  ( $n=1, 2, 3, 4$ ) نشان می‌دهیم نیز به‌طور کامل مشخص می‌شوند. از این رو، برای محاسبه ماتریس [Γ] با استفاده از رابطه  $[\Gamma] = [M][\Lambda][M]^{-1}$  تنها نیاز به محاسبه مقادیر ویژه  $\gamma_n$  داریم که توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= -\frac{c}{\omega d} \ln \lambda_n \\ &= -\frac{c}{\omega d} [\ln |\lambda_n| + j(\arg \lambda_n + 2m\pi)] \end{aligned} \quad (22)$$

که m در هر فرکانس عدد صحیح دلخواهی است. وجود پارامتر m در این رابطه، به خوبی چالش چندشاخه‌ای بودن و یکتا نبودن پاسخ که در روش‌های متداول نیز به چشم می‌خورد را نشان می‌دهد. اخیراً روشی قدرتمندی، بر مبنای اصل علیت و روابط کرامرز-کروننگ برای رفع این چالش پیشنهاد شده است [۱۹-۲۰]. در این روش، عدد صحیح m در هر فرکانس طوری تعیین می‌شود که نزدیک‌ترین پاسخ به پاسخ به‌دست آمده از روابط کرامرز-کروننگ حاصل شود. از رابطه فوق مشخص است که چنانچه ضخامت تیغه مورد نظر در برابر طول موج کوچک باشد، مشکل چندشاخه‌ای شدن نتایج ایجاد نمی‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۷: پارامترهای الکترومغناطیسی بازیابی شده ساختار متامتریالی.

(الف) ضریب گذردهی الکتریکی نسبی.

(ب) ضریب گذردهی مغناطیسی نسبی

## ۵- نتیجه گیری

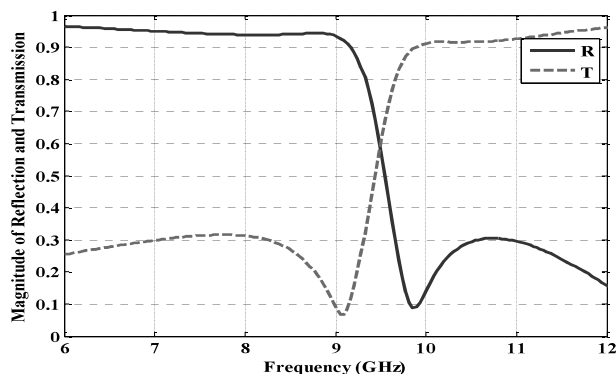
در انتهای این مقاله، برای رفع هرگونه ابهام و روشن ترشدن تفاوت‌های روش بازیابی پارامتر مطرح‌شده بر مبنای رویکرد فضای حالت، با روش تمام‌موج، نکات زیر یادآوری می‌گردد:

- با مقایسه روش مطرح‌شده در این قسمت با روش تمام‌موج که در مرجع [۹] بررسی شده است، مشاهده می‌شود که در روش تمام‌موج، از ابتدا با حل مستقیم معادله موج در محیط مورد نظر، قطبش‌های ویژه این محیط را شناسایی کرده و سپس با تعیین شکل کلی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، از شرایط مرزی پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدان‌ها در مرزهای تیغه برای به‌دست آوردن مجهولات استفاده می‌شود. نهایتاً در آن روش، حل هم‌زمان چند معادله غیرخطی منجر به یافتن روابط بسته‌ای برای  $\epsilon$  و  $\mu$  محیط بر حسب ضرایب انتقال و انعکاس

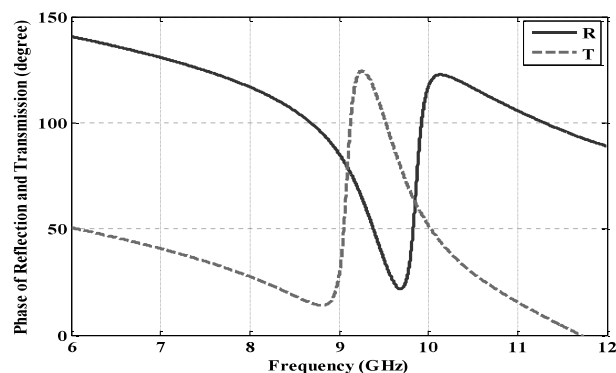
## ۴- بازیابی پارامتر یک ساختار متامتریالی نمونه

به‌منظور اطمینان از صحت نتایج به‌دست آمده، رویکرد فضای حالت را برای بازیابی پارامتر یکی از معروف‌ترین ساختارهای متامتریالی به کار می‌بریم. سلول واحد این ساختار در شکل (۵) نشان داده شده است [۶]. ضرایب انتقال و انعکاس این ساختار با استفاده از نرم‌افزار CST محاسبه و در شکل (۶) نشان داده شده است. با توجه به روابط مطرح‌شده در این قسمت، یک برنامه کامپیوتری در نرم‌افزار MATLAB نوشته شده و ضرایب انتقال و انعکاس این ساختار به‌عنوان ورودی لحاظ شده است.

نتایج بازیابی پارامتر در شکل (۷) ارائه شده است. به‌منظور اطمینان از صحت نتایج، نتایج به‌دست آمده از روش بازیابی پارامتر تمام‌موج که در مرجع [۹] بررسی شده است نیز محاسبه و در این شکل ارائه شد. مشاهده می‌کنید که تطبیق عالی بین نتایج حاصل از این دو روش وجود دارد.



(الف)



(ب)

شکل ۶: (الف) اندازه و (ب) فاز ضرایب انتقال و انعکاس ساختار متامتریالی

- summation,” *Optics Express*, vol. 15, no. 3, pp. 1096-1106, 2007.
- [6] D. R. Smith, S. Schultz, P. Markos, and C. M. Soukoulis, “Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients,” *Physical Review B*, vol. 65:195104, 2002.
- [7] X. Chen, T. M. Grzegorzczak, B.-I. Wu, J. Pacheco, and J. A. Kong, “Robust method to retrieve the constitutive effective parameters of metamaterials,” *Physical Review E*, 70:016608, 2004.
- [8] D. Seetharamdoo, R. Sauleau, K. Mahdjoubi, and A.-C. Tarot, “Effective parameters of resonant negative refractive index metamaterials: interpretation and validity,” *Journal of Applied Physics*, 98:063505, 2005.
- [9] X. Chen, B. I. Wu, J. A. Kong, and T. M. Grzegorzczak, “Retrieval of the effective constitutive parameters of bianisotropic metamaterials,” *Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Top.*, vol. 71, pp. 46610-46618, 2005.
- [10] Z. Li, K. Aydin, and E. Ozbay, “Determination of the effective constitutive parameters of bianisotropic metamaterials from reflection and transmission coefficients,” *Phys. Rev. E* 79, 026610, 2009.
- [11] C. Y. Chen and K.W. Whites, “Effective constitutive parameters for an artificial uniaxial bianisotropic chiral medium,” *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 10, pp. 1363-1388, 1996.
- [12] X. Chen, T. M. Grzegorzczak, and J. A. Kong, “Optimization approach to the retrieval of the constitutive parameters of slab of general bianisotropic medium,” *Progr. Electromagn. Res.*, vol. 60, pp. 1-18, 2006.
- [13] P. N. Paraskevopoulos, “*Modern Control Engineering*,” Marcel Dekker, New York, 2002.
- [14] M. A. Morgan, D. L. Fisher, and E. A. Milne, “Electromagnetic Scattering by Stratified Inhomogeneous Anisotropic Media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, no. 2, pp. 191-197, 1987.
- [15] J. L. Tsalamengas, “Interaction of Electromagnetic Waves with General Bianisotropic Slabs,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 40, no. 10, pp. 1870-1878, 1992.
- [16] H. D. Yang, “A Spectral Recursive Transformation Method for Electromagnetic Waves in Generalized Anisotropic Layered Media,” *IEEE Transactions on Antennas And Propagation*, vol. 45, no. 3, pp. 520-526, 1997.
- خواهد شد. اما در اینجا تمام این مراحل به صورت انجام عملیات ساده ماتریسی صورت می گیرد و نیازی به یافتن روابط بسته‌ای برای  $\epsilon$  و  $\mu$  محیط بر حسب ضرایب انتقال و انعکاس نیست.
- شاید این سؤال مطرح شود که آیا در روش تمام موج نمی‌توان روابط بسته برای  $\epsilon$  و  $\mu$  محیط بر حسب ضرایب انتقال و انعکاس را به دست نیامد و معادلات غیرخطی حاصل را با هر روش عددی یا بهینه‌سازی حل کرده و  $\epsilon$  و  $\mu$  را مستقیماً به صورت عددی به دست آورد؟ پاسخ این سؤال در یکتا نبودن جواب مسئله نهفته است. توجه کنید که استفاده از روش‌های عددی و بهینه‌سازی در روش تمام موج، بالاخره یک پاسخ به دست می‌دهد اما این که آیا این پاسخ همان پاسخ واقعی مسئله بوده و با قوانین فیزیکی مانند اصل علیت سازگار است، نیازمند در اختیار داشتن روابط بسته‌ای برای  $\epsilon$  و  $\mu$  است. به عبارت ساده‌تر، تشخیص و رفع ابهام پاسخ‌ها در روش تمام موج مستلزم وجود این روابط است. حال آن‌که در رویکرد فضای حالت، تشخیص و رفع ابهام پاسخ‌ها نیازی به این روابط بسته ندارد.
- در محیط‌های پیچیده‌تر که استفاده از روش تمام‌موج و دست‌یابی به روابط مذکور بسیار دشوار و یا حتی غیرممکن است، کارکرد مؤثر رویکرد فضای حالت بهتر مشخص می‌شود. در حقیقت از رویکرد فضای حالت مطرح‌شده در این مقاله می‌توان برای مشخص‌های پیچیده‌تر مانند محیط‌های ناهمسانگرد و دونا همسانگرد نیز استفاده نمود.
- ## ۶- مراجع
- [1] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, “Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 11, pp. 2075-2084, 1999.
- [2] B. I. Popa and S. A. Cummer, “Determining the effective electromagnetic properties of negative-refractive-index metamaterials from internal fields,” *Phys. Rev. B*, 72: 165102, 2005.
- [3] D. R. Smith and J. B. Pendry, “Homogenization of metamaterials by field averaging,” *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 23, no. 3, pp. 391-402, 2006.
- [4] J.-M. Lerat, N. Mallejac, and O. Acher, “Determination of the effective parameters of a metamaterial by field summation method,” *Journal of Applied Physics*, vol. 100, no. 8, pp. 1-9, 2006.
- [5] O. Acher, J.-M. Lerat, and N. Mallejac, “Evaluation and illustration of the properties of metamaterials using field



تیغه همسانگرد صفر است، بنابراین دترمینان ماتریس انتقال حالت آن، یعنی  $[\Phi] = e^{-[\Gamma]d}$  برابر یک است.

- [17] E. L. Tan, "Recursive Asymptotic Impedance Matrix Method for Electromagnetic Waves in Bianisotropic Media," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 16, no. 6, pp. 351-353, 2006.
- [18] J. P. Hespanha, "Linear Systems Theory Princeton," NJ, USA: Princeton Press, 2009.
- [19] Z. Szabó, G.-H. Park, R. Hedge, and E.-P. Li, "A unique extraction of metamaterial parameters based on Kramers Kronig relationship," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 58, no. 10, pp. 2646-2653, Oct. 2010.
- [20] D. Zarifi, M. Soleimani, and V. Nayyeri, "Parameter retrieval of chiral metamaterials based on the causality principle," *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, vol. 23, no. 5, pp. 610-618, Sep. 2013.

## پایوست

از جبر ماتریسی می‌دانیم که برای یک ماتریس مربعی مانند  $\Gamma$  با مقادیر ویژه  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  و  $\gamma_4$ ، ماتریسی مانند  $[M]$  وجود دارد به‌طوری‌که  $[\Gamma] = [M][\Lambda][M]^{-1}$  و  $[\Lambda]$  یک ماتریس قطری است که به شکل  $\text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$  نوشته می‌شود [۱۷]. از طرف دیگر تابع نمایی یک ماتریس مربعی مانند  $[\Gamma d]$  را می‌توان با استفاده از بسط سری توانی به‌صورت زیر نوشت:

$$e^{-[\Gamma]d} = I - [\Gamma]d + \frac{1}{2!}[\Gamma]^2 d^2 - \frac{1}{3!}[\Gamma]^3 d^3 + \dots \quad (23)$$

که  $I$  ماتریس واحد  $4 \times 4$  است. با جایگذاری  $[M][\Lambda][M]^{-1}$  در  $[\Gamma]^2$  می‌توان نوشت:

$$[\Gamma]^2 = ([M][\Lambda][M]^{-1})([M][\Lambda][M]^{-1}) = [M][\Lambda]^2[M]^{-1} \quad (24)$$

به‌طور مشابه برای سایر توان‌های  $[\Gamma]$  هم می‌توان روابط مشابهی به‌دست آورد. با قرار دادن این روابط در (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned} e^{-[\Gamma]d} &= [M] \left[ I - [\Lambda]d + \frac{1}{2!}[\Lambda]^2 d^2 - \dots \right] [M]^{-1} \\ &= [M] e^{-[\Lambda]d} [M]^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

اکنون توجه می‌کنیم که دترمینان حاصل ضرب چند ماتریس برابر است با حاصل ضرب دترمینان‌های آن‌ها و بنابراین دترمینان  $[e^{-\Gamma d}]$  برابر دترمینان  $[e^{-\Lambda d}]$  است. بنابراین با توجه به قطری بودن ماتریس  $[\Lambda]$ ، دترمینان آن برابر است با  $\exp[-(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)d]$  از طرف دیگر هم می‌دانیم که حاصل جمع مقادیر ویژه یک ماتریس مربعی برابر حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی آن است [۱۳ و ۱۸]. از آنجایی که طبق رابطه (۱۳)، جمع درایه‌های قطری ماتریس  $\Gamma$  یک

---

## **Extraction of Electromagnetic Parameters of Metamaterials Based on the State-Space Approach**

**D. Zarifi\*, A. Farahbakhsh, M. Soleymani**

\* Iran University of Science and Technology

(Receive: 2015/02/09, Accept: 2015/05/05)

### **Abstract**

*This paper deals with the introduction of an approach for the electromagnetic characterization of metamaterials based on the state space approach. The state space approach is commonly used to deal with the problems of plane wave scattering from planar layered media, but its application in inverse problems has remained an almost untouched topic in the literature. The proposed method is based on the state transition matrix and its properties which allows avoiding nonlinearity and complexity of the problem. The main difference with respect to other well-established retrieval procedures based on the use of the scattering parameters relies on the direct computation of the transfer matrix of the slab as opposed to the conventional calculation of the propagation constant and impedance of the modes supported by the medium. To validate the proposed method, constitutive parameters of a metamaterial structure are retrieved at microwave frequencies. The results show that the proposed method is robust and reliable.*

**Keywords:** Parameter Retrieval, Complex Media, Metamaterials, State-Space Approach, State Transition Matrix

---

\* Corresponding Author Email: [zarifi@iust.ac.ir](mailto:zarifi@iust.ac.ir)