

رفتار مرز پایین کرامر - رانو و تابع ابهام آنتن آرایه‌ای صفحه‌ای با در نظر گرفتن

الگوی تشعشی هر المان آنتنی

آرمین غنی^۱، فیروز کیوانی^۲، سید حسن صدیقی^{۳*}

۱ و ۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، ۳- استادیار، دانشگاه علم و صنعت ایران

(دریافت: ۹۴/۱۲/۱۹، پذیرش: ۹۵/۰۲/۱۴)

چکیده: تخمین جهت-ورود-سیگنال یکی از الگوریتم‌های پرکاربرد در کارکرد آنتن‌های آرایه‌ای تطبیق‌پذیر دیجیتال می‌باشد. در این سامانه‌ها سعی بر آن است که با حداقل تعداد المان‌های آرایه، بهترین دقت تخمین پارامتر سیگنال منبع به‌دست بیاید. تئوری کرامر-رانو که مرز پایینی بر روی واریانس تخمین‌های یک تخمین‌گر بدون بایاس می‌گذارد، همواره یکی از روش‌های قابل اعتماد و پر کاربرد در بررسی رفتار آنتن آرایه‌ای در تخمین جهت-ورود-سیگنال می‌باشد. با مدل‌سازی صحیح سیگنال دریافتی از آنتن آرایه‌ای می‌توان رفتار مرز پایین کرامر-رانو را که نشان دهنده دقت DOA در جهت‌های مختلف ورود سیگنال منبع می‌باشد، به‌دست آورد. از طرفی، مدل‌سازی دقیق و نزدیک به عمل به گونه‌ای که اثر الگوی تشعشی المان‌های آنتن آرایه‌ای در آن در نظر گرفته شده باشد، تلاشی است که تا به امروز به صورت گسترده انجام نگرفته است. در روابط مدل‌سازی، کرامر رانو را با در نظر گرفتن الگوی تشعشی هر المان آرایه با استفاده از نرم افزارهای تحلیل تمام موج آنتن که می‌تواند اثرهای واقعی یک محیط عملی را در خود داشته باشد، به‌دست آمده است و در همین راستا رفتار CRLB یک نمونه آنتن آرایه‌ای چهار المانه GPS نیز مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین جهت مطالعه کامل‌تر، تابع ابهام که در بردارنده عملکرد آنتن آرایه‌ای و پاسخ آن در برابر ابهام در بردار هدایت آرایه نیز می‌باشد، محاسبه و مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: تخمین جهت-ورود-سیگنال، DOA، جهت‌یابی، آنتن آرایه‌ای، آنتن هوشمند، تابع ابهام، آنتن آرایه‌ای GPS، کرامر-رانو

۱- مقدمه

تخمین جهت-ورود-سیگنال^۲، دو پردازش اصلی سامانه‌های آنتن آرایه‌ای را تشکیل می‌دهند که همواره بازدهی و عملکرد آن‌ها مدنظر می‌باشد. در این مقاله تاکید بیشتری بر مقوله تخمین جهت-ورود-سیگنال شده است.

مدل دریافت سیگنال برای آنتن آرایه‌ای، اکثراً با این فرض اساسی به‌دست می‌آید که المان‌های آرایه، الگوی تشعشی همه‌جهته و متقارن دارند. بررسی تاثیر الگوی تشعشی در الگوریتم‌های کنترل پرتو [۵] و کنترل نقطه پوچی [۶] آنتن انجام شده است.

هرچند مثال‌های بیشتری می‌توان از کارهای انجام شده در منظور کردن الگوی آنتن در الگوریتم‌های شکل‌دهی پرتو و کنترل پوچی نام برد، اما تحقیقات کمی در منظور کردن این اثر در DOA صورت پذیرفته است. در [۷] تخمین DOA توسط المان‌های جهت‌دار (غیر همه‌جهته) که بر روی سطح‌های منسجم (مانند سطح بدنه هواپیما) قرار گرفته‌اند، بحث شده است. آنچه که در این مقاله بررسی شده است تنها یک مرور کلی بر نحوه

آنتن‌های آرایه‌ای بر مبنای سامانه‌های شکل‌دهی پرتویی دیجیتال کاربردهای زیادی در حوزه‌های رادار، مخابرات سلولی و ماهواره‌ای، دستگاه‌های جهت‌یاب و گیرنده‌های ضدجمینگ سامانه‌های موقعیت‌یابی ماهواره‌ای دارند [۱-۳]. آنتن‌های آرایه‌ای که به آن‌ها گاهی آنتن‌های تطبیق‌پذیر و آنتن‌های هوشمند نیز اطلاق می‌شود، دارای خواص منحصر به فردی همچون قابلیت کنترل الگوی تشعشی، کنترل نقطه پوچی آنتن، تشخیص همزمان جهت ورود به سیگنال چندین منبع و بهینه‌سازی نسبت سیگنال به نویز به علاوه تداخل^۱ می‌باشند.

آنتن‌های آرایه‌ای از سه بخش اصلی آنتن و تقویت‌کننده رادیویی، میکسر و پایین آورنده فرکانس، مبدل آنالوگ به دیجیتال، و پردازشگر تطبیقی [۴] تشکیل شده‌اند. هر چند سامانه‌های آنتن آرایه‌ای در کاربردها و پیکره‌بندهای مختلفی یافت می‌شوند، اما دو الگوریتم اساسی شکل‌دهی پرتو و

*نویسنده پاسخگو: sedighy@iust.ac.ir

² Direction-of-Arrival Estimation (DOA)

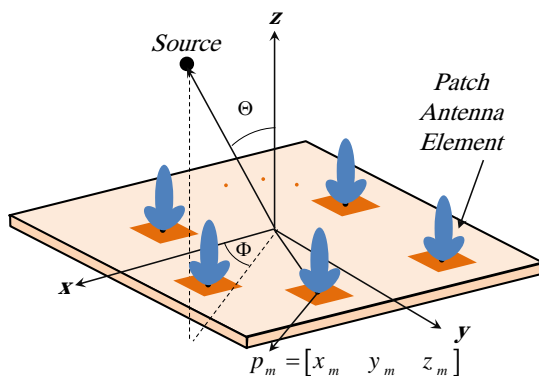
¹ Signal to Noise plus Interference Ratio (SNIR)

المان آرایه دریافت شده و مدل سازی بر اساس آن تعیین شده است. بر این اساس اثر تزویج متقابل بین المان های آنتنی و نیز اثر ساختارهای پیرامونی آنتن در تخمین لحاظ می شود. همچنین به جهت بررسی کامل تر تخمین کرامر- رانو برای آنتن های آرایه ای صفحه ای با در نظر گرفتن الگوی تشعشعی غیر همسانگرد المان ها، در این مقاله تخمین دو بعدی جهت ورود به سیگنال منبع فرض شده است و علاوه بر آن، مجموعه ای داده های نمونه برداری شده از سیگنال دریافتی از آنتن آرایه ای نیز در محاسبه و شبیه سازی عددی روابط کرامر- رانو منظور شده است. در ادامه مدل سازی و شبیه سازی عددی جهت تحلیل یک نمونه عملی آنتن آرایه ای GPS نیز انجام شده است. همچنین به دلیل تاثیر ابهام در بردار هدایت آرایه ای و اهمیت آن در عملکرد صحیح آرایه در مقابل الگوریتم های DOA، تابع ابهام آرایه ترسیم و مورد تحلیل قرار گرفته است.

۲- مدل سازی سامانه

به منظور مدل سازی سامانه برای محاسبه روابط کرامر- رانو و همچنین انجام شبیه سازی های عددی مرتبط با ترسیم نمودارهای ابهام آنتن آرایه ای لازم است تا ابتدا مدل سازی سیگنال دریافتی از آنتن آرایه ای به همراه منظور کردن اثرات الگوی تشعشعی هر المان آرایه تشکیل شود. نمای مدلی آنتن آرایه ای صفحه ای به همراه پارامترهای مهم در مدل سازی در شکل (۱) نشان داده شده است. در این شکل، تعدادی المان آنتنی پچ به عنوان نمونه بر روی صفحه آرایه قرار داده شده است و تنها یک منبع سیگنال در فضای مدل سازی شده فرض شده است.

منبع در نظر گرفته شده در مدل سازی با فرض قرار داشتن در فاصله بسیار دور و بدون جابجایی می باشد. این منبع دارای طول موج λ و جهت φ و θ به ترتیب زوایای سمت و فراز منبع را نشان می دهد. همچنین بردار موقعیت هر المان با p_m نشان داده می شود که m دلالت بر شماره المان آرایه دارد.



شکل (۱): نمای مدلی آنتن آرایه ای صفحه ای

قرار گرفتن المان های آرایه و تاثیر مشخصات مختلف آنتن با هندسه ثابت بر روی دقت DOA و با هندسه ثابت آرایه ای است. همچنین طراحی آنتن های آرایه ای جهت دار در تشخیص DOA با تغییر جانمایی المان های آرایه ای توسط Gazzah در [۸] و دیگر کارهای مشابه این نویسنده انجام گرفته است. اما در این مقاله ها، المان های آرایه ای همه جهته در نظر گرفته شده است و اثرات واقعی المان های آنتنی در نظر گرفته نشده است.

وارد کردن اثر بهره آنتن در مدل سیگنال دریافتی آرایه در [۹] انجام شده است و شبیه سازی های عددی برای انجام الگوریتم DOA نیز صورت گرفته است، اما نمودارهای کرامر- رانو و همچنین تحلیل ابهام در بردار هدایت به نتایج مقاله افزوده نشده است. در [۱۰]، المان های غیر همه جهته در آرایه های دایروی یکنواخت^۳ لحاظ شده است که در دو بخش الگوی تشعشعی تئوری و شبیه سازی شده در نرم افزارهای شبیه سازی الکترومغناطیس، DOA و وجود ابهام در هندسه های مختلف UCA بررسی شده است. در این مقاله، تنها CRLB یک بعدی محاسبه شده و اثرهای واقعی الکترومغناطیس نیز در بررسی های کرامر- رانو به خوبی گنجانده شده است. اما CRLB دوبعدی که بتواند مشخصه جهت منبع سیگنال را به طور دقیق و کامل محاسبه کند، مغفول مانده است.

همچنین اثر الگوی تشعشعی المان های آنتنی برای یک آنتن صفحه ای و المان هایی که همگی الگوی تشعشعی یکسانی داشته و در یک جهت قرار گرفته اند، مورد توجه Gazzah در مقاله خود [۱۱]، قرار گرفته است. در این مقاله، با وارد کردن اثر الگوی تشعشعی در روابط کرامر- رانو، فرم بسته ای برای CRLB بر اساس روابط ساده سازی شده، استخراج شده است و اثر الگوی تشعشعی آنتن به خوبی مورد بررسی قرار گرفته است. اما به دلیل اینکه در مدل سازی و روابط ریاضی اثر الگوی تشعشعی المان های آنتن آرایه ای مشابه فرض شده است، طبیعتاً نمی توان تزویج متقابل میان المان ها و دیگر اثرهای غیر ایده آل المان های آنتنی را وارد روابط کرد. در مقابل آنچه که در این مقاله در نظر گرفته شده است، مدل سازی روابط CRLB بوده است به گونه ای که کاستی های کارهای قبلی برطرف شود.

با توجه به پژوهش های انجام شده تا به حال، مدل سازی سیگنال دریافتی آنتن آرایه ای با در نظر گرفتن الگوهای تشعشعی تک تک المان های آرایه صورت نپذیرفته است. الگوهای تشعشعی عموماً به صورت مدل ریاضی تئوری و مشترک میان همه المان های آرایه وارد بردار هدایت آرایه شده است. در این مقاله، الگوهای تشعشعی از نرم افزار شبیه سازی الکترومغناطیس برای هر

³ Uniform Circular Arrays (UCA)

سامانه‌های دیجیتالی از سیگنال حوزه زمان به تعداد N نمونه برداری می‌شود و رشته نمونه برداری شده وارد الگوریتم‌های پردازشی می‌شود. در نتیجه رابطه (۱) به صورت رابطه (۴) تغییر می‌کند.

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}(\varphi, \theta)s[n] + \mathbf{w}[n]; n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4)$$

لازم به ذکر است میانگین سیگنال منبع فرض شده $s[n]$ صفر بوده و واریانس آن برابر $E\{s^2[n]\} = \sigma_s^2$ است. همان‌طور که قبل‌تر عنوان شد، نویز مدل شده در واقع اثر همه پدیده‌های ناخواسته‌ای که منجر به نویز می‌شود می‌باشد. این اثرات می‌تواند نویز گرمایی که به صورت ذاتی در سامانه‌های مخابراتی وجود دارد و یا سیگنال‌های تداخل باشد. مدل ریاضی استفاده شده در مدل‌سازی، نویز سفید گاوسی نرمال بوده که نشان دهنده همه عوامل تولید نویز در ورودی آنتن آرایه می‌باشد و دارای امپدانس ریاضی صفر و واریانس $E\{\mathbf{w}[n]\mathbf{w}^H[n]\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ است که H عملگر هرمیتین (ترانهاده مختلط) و \mathbf{I} ماتریس یکه می‌باشد. رابطه اخیرا نامبرده شده، نشان می‌دهد که نویز دریافتی از هر المان آرایه نسبت به المان آرایه دیگر کاملا مستقل می‌باشد. همچنین فرض شده است که نویز در همه جهت‌های سمت و فراز به صورت یکنواخت در فضا توزیع شده است و توزیع آن به صورت مشابه میان المان‌های آرایه می‌باشد. منابع سیگنال و نویز هم در مدل فرض شده نسبت به یکدیگر مستقل می‌باشند که آن را می‌توان با زبان ریاضی به صورت $E\{\mathbf{w}[n]s[n]\} = 0$ نشان داد. در روابط کرامر- رانو، واریانس نویز به عنوان یک عدد ثابت فرض شده است.

۳- مرز پایین کرامر- رانو

تئوری مرز پایین کرامر- رانو، مرز پایین واریانس تخمین‌هایی که توسط تخمین‌گرهای بدون بایاس محاسبه می‌شود را تعیین کرده و از عکس ماتریس فیشر به‌دست می‌آید [۱۲]. یک تخمین‌گر بدون بایاس در ایده‌آل‌ترین حالت می‌تواند به مرزهای تعیین شده توسط CRLB برسد و امکان ندارد که الگوریتم‌های تخمین‌گر بتوانند بیشتر از میزانی که CRLB نشان‌دهنده دقت داشته باشند. این تئوری به روش‌های مختلفی در [۱۵-۱۲] محاسبه شده است که از میان این روش‌ها از آنچه که در [۱۲] انجام گرفته و یک روش مرسوم و کلی می‌باشد، بهره گرفته شده است.

روابط CRLB برای آنتن آرایه‌ای مدل شده در بخش قبل به صورت زیر می‌باشد. اثبات این روابط در ضمیمه ۱ مقاله به‌طور کامل آورده شده است. ماتریس کرامر- رانو به دلیل تخمین دو پارامتر سمت و فراز منبع سیگنال به صورت ماتریس ۲ در ۲ خواهد بود که از معکوس کردن ماتریس فیشر به‌دست می‌آید (رابطه (۵)).

با فرض اینکه M المان آنتنی در آرایه وجود داشته باشد و $s(t)$ نمایانگر تابع سیگنال منبع مشخص در مبدا مختصات باشد، مدل سیگنال دریافتی از آرایه به صورت رابطه (۱) می‌باشد.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\varphi, \theta)s(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{x}(t)$ بردار سیگنال دریافت شده از آرایه و $\mathbf{w}(t)$ مدل نویز جمع شونده با سیگنال اصلی می‌باشد که در ادامه در مورد نوع مدل نویز بیشتر بحث خواهد شد. همچنین $\mathbf{a}(\varphi, \theta)$ بردار هدایت آرایه بوده و در بردارنده همه مشخصات فضایی آرایه می‌باشد. بردار هدایت به طور ضمنی نشان می‌دهد که سیگنال دریافت شده از هر المان آرایه نسبت به سیگنال دریافت شده در مبدا مختصات با چه اختلاف فازی دریافت می‌شود. این بردار وابسته به موقعیت المان‌های آرایه، مشخصه الگوی تشعشی هر المان و جهت ورود به سیگنال منبع بوده و به صورت رابطه (۲) نشان داده می‌شود.

$$\mathbf{a}(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} g_1(\varphi, \theta)e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_1} \\ g_2(\varphi, \theta)e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_2} \\ \vdots \\ g_M(\varphi, \theta)e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_M} \end{bmatrix} \quad (2)$$

در این رابطه، $g_m(\varphi, \theta)$ تابع الگوی تشعشی المان شماره m ، $\mathbf{p}_m = [x_m \ y_m]^T$ بردار مختصات کارترین المان m و \mathbf{k} متغیر فضایی می‌باشد که به صورت رابطه (۳) می‌باشد. در این رابطه T عملگر ترانهاده می‌باشد.

$$\mathbf{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} [\sin \Theta \cos \Phi \quad \sin \Theta \sin \Phi]^T \quad (3)$$

نکته مهم در رابطه با اعمال کردن اثر الگوی تشعشی المان‌ها در مدل سیگنال دریافتی این می‌باشد. در صورتی که الگوی توان تشعشی یک آنتن در دسترس باشد که معمولا بسیاری از نرم‌افزارهای تحلیل‌گر الکترومغناطیس نیز الگوی توان را در خروجی خود تولید می‌کنند، باید همواره مجذور الگوی توان یعنی $g(\varphi, \theta) = \sqrt{G(\varphi, \theta)}$ لحاظ شود. در این فرمول $G(\varphi, \theta)$ الگوی توان تشعشی آنتن می‌باشد در زوایای مختلف می‌باشد. از طرفی دیگر باید توجه داشت که الگوی تشعشی هر المان نسبت به المان دیگر متفاوت بوده که در دستگاه مختصات واحدی در نظر گرفته شده‌اند.

با توجه به این‌که عموماً سامانه‌های آنتن آرایه‌ای، پردازش‌های خود را در حوزه دیجیتال انجام می‌دهند، لذا نمایش مدل سیگنال در حوزه دیجیتال نیز حائز اهمیت است. در

با افزوده شدن اثر الگوی تشعشعی المان‌های آنتنی که موجب تغییر بردار هدایت نسبت به حالت یکسانگرد فرض کردن المان‌های آنتن می‌شود، شرایط بوجود آمدن ابهام نیز متفاوت خواهد شد [۱۰]. برای یافتن وجود ابهام می‌بایست تابع ابهام ترسیم شود. در نقاطی که ابهام وجود دارد، در تابع ابهام خطاهای DOA بالا بوجود می‌آید.

۵- الگوریتم تخمین جهت-ورود-سیگنال

از میان الگوریتم‌های تخمین جهت-ورود-سیگنال ارائه شده تا کنون [۴]، الگوریتم MUSIC که بر اساس جداسازی زیرفضاهای سیگنال و نویز کار می‌کند، یکی از دقیق‌ترین و پرکاربردترین الگوریتم‌های DOA می‌باشد که رفتار مجانبی آن به راحتی به مرز کرامر-رائو می‌رسد [۱۸]. به طور کلی این الگوریتم تعدادی از نمونه برداری‌های سیگنال دریافت شده از آرایه را گرفته و ماتریس همبستگی را به صورت رابطه (۱۱) تشکیل می‌دهد.

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^H[n] \quad (11)$$

سپس زیرفضاهای سیگنال و نویز را از ماتریس همبستگی به روش‌های مقادیر ویژه از یکدیگر جدا کرده و بردارهای ویژه‌ی آن را به دست می‌آورد. توجه کنید که در همه‌ی شبیه‌سازی‌های عددی انجام گرفته در این مقاله، به دلیل اینکه تنها یک منبع وجود دارد، جدا کردن زیرفضاهای نویز و سیگنال بدون انجام دادن الگوریتم‌های لازم جهت تشخیص تعداد منابع صورت می‌پذیرد.

اگر ماتریس بردارهای ویژه‌ی زیرفضای نویز را با \mathbf{V}_n نمایش دهیم، طیف MUSIC به صورت رابطه (۱۲) ترسیم می‌شود.

$$P_{MUSIC} = \frac{1}{\mathbf{a}^H \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \mathbf{a}} \quad (12)$$

طبیعی است که در طیف ترسیم شده، در زاویه‌ای که قله‌ای قرار داشته باشد، جهت-ورود-سیگنال تخمین زده می‌شود. آنتن آرایه‌ای UCA چهار المانه GPS به جهت درک عملی‌تر، یک آنتن آرایه‌ای مسطح ۴ المانه دایروی (UCA) در نظر گرفته شده است و رفتار توابع CRLB و ابهام آن نیز بررسی می‌شود. به این ترتیب المان‌های آرایه، چهار آنتن پچ در باند فرکانسی L1 مربوط به GPS (حدود ۱۵۷۵ MHz) در نظر گرفته شده است و با فاصله $\lambda/2$ از یکدیگر در محیط نرم‌افزار شبیه‌ساز الکترومغناطیس HFSS قرار داده شده است. این آنتن‌ها به گونه‌ای هستند که جهت پرتو اصلی آن‌ها همگی به سمت بالا قرار گرفته‌اند. همچنین مبدا دستگاه مختصات در مرکز UCA تعبیه شده است. در شکل (۲) نمای سه بعدی از این آنتن آرایه‌ای نشان داده شده

$$CRLB = \begin{bmatrix} C_{\varphi\varphi} & C_{\varphi\theta} \\ C_{\theta\varphi} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix} = FIM^{-1} \quad (5)$$

در رابطه فوق، $C_{\varphi\varphi}$ و $C_{\theta\theta}$ به ترتیب مقادیر کرامر-رائو تخمین‌های زاویه سمت و فراز بوده و $C_{\theta\varphi}$ و $C_{\varphi\theta}$ نیز مقدار همبستگی کرامر-رائو زاویه‌های سمت و فراز می‌باشد که در بسیاری از موارد بدون استفاده هستند. ماتریس فیشر نیز به صورت رابطه (۶) نشان داده می‌شود که درایه‌های آن در روابط (۷-۱۰) می‌باشد.

$$FIM = \frac{N \sigma_s^2}{\sigma_n^2} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$F_{11} = \left\| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} \right\|^2 \quad (7)$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} \right) \quad (8)$$

$$F_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta} \right) \quad (9)$$

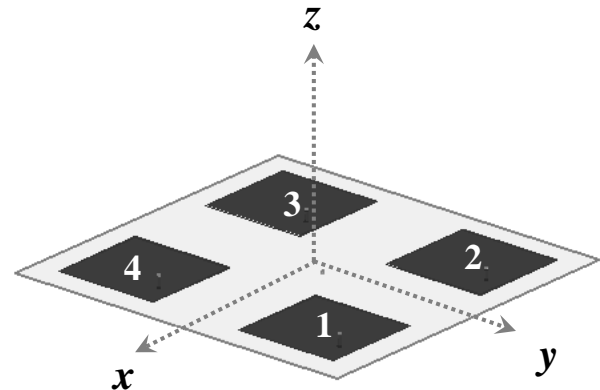
$$F_{22} = \left\| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta} \right\|^2 \quad (10)$$

در روابط فوق $\|\cdot\|$ دلالت بر نرم دوم یا اندازه بردار دارد. لازم به ذکر است که در تحلیل‌های ارائه شده در این مقاله، واریانس نویز ثابت فرض شده است و تنها اثر پترن تشعشعی آنتن در محاسبات ماتریس فیشر لحاظ گردیده است.

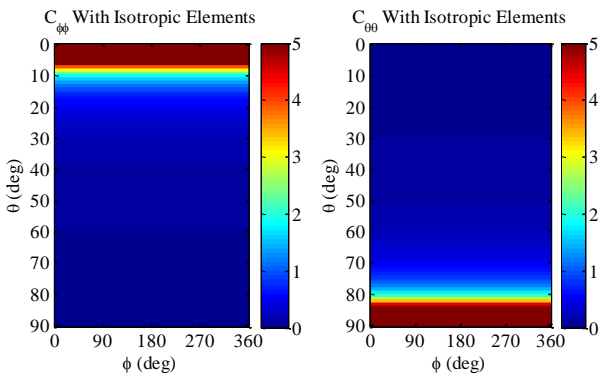
۴- ابهام در بردار هدایت آرایه

یکی از مفروضات کلی که در الگوریتم‌های DOA در نظر گرفته می‌شود این است که بردارهای هدایتی که برای دو جهت مختلف وجود دارند به صورت کاملاً مستقل و یکتا در همه‌ی بازه‌های ورود سیگنال، تعریف شده باشند. به عبارتی دیگر اگر دو جهت دلخواه در گستره‌ی تغییر جهت ورود سیگنال در نظر بگیریم، آن‌گاه بردارهای هدایت متناظر با هر دو جهت باید از یکدیگر مستقل خطی باشند [۱۶]. اگرچه برقرار کردن شرط لازم و کافی در طراحی آرایه برای اطمینان از عدم ابهام در بردار هدایت و برای تعداد منابع مختلف بدست نیامده است، اما برای یک منبع در [۱۷] نشان داده شده است. البته مقاله‌ی نامبرده تنها برای آرایه‌های با المان‌های یکسانگرد صادق است که به دلیل متفاوت بودن بردار هدایت، برای بردار هدایت با المان‌های یکسانگرد برقرار نمی‌باشد.

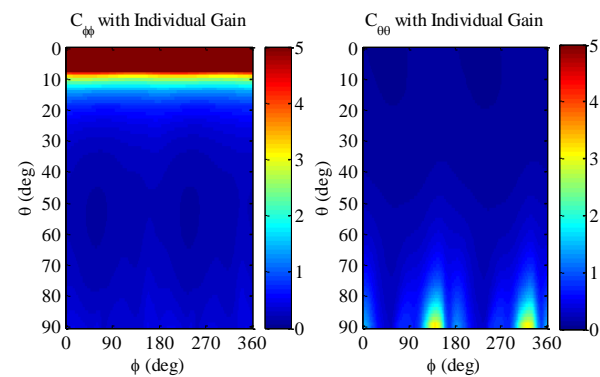
است. هر المان به صورت پاد ساعتگرد شماره‌گذاری شده است. $(\sigma_s^2 / \sigma_n^2)$ تعریف می‌شود، برابر $0dB$ می‌باشد و تعداد نمونه‌برداری‌های دیجیتال ۱۰۰ در نظر گرفته شده است. روابط $(Y-10)$ به صورت عددی محاسبه شده‌اند که در آن‌ها با توجه به این که نرم‌افزار HFSS تنها مقادیر بهره‌ی هر المان را تولید می‌کند، مشتقات بهره بصورت عددی محاسبه شده است. جهت مقایسه بهتر و مشاهده تفاوت‌های اثر الگوی تشعشی آنتن در نمودارهای کرامر- رانو، CRLB آرایه فوق به ازای همه‌جهته بودن همه المان‌های آن نیز در شکل شکل (۴) ترسیم شده است. با وارد کردن الگوهای تشعشی دریافت شده از نرم افزار تحلیل تمام موج HFSS [۱۹] برای هر المان به بردار هدایت و انجام شبیه‌سازی‌های عددی در نرم‌افزار MATLAB [۲۰] نمودار شکل (۵) به دست می‌آید.



شکل (۲): نمای سه‌بعدی از موقعیت المان‌های آنتن آرایه‌ای شبیه‌سازی شده در HFSS



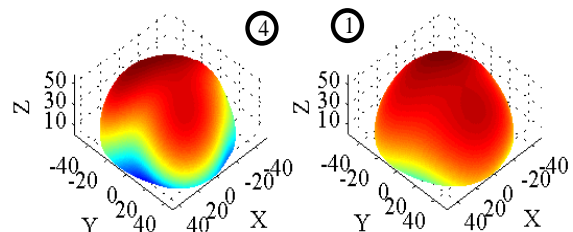
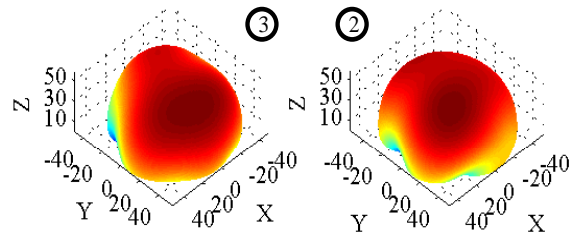
شکل (۴): نمودارهای کرامر- رانو آنتن آرایه‌ای چهار المانه UCA با در نظر گرفتن الگوی تشعشی همه‌جهته



شکل (۵): نمودارهای کرامر- رانو آنتن آرایه‌ای چهار المانه UCA با در نظر گرفتن الگوی تشعشی دریافت شده از HFSS

توجه کنید که در شکل (۴-۵) به دلیل این که مقادیر نمودارهای کرامر- رانو در نقاط خاصی به سمت مقادیر بالا و بعضاً بی‌نهایت میل می‌کند، این توابع محدود شده‌اند که در اینجا عدد محدودده کننده، ۵ درجه می‌باشد. به دلیل این که عدد ۵ و اعداد اطراف آن به رنگ تیره‌تر می‌باشند، در نقاطی که نمودار CRLB به رنگ تیره‌تر هستند، مقادیر کرامر- رانو به بیشتر از ۵ درجه و یا حتی به بی‌نهایت رسیده‌اند. همچنین می‌توان به این محدوده،

همچنین در شکل (۳) الگوی بهره دریافت شده از HFSS برای هر المان نشان داده شده است. با توجه به وجود اثر تزویج متقابل میان آنتن‌های مجاور، مشاهده می‌شود که الگوهای تشعشی نامتقارن توزیع یافته‌اند.



شکل (۳): الگوهای تشعشی هر چهار المان آنتن آرایه‌ای با وجود اثر کوپلینگ متقابل میان المان‌ها

۶- نمودارهای CRLB و ابهام

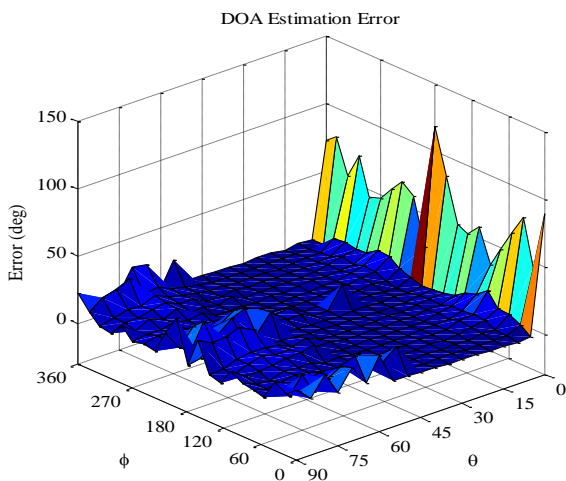
نمودار CRLB به صورت نموداری دوبعدی و با دقت ۱ درجه برای دو درایه ماتریس کرامر- رانو که نمایانگر مرز پایین تخمین‌های زاویه سمت و فراز می‌باشد، براساس رابطه‌های $(10-5)$ ترسیم شده است. این دو درایه به ترتیب با $C_{\phi\phi}$ و $C_{\theta\theta}$ در نمودارها نشان داده شده‌اند. پارامترهای سامانه که در این شبیه‌سازی‌های عددی فرض شده‌اند، به قرار زیر است. SNR سامانه که به نسبت واریانس سیگنال منبع به نویز

بازه دید آرایه از حیث DOA نیز نامید.

$$E_{\varphi, \theta} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \sqrt{(\hat{\varphi}_i - \varphi)^2 + (\hat{\theta}_i - \theta)^2} \quad (13)$$

در رابطه فوق $\hat{\varphi}_i$ و $\hat{\theta}_i$ به ترتیب زوایای تخمین زده شده سمت و فراز i ام بوده که مقدار اصلی آن φ و θ می باشد. i ، مرتبه اجرای DOA از تعداد کل L می باشد. عدد خطای محاسبه شده در رابطه (۱۳) در حقیقت میانگین اندازه اختلاف دو بردار تخمین در جهت های $\hat{\varphi}_i$ و $\hat{\theta}_i$ و φ و θ می باشد.

در شبیه سازی های صورت گرفته، L برابر ۱۰ و در فاصله ۱ درجه جداگانه برای زوایای سمت و فراز منبع انجام گرفته است. نمودار منتج، یک نمودار سه بعدی مشابه آنچه که در شکل (۶) نشان داده شده است؛ می باشد.



شکل (۶): تابع ابهام آنتن آرایه های چهار المانه UCA

با توجه به شکل (۶) به غیر از محدوده زوایای فراز پایین، هیچ نقطه ای وجود ندارد که خطای DOA به طرز غیر قابل قبولی بالا باشد. این نکته به تنهایی می تواند ثابت کند که این آرایه از مشکل ابهام در بردار هدایت خود برخوردار نمی باشد.

با توجه به این که در زوایای فراز نزدیک به صفر و بیشتر از حدودا ۶۰ درجه خطای نسبتا بالایی را داریم، می توان از نمودارهای CRLB استنباط کرد. خطای محاسبه شده در رابطه (۱۳) با مقدار رابطه (۱۴) برابر است با:

$$E_{CRLB} = \sqrt{C_{\varphi\varphi}^2 + C_{\theta\theta}^2} \quad (14)$$

همچنین این اصل مهم در تئوری کرامر- رائو که نشان می دهد تخمین گر MUSIC در بهینه ترین حالت به مرز تعیین شده توسط کرامر- رائو خواهند رسید [۱۸]، می توان نتیجه گرفت که بالا بودن خطا در نمودارهای شکل (۵) همان دقت پیش بینی شده توسط کرامر- رائو می باشد.

همان طور که در شکل (۴) نمایان است، $C_{\varphi\varphi}$ در زوایای فراز $C_{\theta\theta}$ و در زوایای فراز پایین کرامر- رائوی بالایی هستند که به این معناست که آرایه تقریبا نمی تواند تخمین خوبی داشته باشد. هر چند قضیه برای $C_{\varphi\varphi}$ کمی متفاوت است، اما یکی از معایب آرایه های با المان های همه جهته، عدم تخمین دقیق زوایای فراز در زوایای فراز کم منبع سیگنال است. از آنجایی که منبعی که در زاویه فراز صفر می باشد در حقیقت زاویه سمت نامعلومی دارد، وجود کرامر- رائوی بالا در زوایای فراز پایین برای $C_{\varphi\varphi}$ می تواند یک مسئله ذاتی تلقی شود.

با در نظر گرفتن اثر الگوی تشعشی هر المان و افزودن آن در بردار هدایت و ترسیم نمودارهای CRLB تفاوت کاملا مشهود است. با توجه به شکل (۵) اولین تفاوت که منجر به پاسخ بهتر آرایه شده است، حذف محدوده کرامر- رائوی بالا در $C_{\theta\theta}$ می باشد. هر چند در نقاطی همچنان تخمین های فراز نسبتا بالا است اما می توان گفت که نوار تیره رنگ به محدوده بسیار کمتری، کاهش یافته است. هر چند با دقت بیشتر در $C_{\theta\theta}$ با المان ها همه جهته و غیر همه جهته، دقت تخمین های فراز به مقدار کمی تنزل پیدا کرده است. همچنین ساختار غیرمتمارن الگوهای تشعشی المان های آرایه منجر به اعوجاج در نمودار CRLB و خارج شدن از فرم منظم آن نسبت به حالت همه جهته شده است. این مسئله می تواند دید ما را نسبت به ایده آل فرض کردن المان های آرایه تغییر داده و اجازه بدهد که نگاه دقیق تری به موضوع کرامر- رائوی آنتن های آرایه ای داشته باشیم.

با توجه به نمودارهای $C_{\varphi\varphi}$ در دو حالت همه جهته و غیر همه جهته بودن المان های آرایه، شکل (۵) نشان می دهد که در نقاطی دقت $C_{\varphi\varphi}$ افزایش و در نقاطی دیگر کاهش داشته است. برای مثال در زوایای فراز پایین، کاهش دقت تخمین های DOA را شاهد هستیم و از طرفی دیگر دقت در محدوده زوایای فراز ۴۰ تا ۶۰ درجه در بعضی نقاط بهتر شده است.

جهت ترسیم نمودارهای ابهام به منظور بررسی عدم ابهام در بردار هدایت آرایه، از روش تکرار اجرای الگوریتم DOA با شبیه سازی سیگنال دریافتی از آرایه، به دفعات و جاروب کردن همه فضا استفاده شده است. به این منظور، الگوریتم DOA به خاطر سرعت و دقت بالا به L دفعه در نظر گرفته شده است. به ازای یک زاویه سمت و فراز مشخص از منبع سیگنال، میانگین L مرتبه اجرای الگوریتم DOA محاسبه شده و ذخیره شده است. لذا مقدار خطای محاسبه شده $E_{\varphi, \theta}$ به صورت رابطه (۱۳) محاسبه می شود.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر الگوی تشعشعی آنتن بر روی بازدهی کرامر- راتو و تابع ابهام آرایه مسطح بررسی شده است. برای این کار ابتدا مدل‌سازی دریافت سیگنال از آنتن آرایه‌ای ارائه شده است که اثر الگوی تشعشعی توسط تابع بهره به بردار هدایت آرایه وارد شده است. سپس روابط کرامر- راتو از مدل دریافت سیگنال به‌دست آمده و شبیه‌سازی‌های عددی جهت بررسی رفتار CRLB یک آنتن آرایه‌ای UCA چهار المانه که در باند فرکانسی GPS کار می‌کند، صورت گرفته است. همچنین روش به‌دست آوردن تابع ابهام به دلیل اهمیت پاسخ آرایه از جهت عدم داشتن ابهام در بردار هدایت، تشریح داده شده است و با دقت ۱ درجه شبیه‌سازی عددی انجام پذیرفته است. با توجه به نتایج به‌دست آمده، نشان داده شده است که وجود نواری از مرز کرامر- راتوی بالا در زوایای فراز پایین در تخمین‌های زاویه فراز، با تبدیل مدل‌سازی آرایه با المان‌های همه‌جهته و غیرهمه‌جهته، حذف شده است و بر روی تخمین‌های زاویه سمت اثر چندانی نداشته است. همچنین به دلیل وجود اثرات جانبی همچون کوپلینگ متقابل میان المان‌های آرایه، نمودارهای CRLB دچار اعوجاج جزئی شده است. تابع ابهام شبیه‌سازی شده نیز نشان می‌دهد که آنتن آرایه‌ای همچنان بدون ابهام در بردار هدایت خود می‌باشد. در طول شبیه‌سازی‌های صورت گرفته در این مقاله، تنها یک آرایش آنتن آرایه‌ای که دارای آنتن پچ با الگوی تشعشعی مشخص بود، در نظر گرفته شد. از آنجایی که تغییر جانمایی المان‌های آنتن آرایه‌ای و الگوی تشعشعی هر المان تاثیر بسزایی در پاسخ توابع کرامر- راتو و ابهام می‌گذارد، به عنوان پیشنهاد می‌توان در تحقیقات و بررسی‌های آینده، مسئله بهینه‌سازی و یا دیگر آرایش‌های آنتن آرایه‌ای را مد نظر قرار داد تا به کمک آن بتوان به ساختار هندسه‌ای بهینه آنتن آرایه‌ای جهت تشخیص DOA دقیق‌تر منابع سیگنال رسید.

۷- مراجع

- Engineers, Proceedings of the Institution of 114.6 (1967): 713-718.
- [6] Lim, J. C., and D. E. N. Davies. "Synthesis of a single null response in an otherwise omnidirectional pattern using a circular array." *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of* 122.4 (1975): 349-352.
- [7] Kim, Kyungjung, et al. "DOA estimation utilizing directive elements on a conformal surface." *Radar Conference, 2003. Proceedings of the 2003 IEEE. IEEE, 2003.*
- [8] Gazzah, Houcem, and Karim Abed-Meraim. "Optimum ambiguity-free directional and omnidirectional planar antenna arrays for DOA estimation." *Signal Processing, IEEE Transactions on* 57.10 (2009): 3942-3953.
- [9] Sanudin, Rahmat, et al. "Analysis of DOA estimation for directional and isotropic antenna arrays." *Antennas and Propagation Conference (LAPC), 2011 Loughborough. IEEE, 2011.*
- [10] Jackson, Brad R., et al. "Direction of arrival estimation using directive antennas in uniform circular arrays." *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* 63.2 (2015): 736-747.
- [11] Gazzah, Houcem. "Parameter estimation using antenna arrays of directional sensors." *Communications, Signal Processing, and their Applications (ICCSPA), 2015 International Conference on. IEEE, 2015.*
- [12] Van Trees, Harry L. *Detection, estimation, and modulation theory.* John Wiley & Sons, 2004.
- [13] Gazzah, Houcem, and Sylvie Marcos. "Cramer-Rao bounds for antenna array design." *Signal Processing, IEEE Transactions on* 54.1 (2006): 336-345.
- [14] Schmidt, Ralph Otto. "A signal subspace approach to multiple emitter location spectral estimation." Ph. D. Thesis, Stanford University (1981).
- [15] Baysal, Ülkü, and Randolph L. Moses. "On the geometry of isotropic arrays." *Signal Processing, IEEE Transactions on* 51.6 (2003): 1469-1478.
- [16] Gavish, Motti, and Anthony J. Weiss. "Array geometry for ambiguity resolution in direction finding." *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* 44.6 (1996): 889-895.
- [17] Godara, Lal C., and Antonio Cantoni. "Uniqueness and linear independence of steering vectors in array space." *The Journal of the Acoustical Society of America* 70.2 (1981): 467-475.
- [18] Porat, Boaz, and Benjamin Friedlander. "Analysis of the asymptotic relative efficiency of the MUSIC algorithm." *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on* 36.4 (1988): 532-544.
- [19] "ANSYS HFSS." [Online]. Available: <http://www.ansys.com/Products/Electronics/ANSYS-HFSS>.
- [20] "MathWorks." [Online]. Available: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.
- [1] Fu, Z., et al. "Suppression of multipath and jamming signals by digital beamforming for GPS/Galileo applications." *GPS solutions* 6.4 (2003): 257-264.
- [2] Alexiou, Angeliki, and Martin Haardt. "Smart antenna technologies for future wireless systems: trends and challenges." *Communications Magazine, IEEE* 42.9 (2004): 90-97.
- [3] Jeng, S. S., and H. P. Lin. "Smart antenna system and its application in low-Earth-orbit satellite communication systems." *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings* 146.2 (1999).
- [4] Gross, Frank. "Smart antennas for wireless communications." (2005).
- [5] Longstaff, I. D., P. E. K. Chow, and D. E. N. Davies. "Directional properties of circular arrays." *Electrical*

ضمیمه ۱ - اثبات روابط کرامر- راتو

برای محاسبه روابط نهایی کرامر- راتو از مدل دریافت سیگنال آنتن آرایه‌ای ارائه شده در رابطه (۴) و مفروضات در نظر گرفته شده، استفاده می‌شود. درایه \hat{I} و \hat{J} ماتریس فیشر به صورت رابطه (۱۵) تعیین می‌شود.

$$\frac{\partial^2 \ln(p)}{\partial \varphi^2} = -\frac{N}{\sigma_n^2} \quad (21)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(-\mathbf{x}^H \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \varphi^2} s - \frac{\partial^2 \mathbf{a}^H}{\partial \varphi^2} s \mathbf{x} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}^H}{\partial \varphi^2} \mathbf{a} s^2 + \frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} s^2 + \frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} s^2 + \mathbf{a}^H \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \varphi^2} s^2 \right)$$

با محاسبه عملگر مجموع بر روی عبارت روبروی خود و با توجه به این که طبق تعریف روابط زیر را داریم،

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} a(\varphi, \theta) s[n] + w[n] = a(\varphi, \theta) s[n] \quad (22)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} s^2[n] = \text{var}(s[n]) = \sigma_s^2 \quad (23)$$

که بعد از جایگذاری (۲۲) و (۲۳) در (۲۱) و حذف چهار جمله از آن به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln(p)}{\partial \varphi^2} \right] = -\frac{N \sigma_s^2}{\sigma_n^2} \left(\frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \varphi} \right) \quad (24)$$

که به صورت زیر نیز می‌تواند نشان داده شود:

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln(p)}{\partial \varphi^2} \right] = -\frac{N \sigma_s^2}{\sigma_n^2} \left\| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} \right\|^2 \quad (25)$$

با توجه به رابطه (۲۵) مقدار فیشر برای درایه اول برابر است با روابط که در (۶) و (۱۰) نشان داده شده است. به همین ترتیب روابط (۷-۹) نیز قابل اثبات می‌باشد که به دلیل طولانی بودن روابط در اینجا آورده نمی‌شود. لذا اثبات روابط کرامر-رائو نیز که از ماتریس فیشر به دست می‌آید نیز در اینجا به اتمام می‌رسد.

$$F_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2 \ln(p(x | \varphi, \theta))}{\partial x_i \partial x_j} \right]; i, j = 1, 2 \quad (15)$$

که در رابطه بالا داریم:

$$x_1 = \varphi, x_2 = \theta$$

در رابطه (۱۵)، تابع چگالی احتمالی سیگنال دریافتی آرایه بوده که با توجه به این که تابع چگالی از نوع تابع نرمال می‌باشد، برای یک نمونه برداری از سیگنال در حوزه زمان گسسته به صورت رابطه (۱۶) می‌باشد.

$$p(\mathbf{x}[0] | \varphi, \theta) = C e^{-\frac{1}{\sigma_n^2} (\mathbf{x}[0] - \mathbf{a}(\varphi, \theta) s[0])^H (\mathbf{x}[0] - \mathbf{a}(\varphi, \theta) s[0])} \quad (16)$$

در این رابطه C عدد ثابت می‌باشد. برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال N نمونه برداری سیگنال از این نکته استفاده می‌شود که هر نمونه برداری نسبت به نموداری دیگر کاملاً مستقل آمار می‌باشد. لذا برای N نمونه برداری داریم:

$$p(\mathbf{x} | \varphi, \theta) = C e^{-\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{x}[n] - \mathbf{a}(\varphi, \theta) s[n])^H (\mathbf{x}[n] - \mathbf{a}(\varphi, \theta) s[n])} \quad (17)$$

تابع درست‌نمایی^۴، که با محاسبه لگاریتم طبیعی تابع چگالی به دست می‌آید برابر است با:

$$\ln(p(\mathbf{x} | \varphi, \theta)) = \ln(C) - \frac{N}{\sigma_n^2} \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{x}[n] - \mathbf{a}(\varphi, \theta) s[n])^H (\mathbf{x}[n] - \mathbf{a}(\varphi, \theta) s[n]) \quad (18)$$

برای به دست آوردن درایه‌های ماتریس فیشر از رابطه (۱۵) استفاده می‌شود. ابتدا درایه اول این ماتریس در اینجا محاسبه شده و به طریقی مشابه می‌توان درایه‌های دیگر ماتریس را نیز محاسبه کرد. در اینجا درایه F_{11} را به دست می‌آوریم. ابتدا داریم:

$$F_{11} = E \left[\frac{\partial^2 \ln(p(\mathbf{x} | \varphi, \theta))}{\partial \varphi^2} \right] \quad (19)$$

با جایگذاری (۱۸) در (۱۹) و محاسبه مشتق اول داریم:

$$\frac{\partial \ln(p)}{\partial \varphi} = -\frac{N}{\sigma_n^2} \quad (20)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(-\mathbf{x}^H \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} s - \frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \varphi} s \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{a}^H}{\partial \varphi} \mathbf{a} s^2 + \mathbf{a}^H \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} s^2 \right)$$

و با محاسبه مشتق دوم نیز داریم:

⁴ Log-Likelihood

Cramer Rao Lower Bound (CRLB) and Ambiguity Function for Planar Antenna Array with Antenna Radiation Pattern Consideration

A. Ghani, F. Keyvani, S. H. Sedighy*

Iran University of Science and Technology

(Received: 10/03/2016, Accepted: 03/05/2016)

Abstract

Direction-of-arrival estimation is one of the most important tasks in adaptive antenna array systems. In designing such systems, the goal is achieving the best direction finding performance with minimum number of elements. For studying the direction-of-arrival performance in antenna arrays, the Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) method is a reasonable approach. With accurate signal reception modeling in antenna arrays, one can be reached out more accurate CRLB performance. Concerning real antenna radiation pattern for every element of antenna array that is achieved via electromagnetic simulation software and inserting in the system signal reception model, CRLB behavior analysis of a real antenna array that perform direction-of-Arrival estimation algorithm can be done. In this paper, the CRLB study of a typical 4-elements GPS antenna array at L1 frequency band is done. Furthermore, the ambiguity resolution performance of this antenna array with full signal reception modeling is demonstrated.

Keywords: Direction of arrival estimation, Array antenna, Smart antenna, ambiguity function, Cramer Rao lower band (CRLB)

* Corresponding author E-mail: sedighy@iust.ac.ir