مجله علمی پژوهشی «علوم و فناوری‌های پدافند نوین»
سال هفتم، شماره ۱، بهار ۱۳۹۵؛ ص ۹۴-۸۱

فیلترذره مبتنی بر MCMC به‌منظور ردگیری چندهدفه در میان مشاهدات خام و آشکارنشده

میثم رئیس دانایی[۱*]
۱- استادیار دانشگاه جامع امام حسین (ع)
(دریافت: ۹۴/۰۶/۰۸، پذیرش: ۹۴/۱۰/۲۷)

چکیده

در این مقاله به مسئله پرچالش ردگیری چندهدفه در میان داده‌های آشکارنشده پرداخته می‌شود. برای انجام این کار، ابتدا با تقسیم فضای حالت به دو زیر فضای خطی و غیرخطی و با به‌کارگیری اصل Rao–Blackwellization، چگالی اهمیتی بهینه را برای نوع خاصی از مدل سنسور، که مشاهدات منشعب و در هم ادغام‌شده را برای ناحیه مشاهده مشبک‌شده تولید می‌نماید، به‌دست آمد. در ادامه، برای کاهش پیچیدگی محاسباتی نمونه برداری از چگالی اهمیتی بهینه، از معروف‌ترین نمونه‌بردار خانواده MCMC یعنی نمونه‌بردار Gibbs برای نمونه‌برداری از چگالی اهمیتی بهینه استفاده شد و سپس با مقایسه عملکرد این دو در یک محیط ردگیری چندهدفه و در میان مشاهدات خام و آشکارنشده، نشان داده شد که نمونه‌بردار Gibbs به مبادله‌ای بین کاهش حجم محاسبات و میزان دقت در ردگیری دست می‌یابد. ایده مطرح‌شده را می‌توان به‌عنوان جایگزین برای مواقعی که نمونه‌برداری از چگالی اهمیتی بهینه عملا غیرممکن است، استفاده نمود.

کلیدواژه‌ها: ردگیری چندهدفه، نمونه‌بردار Gibbs، اصل Rao–Blackwellization، چگالی اهمیتی بهینه، فیلتر ذره‌ای.

An MCMC-baesd Particle Filter for Multitarget Tracking within Raw Measurements

M. R. Danaee*
Imam Hossein University
(Received: 30/08/2015, Accepted: 17/01/2016)

Abstract

This paper examines multitarget tracking within raw measurements which has always been considered to be a hassle. This was achieved by separating the state space model of each target into linear and nonlinear subspaces. Then, the Rao–Blackwellization principle was utilized to derive the optimum importance density for special kind of sensor which generates both split and merged measurements within a pixelized observation area. To relieve the complexity associated with the achieved optimum importance, the Gibbs sampler, the well-known sampler from MCMC family, is used to sample from the optimal importance density. The synthetic multitarget tracking scenario using raw data will then be used to show that our new Gibbs sampling method could reach a compromise between accuracy of tracking and computational expense. The proposed idea is motivating to be used in applications where sampling from the optimum proposal density is practically impossible.

Keywords: Multitarget tracking, Gibbs Sampler, Rao–Blackwellization, Optimal Importance Density, Particle Filter.

* Corresponding author Email: mrdanaee@gmail.com

۱. مقدمه

فیلتر ذره که شاخه‌ای مشهور از خانواده فیلترهای مونت‌کارلو[۱] [۱] می‌باشد، برای حل مسئله ردگیری چندهدفه (MTT[۲])، در دو دهه اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته است [۶-۲]. این فیلتر در زمینه‌های گوناگونی از مسئله MTT مانند سناریوهایی با اهداف متغیر با زمان [۹-۷]، استفاده در حالت ترکیبی به‌همراه شیوه‌های کلاسیک الحاق داده[۳] همانند الحاق داده احتمالی مشترک (JPDAF[۴]) [۱۰] و ردگیر فرض چندگانه احتمالی (PMHT[۵]) [۳]، [۱۱] و در نهایت استفاده به‌صورت رهیافت یکپارچه‌ای که هم نقش فیلترینگ و هم نقش الحاق داده را ایفا می‌نماید [۱۵-۱۲]، به‌کار گرفته می‌شود. در حالتی که استفاده از فیلتر ذره به‌صورت رهیافت یکپارچه هم برای فیلترینگ و هم برای الحاق داده است، هر ذره نماینده هم حالت اهداف و هم نحوه الحاق داده (نحوه انتساب مشاهدات به اهداف) می‌باشد. حسن رهیافت ارائه‌شده در این مقاله در توانایی آن برای کارکردن با مدل مشاهدات غیرایده‌آل است. در مشاهدات ایده‌آل، در خروجی یک سنسور در یک اسکن معین برای یک هدف بیش از یک مشاهده تولید نمی‌شود و هیچ مشاهده‌ای نیز به بیش از یک سنسور تخصیص داده نمی‌شود. اما در این مقاله سیستم ردگیری ارئه‌شده توانایی کار با مشاهدات در هم ادغام‌شده[۶]، یعنی یک مشاهده به تنهایی معرف چند هدف باشد، و مشاهدات منشعب شده[۷]، یعنی به‌ازای یک هدف بیش از یک مشاهده تولید شود، را دارا می‌باشد. در اینگونه مشاهدات، فرض‌های پایه برای الحاق داده کلاسیک نقض می‌گردد [۱۷-۱۶]. فیلتر ذره همچنین کار با داده‌های آشکارنشده را ممکن می‌سازد [۵]، [۱۹-۱۸]. مزیت کار با داده‌های آشکارنشده این است که سیستم MTT می‌تواند اهداف را در SNR های پایین‌تر با دقت بیش‌تری ردگیری نماید. علت این امر این است که آستانه‌گذاری خود بخشی از اطلاعات را بدور خواهد ریخت.

در طراحی یک فیلتر ذره مناسب برای مسئله MTT، مهمترین نکته انتخاب چگالی اهمیتی مناسب می‌باشد. نشان داده شده است که بهترین انتخاب برای چگالی اهمیتی آن است که وزن‌های اهمیتی ناشی از فیلتر ذره دارای حداقل واریانس (و در حقیقت واریانس صفر) گردند [۲۰]. چگالی اهمیتی که چنین وزن‌های اهمیتی را به‌دست می‌دهد را چگالی اهمیتی بهینه می‌خوانند. در این مقاله، با به‌کارگیری اصل Rao–Blackwellization، نمونه‌بردار اهمیتی بهینه (OPS[۸]) را برای ردگیری چندهدفه در میان داده‌های خام و آشکارنشده به‌دست می‌آوریم. این داده‌های آشکارنشده از ناحیه مشاهده مشبکی و پیکسل‌بندی‌شده‌ای به‌دست خواهند آمد که در بخش ۲ به‌تفصیل شرح داده خواهد شد. مشکل اینجاست که برای نمونه‌برداری از OPS، نیازمند شمردن و درنظرگرفتن تمامی حالات ممکن برای قرارگرفتن هدف در این ناحیه مشبک می‌باشیم. در نتیجه حجم محاسبات به‌صورت نمایی برحسب تعداد اهداف زیاد خواهد گشت. این امر، نمونه‌برداری از OPS را در ردیف خانواده مسایل NP-hard قرار می‌دهد و در نتیجه هیچ راهی برای کاهش حجم محاسبات برحسب مرتبه خطی از تعداد اهداف وجود نخواهد داشت و باید به‌دنبال روش‌های شبه‌بهینه[۹] باشیم.

ما در این مقاله از نمونه‌بردار Gibbs به‌عنوان روشی شبه‌بهینه برای نمونه‌برداری از فضای تعریف‌شده توسط متغیرهای تصادفی در دامنه OPS استفاده می‌نماییم. نمونه‌بردار Gibbs متعلق به خانواده MCMC[۱۰] می‌باشد [۲۱]. مزیت استفاده از نمونه‌بردار Gibbs این است که این نمونه‌بردار حالت چندهدفه مشترک را در هر چرخه[۱۱] الگوریتم خود، به مولفه‌های مجزایی تقسیم می‌نماید و سپس به‌روزرسانی آن‌ها را به‌صورت متوالی انجام می‌دهد. این امر منجر به کاهش حجم محاسبات خواهد گشت زیرا به‌جای شمردن تمامی حالات ممکن از جایگشت‌های قرارگرفتن اهداف در سلول‌های مشاهده، تابع چگالی پسین هر هدف به‌صورت مجزا به‌روزرسانی خواهد شد. این امر منجر به دست‌یابی به مصالحه‌ای مابین دقت ردگیری و حجم محاسبات خواهد گشت.

ساختار این مقاله بدین نحو است که ابتدا در بخش ۲ ابتدا دینامیک حرکت و مدل سنسورها معرفی خواهند شد. سپس به به‌دست‌آوردن تابع چگالی اهمیتی بهینه خواهیم پرداخت. در نهایت در این بخش دو استراتژی برای کاهش حجم محاسبات که به‌ترتیب دروازه‌بندی[۱۲] و استفاده از نمونه‌بردار Gibbs می‌باشند، به‌تفصیل معرفی خواهند شد. نتایج شبیه‌سازی در بخش ۳ نمایش داده خواهند شد تا عملکرد الگوریتم شبه‌بهینه پیشنهادی ما در برابر عملکرد OPS بررسی گردد. نتایج از کاهش شدید حجم محاسبات در برابر افت اندک عملکرد حکایت دارند. در نهایت، در بخش ۴ نتیجه‌گیری مقاله ارائه خواهد شد.

[1] Monte Carlo
[2] Multi Target Tracking (MTT)
[3] Data Association
[4] Joint Probabilistic Data Association (JPDAF)
[5] Probabilistic Multiple Hypothesis Tracker (PMHT)
[6] Merged
[7] Split
[8] Optimal Importance Sampler(OPS)
[9] Sub Optimal
[10] Markov Chain Monte Carlo (MCMC)
[11] Cycle
[12] Gating

۲. فیلتر ذره مبتنی بر MCMC برای ردگیری چندهدفه در میان داده‌های آشکارنشده

۲-۱. دینامیک حرکت و مدل سنسور

بردار حالت هر هدف از مولفه‌های موقعیت و سرعت در فضای دوبعدی تشکیل می‌گردد. مولفه‌های موقعیت هر هدف بردار ρ^t و مولفه‌های سرعت بردار v^t را در جهت‌های x و y می‌سازند. بدین‌صورت بردارهای ρ^t و v^t فضای حالت هدف $\mathbf{s}^t$ را به‌صورت $\mathbf{s}^t = \left[x^t, v_x^t, y^t, v_y^t\right]'$ تولید می‌نمایند.

برای مدل سرعت ثابت [۲۲]، فرایند دینامیک حرکت دارای چگالی انتقال حالت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{s}^t \mid \mathbf{s}^{t-1} \sim \mathcal{N}(\cdot; \mathbf{F}\mathbf{s}^{t-1}, \mathbf{Q}) \qquad (۱)$$

که، $\mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{m}, \boldsymbol{\Theta})$ یک تابع چگالی احتمال گوسی ارزیابی‌شده در $\boldsymbol{\alpha}$ با میانگین $\mathbf{m}$ و ماتریس کواریانس $\boldsymbol{\Theta}$ می‌باشد، و

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2 \otimes \rho \cdot \begin{pmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{pmatrix} \qquad (۲)$$

که، $\mathbf{I}_n$ بیانگر ماتریس همانی $n \times n$، $\otimes$ بیانگر ضرب Kronecker، T نشانگر فاصله دو نمونه‌برداری متوالی در سنسور مشاهده و در نهایت ρ بیانگر واریانس نرمالیزه‌شده از انحراف سرعت است.

با فرض وجود τ هدف متفاوت، حالت مشترک $\mathcal{S}^t$ با ضمیمه‌نمودن حالات تک‌تک اهداف به هم به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\mathcal{S}^t = (\mathbf{s}_1^t, \mathbf{s}_2^t, \ldots, \mathbf{s}_\tau^t) \qquad (۳)$$

با درنظرگرفتن دینامیک حرکت مستقل هر هدف از دیگر اهداف، حالت مشترک $\mathcal{S}^t$ دارای تابع چگالی انتقال حالت به‌فرم زیر خواهد بود:

$$\mathrm{p}(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{t-1}) = \prod_{i=1}^{\tau} \mathcal{N}(\mathbf{s}_i^t; \mathbf{F}\mathbf{s}_i^{t-1}, \mathbf{Q}) \qquad (۴)$$

رهیافت‌های کلاسیک الحاق‌داده در برابر مشاهدات تفکیک شده و یا در هم ادغام‌شده به مشکل بر خواهند خورد. اینگونه رهیافت‌ها فرض می‌کنند که در زمان نمونه‌برداری سنسور از محیط مشاهده، هیچ هدفی بیش از یک مشاهده را تولید نمی‌نماید و به‌عبارتی مشاهدات به‌صورت انحصاری و جامع[۱] هستند [۱۷]. اما آنچه در عمل رخ می‌دهد این است که مشاهدات یک هدف در هر زمان، ممکن است بیش از یکی باشند [۲۴]. به‌علاوه مشاهدات ممکن است در هم ادغام شوند و هرچند هدف با هم تنها یک مشاهده در هر زمان تولید نمایند[۲۶-۲۵].

فرض می‌کنیم که سنسور دریافت‌کننده تشعشعات راداری، ناحیه مشاهده را به نواحی مستطیل‌شکلی به نام سلول‌های مشاهده تقسیم می‌نماید به‌نحوی که ابعاد این سلول‌ها بزرگ‌تر از ابعاد هدف می‌باشند و هیچ هدفی همزمان در دو سلول قرار نمی‌گیرد.

سیگنال دریافتی ناشی از چند هدف در هر سلول مشاهده با نویز حرارتی سنسور در باند رادیویی جمع شده و نتیجه به باند پایه برگردان می‌شود و قدرمطلق آن محاسبه می‌گردد. نتیجه این محاسبات را با $o_{m,n}^t$ نشان می‌دهیم که پوش یک سیگنال مختلط می‌باشد. مجموعه تمامی مشاهدات، یعنی $\mathcal{L}_x$ سلول مشاهده در راستای x و $\mathcal{L}_y$ سلول مشاهده در راستای y را به‌صورت ماتریس $\mathcal{O}^t$ نمایش می‌دهیم به‌نحوی که:

$$\mathcal{O}^t = (o_{m,n}^t), \quad m = 1, \ldots, \mathcal{L}_y, n = 1, \ldots, \mathcal{L}_x \qquad (۵)$$

که، $\mathcal{L}_x$ و $\mathcal{L}_y$ تعداد سلول‌ها در جهت‌های x و y هستند. در [۲۷] ماتریس $\mathcal{O}^t$ را ماتریس تصویر نامیده است و عناصر آن را پیکسل می‌نامد. ماتریس $\mathcal{O}^t$ را با تمامی مولفه‌هایش قبل از عمل آشکارسازی در مقالات با نام داده‌های خام یا آشکارنشده می‌شناسند.

در ادامه، ما متغیر ς را به‌عنوان اندیسی اسکالر از سلول‌ها معرفی می‌کنیم که با اندیس‌های سطر و ستون m و n به‌صورت زیر ارتباط پیدا می‌کند:

$$\varsigma = (n-1) \cdot \mathcal{L}_y + m, 1 \le n \le \mathcal{L}_x, 1 \le m \le \mathcal{L}_y \qquad (۶)$$

وقتی یک یا بیش از یک هدف در درون سلول ςام قرار می‌گیرند و یا پاسخ سنسور به اهداف قرار گرفته در سلول‌های همسایه‌اش به درون آن سلول نشت می‌کند، مولفه متناظر آن سلول در ماتریس $\mathcal{O}^t$ یعنی o_ς^t دارای چگالی رایسین[۲] خواهد بود. در غیراین‌صورت چگالی احتمال برای مولفه o_ς^t به‌فرم ریلی[۳] خواهد بود. برای راحتی کار فرض نمایید که یک هدف با بردار حالت $\mathbf{s}_1^t$ در درون سلول ςام قرار گرفته است. در این‌صورت تابع درست‌نمایی[۴] دارای فرم زیر خواهد بود:

---

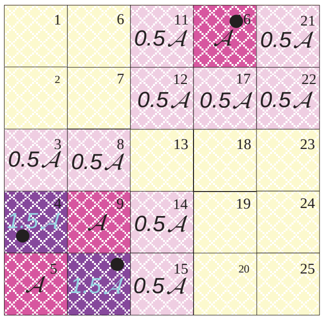
[1] Exclusive and Exhaustive

[2] Rician
[3] Rayleigh
[4] Likelihood

$$p(o_\varsigma^t \mid \mathbf{s}_1^t, \tau_t=1) = \frac{o_\varsigma^t}{\sigma_v^2}\exp\left(-\frac{\left[o_\varsigma^t\right]^2+[T^{\varsigma}(\mathbf{s}_1^t)]^2}{2\sigma_v^2}\right) \times I_0\left(\frac{o_\varsigma^t\, T^{\varsigma}(\mathbf{s}_1^t)}{\sigma_v^2}\right) \quad (۷)$$

که، σ_v^2 برابر با واریانس نویز حراراتی سنسور، و $T^{\varsigma}(\mathbf{s}_1^t)$ برابر با پاسخ سنسور به هدف واقع‌شده در درون سلول ςام با بردار حالت $\mathbf{s}_1^t$ می‌باشد.

در شکل (۱)، اصل برهم‌نهی برای تابع $T^{\varsigma}(\gamma)$ که برای ناحیه مشاهده سلولی 5×5 نمایش داده شده است. سه هدف با نقاط سیاه نمایش داده شده‌اند و در سلول‌های $\{1,4\}$، $\{4,1\}$ و $\{5,2\}$ قرار گرفته‌اند. نشتی با دامنه به سلول‌های همسایه می‌رسد. توجه شود که $T^{\varsigma}(\gamma)$ تنها در این سلول‌ها و سلول‌های مجاور آن‌ها دارای مقادیر غیرصفر می‌باشد.



شکل ۱. اصل برهم‌نهی برای تابع $T^{\varsigma}(\gamma)$ برای ناحیه مشاهده سلولی 5×5

پاسخ سنسور به هدفی که در هر سلول است تنها به آن سلول محدود نخواهد شد و دارای نشتی به سلول‌های مجاور نیز خواهد بود. به‌علت شکل مستطیلی سلول‌های مشاهده، فرض می‌کنیم که نشتی پاسخ سنسور به هر سلول تنها در ۸ سلول مجاور و کناری آن با نصف توان سلول اصلی سرایت می‌نماید و بعد از آن صفر می‌گردد. این مدل در اصل ساده شده مدل پاسخ سنسور با نشتی مدل‌شده به‌صورت IFFT دوبعدی است که در [۲۷] مطرح شده است ولی با وجود این ساده‌شدن مدل، همچنان از مدل بدون نشتی که در [۵] و [۱۹] مطرح شده است دقیق‌تر است. پاسخ به سنسور $T^{\varsigma}(\mathbf{s}_\kappa^t)$ برای مدل‌نمودن نشتی سنسور، به‌فرم زیر فرموله می‌گردد:

$$T^{\varsigma}(\mathbf{s}_\kappa^t) = \begin{cases} A & \text{if } \chi_{\mathcal{V}_\varsigma}(\kappa)=1 \\ A/2 & \text{if } \sum_{\alpha}\chi_{\mathcal{V}_{\varsigma-\alpha}}(\kappa)=1 \\ & \alpha\in\{\pm\mathcal{L}_y, \pm\mathcal{L}_y\ \pm1, \pm1\} \\ 0 & \text{if } \sum_{\alpha,\beta}\chi_{\mathcal{V}_{i-\alpha,j-\beta}}(\kappa)=0 \end{cases} \quad (۸)$$

که، تابع $\chi_{\mathcal{V}_\varsigma}(\kappa)$ بدین‌صورت تعریف می‌شود که مقدار آن تنها وقتی برابر یک خواهد بود که در زمان tام، هدف κام درون سلول مشاهده ςام واقع شده باشد و در غیراین‌صورت مقدار آن برابر با صفر خواهد بود. از آنجایی‌که این مدل، تقریبی از مدل نشتی پاسخ سنسور به‌صورت تبدیل IFFT دوبعدی [۲۷] می‌باشد، تابع $T^{\varsigma}(\gamma)$ دارای خاصیت برهم‌نهی بوده و امکان مدل‌نمودن مشاهدات در هم ادغام‌شده را دارد. بنابراین پاسخ سنسور به حالت مشترک $\mathcal{S}^t$ در سلول مشاهده ςام برابر با پاسخ سنسور به بردار حالت تک‌تک اهداف می‌باشد یعنی:

$$T^{\varsigma}(\mathcal{S}^t) = \sum_{\kappa=1,\ldots,\tau_t} T^{\varsigma}(\mathbf{s}_\kappa^t) \quad (۹)$$

خاصیت برهم‌نهی تابع $T^{\varsigma}(.)$ برای سه هدف در ناحیه مشاهده‌ای که به سلول‌های مشاهده ۵×۵ تقسیم شده است، در شکل (۱) نمایش داده شده است. با τ هدف که به‌صورت تصادفی در ناحیه مشاهده پراکنده‌اند، تابع درست‌نمایی، برای سلول مشاهده ςام به‌فرم زیر خواهد بود:

$$p(o_\varsigma^t \mid \mathcal{S}^t) = \frac{o_\varsigma^t}{\sigma_v^2}\exp\left(-\frac{\left[o_\varsigma^t\right]^2+[T^{\varsigma}(\mathcal{S}^t)]^2}{2\sigma_v^2}\right) \times I_0\left(\frac{o_\varsigma^t\, T^{\varsigma}(\mathcal{S}^t)}{\sigma_v^2}\right) \quad (۱۰)$$

با فرض آن‌که هیچ هدفی در سلول مشاهده ςام وجود ندارد و یا هیچ نشتی به سلول مشاهده ςام نرسیده است، خواهیم داشت: $T^{\varsigma}(\mathbf{s}_\kappa^t)=0$ و (۷) منجر به چگالی رایلی خواهد گشت. توجه به این نکته مهم است که نویز مشاهده سلول‌های گوناگون از یکدیگر مستقل می‌باشند و در نتیجه تابع درست‌نمایی کلی برای ماتریس مشاهدات خام $\mathcal{O}^t$ را می‌توان به‌صورت حاصلضرب توابع درست‌نمایی تک‌تک سلول‌های مشاهده نوشت:

$$p(\mathcal{O}^t \mid \mathcal{S}^t) = \prod_{\varsigma=1}^{\mathcal{L}_x\times\mathcal{L}_y} p(o_\varsigma^t \mid \mathcal{S}^t) \quad (۱۱)$$

از آنجایی‌که دقت در تعیین موقعیت اهداف، محدود به ابعاد سلول مشاهده می‌گردد و تا زمانی‌که هدفی در درون سلول ςام واقع شده است پاسخ سنسور نسبت به جابجایی هدف در درون سلول بی‌تفاوت و یکسان است، می‌توان تابع درست‌نمایی رابطه (۱۱) را تنها وابسته به اندیس سلول‌هایی دانست که اهداف را دربر می‌گیرند.

حال با فرض آن‌که ς_i سلول دربرگیرنده هدف iام باشد، برای τ_t هدف با بردار حالت‌های در دسترس، اندیس

سلول‌هایی که اهداف را در لحظه t بر می‌گیرند معلـوم خواهنـد بود و می‌توان تابع درست‌نمایی را به‌صورت زیر نوشت:

$$p(\mathcal{O}^t \mid \mathcal{S}^t) = p(\mathcal{O}^t \mid \varsigma_1,\ldots,\varsigma_{\tau_t}) \qquad (۱۲)$$

۲-۲. الگوریتم ردگیری چندهدفه به‌وسیله فیلتر ذره

هدف الگـوریتم ردگیـری چندهدفـه، تخمـین تـابع چگـالی احتمال پسین[1] $p(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{O}^{1:t})$ از حالت مشترک اهداف $\mathcal{S}^t$ بـر اساس ماتریس‌های مشاهدات $\mathcal{O}^{1:t}$ می‌باشد. بدین منظـور، بـا به‌کارگیری استنتاج بیزین [۱]، چگالی احتمال پسین به‌صـورت بازگشتی از طریق معادله زیر محاسبه می‌گردد:

$$p(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{O}^{1:t}) = \frac{p(\mathcal{O}^t \mid \mathcal{S}^t)}{p(\mathcal{O}^t \mid \mathcal{O}^{1:t-1})} \times \int_{\mathcal{S}^{t-1}} p(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{t-1}) p(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{O}^{1:t-1}) d\mathcal{S}^{t-1} \qquad (۱۳)$$

صرف نظر از حالاتی خـاص، رابطـه بازگشـتی (۱۳) بـه‌فـرم بسته قابل محاسبه نمی‌باشد و نیازمند به‌کارگیری الگوریتم‌هـای عددی همانند خانواده فیلترهای مونت‌کارلو [۲۱-۲۰]، هسـتیم. به‌طور مثال، در فیلتر ذره که یکی از اعضای معروف این خانواده است، چگالی احتمال پسین را به‌صورت بازگشـتی در هـر زمـان به‌وسیله تعدادی محدود از ذرات (به‌طـور مثـال $\mathcal{N}_p$ ذره) کـه برای هرکدام وزنی (به نام وزن اهمیتی[2]) اختصاص یافته است، هماننـد مجموعـه $\{\mathcal{S}^{i,t}, w^{i,t}, i=1,\ldots,\mathcal{N}_p\}$، تقریـب زده مـی‌شـود. خواننـدگان علاقمنـد بـه نحـوه عملکـرد فیلتـر ذره، می‌توانند به [۱] برای اطلاعات جامع‌تر مراجعه فرمایند.

الگـوریتم فیلتـر ذره بـا متغیـر کمکـی[3](AVPF) یکـی از پیشرفته‌ترین الگوریتم‌های موجود برای پیاده‌سـازی یـک فیلتـر ذره می‌باشد [۲۸]. در این الگوریتم از متغیرهـای کمکـی بـرای نمونـه‌بـرداری از ذراتـی اسـتفاده مـی‌شـود کـه متنـاظر تـابع درست‌نمایی پیش‌بینی‌شده بزرگ‌تری هستند و این کار به ایـن امید صورت می‌گیرد که واریانس وزن‌های اهمیتی کاهش یابـد. بـا تقریـب تـابع چگـالی پسـین اهـداف در زمـان t، بـه‌صـورت $p(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{O}^{1:t}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_p} w^{i,t} \delta(\mathcal{S}^t - \mathcal{S}^{i,t})$ و با توجه به رابطه (۱۳)، تابع چگالی پسین اهداف در زمان t+1 به‌صـورت زیـر در خواهد آمد:

$$p(\mathcal{S}^{t+1} \mid \mathcal{O}^{1:t+1}) \propto p(\mathcal{O}^{t+1} \mid \mathcal{S}^{t+1}) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_p} w^{i,t} p(\mathcal{S}^{t+1} \mid \mathcal{S}^{i,t}) \qquad (۱۴)$$

در مرحله بعدی متغیر کمکی i از روی تابع جرم احتمال[4] (که در [۲۸] از آن با وزن‌های مرتبه اول[5] نام بـرده مـی‌شـود) انتخاب می‌شود تا محتمل‌ترین مولفه‌های احتمال ترکیبی (۱۴) انتخاب گـردد. در ادامـه، نمونـه $\mathcal{S}^{i,t}$ توسـط چگـالی اهمیتـی $q(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{i,t-1}, \mathcal{O}^t)$ تولید گشته و به آن وزن مرتبه دوم زیـر اختصاص داده می‌شود [۲۸]:

$$w^{i,t} = \frac{p(\mathcal{O}^t \mid \mathcal{S}^t) p(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{i,t-1})}{\lambda(i \mid \mathcal{O}^t) q(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{i,t-1}, \mathcal{O}^t)} \qquad (۱۵)$$

که در اینجا وزن‌های مرتبه اول را بـا $\lambda(i \mid \mathcal{O}^t)$ نمـایش می‌دهیم. اگر انتخاب زیر را برای چگالی اهمیتی AVPF داشـته باشیم:

$$q(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{i,t-1}, \mathcal{O}^t) = p(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{i,t-1}, \mathcal{O}^t) \qquad (۱۶)$$

آنگاه تابع چگـالی اهمیتـی بـه نـام چگـالی اهمیتـی بهینـه خوانده می‌شود. دلیل این نام‌گذاری برای این است کـه انتخـاب (۱۶) منجر به حداقل‌نمودن واریانس وزن‌هـای اهمیتـی خواهـد گشــت [۲۰]. در نتیجــه ایــن انتخــاب، وزن‌هــای مرتبــه اول $\lambda(i \mid \mathcal{O}^t)$ به‌فرم زیر در خواهند آمد:

$$\lambda(i \mid \mathcal{O}^t) = \frac{p(\mathcal{O}^t \mid \mathcal{S}^t) p(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{i,t-1})}{q(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{S}^{i,t-1}, \mathcal{O}^t)} \qquad (۱۷)$$

رابطــه (۱۷) بیــانگر چگــالی احتمــال $p(\mathcal{O}^t \mid \mathcal{S}^{i,t-1})$ می‌باشد. با انتخاب چگالی اهمیتی بهینـه، وزن‌هـای مرتبـه دوم برابر با واحد خواهند شـد [۲۸]. در نتیجـه مرحلـه resampling می‌تواند قبل از مرحله نمونه‌برداری انجام گیرد.

در این مقاله نشـان خـواهیم داد کـه تـابع چگـالی اهمیتـی بهینه برای دینامیک حرکت و مدل سنسور معرفی‌شده در بخش ۲ به چه صورت خواهد گشت. برای این منظور به ایـن حقیقـت توجه مـی‌کنـیم کـه بـرای فراینـدهای گوسـی و خطـی، فیلتـر Kalman از فیلتر ذره با تعـداد نمونـه‌هـای محـدود بهتـر عمـل مـــی‌نمایـــد. ایـــن حقیقـــت پایـــه و اســـاس اصـــل Rao–Blackwellization می‌باشـد. اصـلی کـه خـود موجـب کـاهش واریانس خطای تخمین خواهد گشت.

اصل Rao-Blackwellization: بر اساس این اصـل، اگـر فضـای حالت را بتوان به دو زیر فضای خطی و غیرخطـی تقسـیم نمـود آنگاه لازم نیست که چگالی احتمـال بـرای بـردار حالـت تمـامی توسـط فیلتـر ذره تخمـین زده شـود. بلکـه مـی‌تـوان از فیلتـر Kalman که برای فضای خطی و نویز گوسی فیلتر تخمین بهینه است بهره جست و چگالی احتمال بخش خطی از فضای حالت را تخمین زد و برای بخش غیرخطـی از فیلتـر ذره اسـتفاده نمـود [۱و ۲۹].

---

[1] Posterior Density
[2] Importance Weight
[3] Auxiliary Variable Particle Filter (AVPF)
[4] Probability Mass Function
[5] First Stage Weights

چگـالی احتمـال پسـین مولفـه‌هـای موقعیـت را مـی‌تـوان به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\rho}^t \mid \mathcal{O}^{1:t}) &= \int p(\boldsymbol{\rho}^t, \boldsymbol{v}^t \mid \mathcal{O}^{1:t})\, d\boldsymbol{v}^t \\ &\propto \int \left\{ \int p(\boldsymbol{v}^t, \mathcal{O}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{1:t}, \mathcal{O}^{1:t-1})\, d\boldsymbol{v}^t \right\} \\ &\quad \times p(\boldsymbol{\rho}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{t-1})\, p(\boldsymbol{\rho}^{1:t-1} \mid \mathcal{O}^{1:t-1})\, d\boldsymbol{\rho}^{1:t-1}. \end{aligned} \quad (۱۸)$$

بـر اسـاس اصـل Rao–Blackwellization، حاصـل انتگـرال $\int p(\boldsymbol{v}^t, \mathcal{O}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{1:t}, \mathcal{O}^{1:t-1})\, d\boldsymbol{v}^t$ می‌تواند با فیلتـر Kalman محاسبه گردد. بـرای نشـان‌دادن ایـن امـر، تنهـا بـه محاسـبات مربوطه برای سرعت در راستای x می‌پردازیم و مـی‌پـذیریم کـه بنابر تقارن مسئله، محاسبات در راستای y نیز مشابه آن خواهـد بود.

با دوباره‌نویسی معادلات رابطه (۱) به‌نحوی که معادلـه بـروز رسانی زمان برای مولفه سرعت تعریف گردد، خواهیم داشت:

$$v_x^t = v_x^{t-1} + \beta^{t-1} \quad (۱۹)$$

$$x^t - x^{t-1} = T v_x^{t-1} + \alpha^{t-1} \quad (۲۰)$$

$$\mathrm{E}\left\{ \begin{bmatrix} \alpha^{t-1} \\ \beta^{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{t'-1} & \beta^{t'-1} \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{Q} \cdot \delta(t - t') \quad (۲۱)$$

از آنجاکه نویز ناشی از معادله تکامل فراینـد در گـذر زمـان (۱۹) یعنی β^t و نویز ناشی از معادله مشاهده (۲۰) یعنی α^t با یک‌دیگر دارای همبستگی خواهند بود، معادلات بازگشتی فیلتـر Kalman استاندارد باید به‌صورت زیر تغییر یابند تـا همبسـتگی نویزها را لحاظ نمایند [۳۰]:

$$\mathcal{K}_t = \frac{\left(\sum_{t/t-1} + \rho T / 2\right)}{\left(T \sum_{t/t-1} + \rho\right)} \quad (۲۲)$$

$$\hat{v}_x^{t+1/t} = \hat{v}_x^{t/t-1} + \mathcal{K}_t \left(x^{t+1} - x^t - T\, \hat{v}_x^{t/t-1} \right) \quad (۲۳)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t+1/t} &= \left(1 - \mathcal{K}_t T\right)^2 \sum_{t/t-1} \\ &\quad + \rho T \left(T^2 / 3 - \mathcal{K}_t T + \mathcal{K}_t^2 \right) \end{aligned} \quad (۲۴)$$

که در آن، $\mathcal{K}_t$ برابر با بهره فیلتر کالمن در زمان t می‌باشد. کمیت‌های $\hat{v}_x^{t/t-1}$ و $\hat{v}_x^{t+1/t}$ به‌ترتیب برابـر بـا تخمـین مولفـه سرعت در راستای محور x در زمان‌های t و t+1 به‌شرط دریافت مشاهدات در زمان‌های t-1 و t مـی‌باشـند. بـه‌وسـیله معـادلات (۲۲) تا (۲۴)، چگالی احتمـال پسـین بـرای مولفـه سـرعت در راستای x به‌صورت بازگشتی برحسب میـانگین و کواریـانس آن محاسبه و به‌روزرسانی خواهد گشت.

با فرض آن‌که ناحیه مشاهده که بـه‌عنـوان دامنـه دوبعـدی چگالی احتمال موقعیت هدف به‌شمار می‌آیـد، بـه انـدازه کـافی بزرگ باشد، می‌توانیم چگالی احتمال پیشین از بـردار موقعیـت هدف را به‌صورت زیر نشان دهیم:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \mid \boldsymbol{\rho}_\kappa^{t-1}) &= \sum_{\varsigma_\kappa=1}^{\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y} \Big(p(\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}) \\ &\quad \times p(\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \mid \boldsymbol{\rho}_\kappa^{t-1}, \boldsymbol{\rho}_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}) \Big) \end{aligned} \quad (۲۵)$$

که، ς_κ انـدیس سـلول اشـغال‌شـده توسـط هـدف و $\mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}$ گستره سطحی سلول مشـاهده ς_κام اسـت. $\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}$ بیـانگر آن اسـت کـه بـردار موقعیـت از هـدف κام در درون سـلول مشاهده ς_κام در زمـان t واقـع شـده اسـت. بنـابراین، مولفـه چگـالی ترکیبـی $p(\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \mid \boldsymbol{\rho}_\kappa^{t-1}, \boldsymbol{\rho}_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa})$ در (۲۵) یـک چگالی احتمـال گوسـی قطـع‌شـده[1] دوبعـدی خواهـد بـود کـه به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \mid \boldsymbol{\rho}_\kappa^{t-1}, \boldsymbol{\rho}_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}) &= \frac{\chi_{\mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}}(\kappa^t)}{\Upsilon_{\kappa,\varsigma_\kappa}} \\ &\quad \times \mathcal{N}(x_\kappa^t; x_\kappa^{t-1} + T\hat{v}_x^{t-1/t-2}, \rho T^3 / 3) \\ &\quad \times \mathcal{N}(y_\kappa^t; y_\kappa^{t-1} + T\hat{v}_y^{t-1/t-2}, \rho T^3 / 3) \end{aligned} \quad (۲۶)$$

که در آن، تابع $\chi_{\mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}}(\kappa^t)$ تنها برای وقتی که هـدف κام برای زمان t در درون سلول ς_κام واقع شده باشد، یک است و در غیـراین‌صـورت برابـر صـفر اسـت و همچنـین تـابع $\Upsilon_{\kappa,\varsigma_\kappa}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\kappa,\varsigma_\kappa} &= p(\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}) \\ &= \prod_{\eta=1}^{2} \int_{\mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}_\kappa^{\eta,t}; \mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}^2)\, d\boldsymbol{\rho}_\kappa^{\eta,t} \\ \mathbf{m} &= \boldsymbol{\rho}_\kappa^{\eta,t-1} + T v^\eta; \\ \boldsymbol{\sigma}^2 &= \rho T^3 / 3; \\ \boldsymbol{\rho}_\kappa^{1,t} &= x_\kappa^t,\ \boldsymbol{\rho}_\kappa^{2,t} = y_\kappa^t \\ v^1 &= \hat{v}_x^{t-1/t-2},\ v^2 = \hat{v}_y^{t-1/t-2} \end{aligned} \quad (۲۷)$$

بـا توجـه بـه روابـط (۴و۲۵)، چگـالی انتقـال حالـت بـرای مولفه‌های موقعیت یعنی بردار $\boldsymbol{\rho}^t$ به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\rho}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{i,t-1}) &= \prod_{\kappa=1}^{\tau} \sum_{\varsigma_\kappa=1}^{\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y} p(\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}) \\ &\quad \times p(\boldsymbol{\rho}_\kappa^t \mid \boldsymbol{\rho}_\kappa^{i,t-1}, \boldsymbol{\rho}_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}) \\ &= \sum_{\varsigma_1=1}^{\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y} \cdots \sum_{\varsigma_\tau=1}^{\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y} \varphi_{\varsigma_1 \ldots \varsigma_\tau}. \end{aligned} \quad (۲۸)$$

در حالی‌که تابع $\varphi_{\varsigma_1 \ldots \varsigma_\tau}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \varphi_{\varsigma_1 \ldots \varsigma_\tau} &= \prod_{\kappa=1}^{\tau} \Big[\chi_{\mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}}(\kappa^t) \times \\ &\quad \prod_{\eta=1}^{2} \mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}_\kappa^{\eta,t}; \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\sigma}^2) \Big] \end{aligned} \quad (۲۹)$$

کـه، $\boldsymbol{\rho}_\kappa^{i,1,t-1}$ و $v^{i,1}$ بـه‌ترتیـب موقعیـت در راسـتای x و

[1] Truncated

سرعت در راستای x از هـدف κام در ذره iام بـرای زمـان t-1 می‌باشند.

توجه شود که رابطه (۲۹) را می‌توان بـه‌صـورت حاصلضـرب τ عدد توزیع گوسی قطع‌شده درنظر گرفت. در نتیجه به تعداد $\left(\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y\right)^{\tau}$ جایگشت متفـاوت، از نحـوه اشـغال τ هـدف در میان $\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y$ سلول مشاهده، وجود خواهد داشـت. بـرای هـر جایگشت نوعی، تابع درست‌نمایی کلی در رابطـه (۱۲) مقـداری متفـاوت خواهـد داشـت. بـه‌عبـارت دیگـر، مقـادیری کـه تـابع درست‌نمایی کلی در رابطه (۱۲) می‌پذیرد مقـادیری گسسـته و کلا به تعداد $\left(\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y\right)^{\tau}$ مقدار متفاوت می‌باشند. این نتیجـه در رابطه زیر بیان شده است:

$$\begin{aligned}\mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \mathcal{S}^t) &= \mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \boldsymbol{\rho}^t) \\ &= \sum_{\varsigma_1=1}^{\mathcal{L}_x\times\mathcal{L}_y} \cdots \sum_{\varsigma_\tau=1}^{\mathcal{L}_x\times\mathcal{L}_y} \prod_{\kappa=1}^{\tau} \chi_{\mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}}(\kappa^t) \\ &\quad \times \mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \varsigma_1,\ldots,\varsigma_\tau)\end{aligned} \tag{۳۰}$$

از آنجاکه وزن مرتبه اول $\mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{i,t-1})$ بـه‌صـورت زیـر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{i,t-1}) \\ &\quad = \int_{\boldsymbol{\rho}^t} \mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \boldsymbol{\rho}^t)\,\mathrm{p}(\boldsymbol{\rho}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{i,t-1})\, d\boldsymbol{\rho}^t\end{aligned} \tag{۳۱}$$

پس می‌توان با قراردادن ۲۸، ۳۰ و ۳۱)، وزن‌های مرتبه اول را به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}&(\mathcal{O}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{i,t-1}) \\ &= \sum_{\varsigma_1=1}^{\mathcal{L}_x\times\mathcal{L}_y} \cdots \sum_{\varsigma_\tau=1}^{\mathcal{L}_x\times\mathcal{L}_y} \mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \varsigma_1,\ldots,\varsigma_\tau) \cdot \prod_{\kappa=1}^{\tau} \Upsilon_{\kappa,\varsigma_\kappa}.\end{aligned} \tag{۳۲}$$

به‌علاوه، باتوجه به روابط (۲۸و۳۰)، مـی‌تـوان تـابع چگـالی اهمیتی بهینه را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\rho}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{i,t-1}, \mathcal{O}^{1:t}) \\ &\sum_{\varsigma_1=1}^{\mathcal{L}_x\times\mathcal{L}_y} \cdots \sum_{\varsigma_\tau=1}^{\mathcal{L}_x\times\mathcal{L}_y} \prod_{\kappa=1}^{\tau} \chi_{\mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}}(\kappa^t) \cdot \mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \varsigma_1,\ldots,\varsigma_\tau) \\ &\times \prod_{\eta=1}^{2} \mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}_\kappa^{\eta,t}; \boldsymbol{\rho}_\kappa^{i,\eta,t-1} + Tv^{i,\eta}, \rho T^3/3)\end{aligned} \tag{۳۳}$$

چگـالی احتمـال نشـان‌داده در رابطـه (۳۳) ترکیبـی از مولفه‌های گوسی قطع‌شده می‌باشد. بردار موقعیت نمونه‌بـرداری شده توسـط ایـن چگـالی احتمـال را مـی‌تـوان در رابطـه (۲۰) به‌عنوان مشاهده ورودی در رابطه به‌روزرسانی مشاهدات بـه‌کـار برد تا مولفه‌های سرعت پـیش‌بینـی‌شـده بـرای تکـرار بعـدی از طریق رابطه (۲۳) به‌دست آیند. یک چرخه کامـل از فیلتـر ذره بـا چگـالی اهمیتـی بهینـه (OPS) بـر اسـاس اصـل Rao–Blackwellization در میـان داده‌هـای مشـاهده خـام و آشکارنشده در جدول (۱) شرح داده شده است.

جـدول ۱. چرخـه‌ای کامـل از فیلتـر ذره OPS بـر اسـاس اصـل Rao–Blackwellization:

شروع:
برای هر ذره $\left(i = 1 : \mathcal{N}_p\right)$:
برای هر هدف $\left(\kappa = 1 : \tau\right)$:
بردار سرعت اولیه را به‌صورت زیر قرار دهید:
$$\mathbf{s}_\kappa^{i,0} = [x_\kappa^{i,0}, \widehat{v}_x^{i,0/-1}, y_\kappa^{i,0}, \widehat{v}_y^{i,0/-1}]'$$
پایان حلقه دوم.
پایان حلقه اول.
برای $t > 0$:
به تعداد $\mathcal{N}_p$ اندیس ذره بر مبنای تابع جرم احتمال (۳۲) انتخاب کنید:
برای هر اندیس انتخاب‌شده $\left(i = 1 : \mathcal{N}_p\right)$:
برای هر هدف $\left(\kappa = 1 : \tau\right)$:
از روی (۳۳)، $\boldsymbol{\rho}_\kappa^{i,t}$ را نمونه‌برداری کنید.
بر اساس روابط (۲۲) تـا (۲۴)، هـم $\widehat{v}_x^{i,t/t-1}$ و هـم $\widehat{v}_y^{i,t/t-1}$ را به‌روزرسانی نمایید.
پایان حلقه دوم.
پایان حلقه اول.

اگرچه چگالی اهمیتی بهینه‌ای که مـا در ایـن بخـش بـرای مشاهدات خام و آشکارنشده به‌دست آوردیم، برای تعداد اهـداف ثابت و از قبل معلوم صادق است اما می‌توان با ایده‌هـای مطـرح شده در [۱۹] و [۳۱]، آنرا برای تعداد اهداف متغیـر بـا زمـان و نامعلوم نیز توسعه داد که البته خارج از اهـداف مطـرح‌شـده در این مقاله می‌باشد.

حجم محاسبات نمونه‌برداری از تابع چگالی احتمال بهینه: فرض می‌کنیم که به تعداد $\mathcal{N}_p$ ذره می‌خواهیم از تابع چگالی احتمال بهینه نمونه‌برداری کنیم. در نتیجه نمونه‌بردار نیازمند به محاسبه $\mathcal{N}_p$ عدد وزن مرتبه اول می‌باشد. برای هر وزن مرتبـه اول رابطه (۳۲)، $\left(\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y\right)^{\tau}$ تابع درست‌نمـایی متفـاوت بایـد ارزیابی گردند. این امر نشان‌دهنده این است کـه ایـن مسـئله از نوع NP-hard می‌باشد. تعداد ارزیابی‌ها می‌تواند توسط آسـتانه-گذاری در خروجی سلول‌های مشاهده (عمل آشکارسازی) بسیار محدودتر شود ولی این امر به قیمت کاهش توانایی ردگیـری در SNR های پایین‌تر است. در عوض در ایـن مقالـه، بـرای آن‌کـه مزیت استفاده از اطلاعات نهفته در داده‌های خام حفـظ گـردد، با دروازه‌گذاری سـلول‌هـای همسـایه [۲۲و ۳۲] و بـه‌کـارگیری نمونه‌بردار Gibbs برای نمونه‌برداری از چگالی ترکیبـی ناشـی از گوسی‌های قطع‌شده، سعی در کاهش حجم محاسـبات خـواهیم داشت.

۲-۳. دروازه‌گذاری سلول‌های همسایه

تا بدین بخش از مقاله، هرکدام از $\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y$ سلول مشاهده می‌توانستند کاندیدی محتمل برای اشغال‌شدن توسط هدفی نوعی و موجود در ناحیه مشاهده، در زمان فعلی دریافت مشاهدات توسط سنسور باشند. با این حال سلول‌های بسیار دور از هدف دارای احتمال اندکی برای اشغال‌شدن توسط آن هدف در زمان جدید خواهند بود. همان‌طورکه می‌دانیم، دروازه‌بندی در الحاق داده کلاسیک ابزاری برای کاهش مشاهدات کاندید برای الحاق‌شدن به اهداف بود [۲۲]، ولی در اینجا دروازه‌بندی به‌منظور محدودکردن تعداد سلول‌هایی است که بسیار محتمل هستند که توسط هدف κام اشغال شوند. در واقع سلول‌هایی کاندید خواهند بود که احتمال اشغال‌شدن آن‌ها از آستانه پیش‌فرضی مانند Γ بیش‌تر باشد. اندیس آن‌ها مجموعه $\mathcal{G}_{\kappa,t}$ را تشکیل می‌دهد، به‌نحوی که:

$$\mathcal{G}_{\kappa,t} = \left\{ j \in \left\{1,\ldots,\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y\right\} : \Upsilon_{\kappa,j} > \Gamma \right\} \qquad (۳۴)$$

برای آن‌که در یابیم دروازه‌گذاری سلول‌های همسایه چقدر در کاهش حجم محاسبات موثر است، فرض می‌کنیم ۳ هدف در ناحیه مشاهده‌ای که به 30×30 سلول مشاهده تقسیم شده است، وجود دارند. تعداد جایگشت‌های ممکن قبل از دروازه‌گذاری برابر با $\left(30\times 30\right)^3$ است. حال فرض می‌کنیم که برای هر هدف ۱۰ سلول مشاهده محتمل اشغال‌شدن در زمان جدید وجود دارد. در نتیجه تعداد جایگشت‌های ممکن بعد از دروازه‌گذاری برابر با ۱۰۰۰ حالت خواهد بود. این یعنی ۷۲۹۰۰۰ برابر کاهش در بررسی جایگشت‌های ممکن!.

برای اعمال دروازه‌گذاری سلول‌های همسایه نیازمند اصلاح چگالی احتمال پیشین بردار موقعیت که در (۲۵) معرفی شده است، به‌صورت زیر می باشیم:

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}(\rho_\kappa^t \mid \rho_\kappa^{t-1}) \\ &\quad = \mathcal{C}_\Gamma \sum_{\varsigma_\kappa \in A_\Gamma^{t,\kappa}} \mathrm{p}(\rho_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}) \\ &\qquad \times \mathrm{p}(\rho_\kappa^t \mid \rho_\kappa^{t-1}, \rho_\kappa^t \in \mathcal{V}_{\varsigma_\kappa}) \end{aligned} \qquad (۳۵)$$

جایی‌که $\mathcal{C}_\Gamma$ ثابتی معین (برای واحدنمودن سطح زیر چگالی احتمال) است و $A_\Gamma^{t,\kappa}$ مجموعه اندیس‌های سلول‌های انتخاب‌شده در دروازه‌گذاری برای هدف κام در زمان t و با سطح آستانه Γ می‌باشد.

۲-۴. نمونه بردار Gibbs

وقتی که اهداف از یک‌دیگر دور هستند، توابع چگالی احتمال پیشین (انتقال حالت) اهداف از هم مستقل خواهند شد. این امر مسئله MTT را به τ مسئله ردگیری تک‌هدفه متفاوت، بدل می‌سازد. البته فرض دوربودن اهداف از یک‌دیگر همیشه واقع‌بینانه نیست. مخصوصا وقتی که اهداف از کنار یک‌دیگر رد شده یا مدت مدیدی در موازات هم حرکت می‌نمایند. به هر حال، این‌که بتوان در مسئله MTT، به‌روزرسانی چگالی احتمال پسین τ هدفه را با به‌روزرسانی جداگانه چگالی احتمال پسین تک‌تک اهداف و یکی پس از دیگری انجام داد، بدون آن‌که هیچ‌گونه فرض مستقل‌بودن بین آن‌ها (و مابین توابع درست‌نمایی τ هدف) را لحاظ کرده باشیم، ایده هیجان‌انگیزی به‌شمار می‌رود. رهیافت ما برای محقق‌نمودن این ایده، استفاده‌نمودن از روش Metropolis-Hastings تک‌مولفه‌ای[1] است که به نام نمونه‌بردار Gibbs معروف است و از خانواده روش‌های استنتاجی MCMC می‌باشد [۲۱]. اگرچه این روش پیچیدگی محاسباتی را از حالت NP-hard به حالت نمو چندجمله‌ای در نمی‌آورد اما به مصالحه قابل قبولی بین زمان محاسبات و دقت در تخمین تابع چگالی احتمال پسین چندهدفه دست می‌یابد. در الگوریتم MCMC، یک زنجیر مارکف غیرقابل‌تفکیک[2] و غیرمتناوب[3] توسط یک هسته[4] تحقق پیدا می‌نماید به‌نحوی که این زنجیر در نهایت به توزیع پسین مطلوب همگرا خواهد گشت و نکته مهم این است که این همگرایی مستقل از نمونه اولیه برای زنجیر و یا توزیع اهمیتی انتخابی، رخ می‌دهد.

شیوه MCMC به‌صورت ذاتی در استنتاج یکپارچه[5] مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۱]. ولی در استنتاج‌های متوالی نیز از MCMC استفاده شده است [۱۵و۳۳] . در بعضی از کاربردها از نمونه‌بردار Gibbs برای جوانگرایی[6] نمونه‌های فرسوده‌شده[7] بعد از انجام مرحله resampling استفاده می‌گردد [۳۴]. در این مقاله، سعی داریم تا از آن برای نمونه‌برداری از تابع چگالی اهمیتی بهینه OPS استفاده نماییم و بدین نحو حجم محاسبات را کاهش دهیم.

در الگوریتم (MH) Metropolis–Hastings، که یکی از معروف‌ترین الگوریتم‌های MCMC می‌باشد، هسته‌ای مانند k، تولید زنجیری مارکفی می‌نماید که این زنجیر مارکف در نهایت به چگالی بی‌تغییر[8] $\pi\left(\mathcal{S}^t\right) = \mathrm{p}(\mathcal{S}^t \mid \mathcal{O}^{1:t})$ همگرا می‌گردد (یعنی نمونه‌های تولیدی از این زنجیر همانند آن هستند که از چگالی بی‌تغییر مذکور نمونه‌برداری شده‌اند). وقوع این امر

[1] Single-Component Metropolis-Hastings
[2] Irreducible
[3] Aperiodic
[4] Kernel
[5] Batch
[6] Rejuvenate
[7] Degenerated
[8] Invariant

به‌شرطی خواهد بود که در زمان t و برای تکرار ηام داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &K\left(\mathcal{S}_{\eta}^{t} \mid \mathcal{S}_{\eta-1}^{t}\right) \\ &\quad = q(\mathcal{S}_{\eta}^{t} \mid \mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, \mathcal{O}^{1:t})\,\alpha\left(\mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, \mathcal{S}_{\eta}^{t}\right) \\ &\qquad + \delta\left[\mathcal{S}_{\eta}^{t} - \mathcal{S}_{\eta-1}^{t}\right] \\ &\qquad \times \left(1 - \int q(Y \mid \mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, \mathcal{O}^{1:t})\,\alpha\left(\mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, Y\right) dY\right) \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

که، $q(\mathcal{S}_{\eta}^{t} \mid \mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, \mathcal{O}^{1:t})$ چگالی اهمیتی انتخابی و $\alpha\left(\mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, \mathcal{S}_{\eta}^{t}\right)$ احتمال پذیرش است:

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, Y\right) \\ &\quad = \min\Bigg(1, \\ &\qquad \frac{p\left(Y \mid \mathcal{O}^{1:t}\right) q\left(\mathcal{S}_{\eta-1}^{t} \mid Y, \mathcal{O}^{1:t}\right)}{p\left(\mathcal{S}_{\eta-1}^{t} \mid \mathcal{O}^{1:t}\right) q\left(Y \mid \mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right)}\Bigg) \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

احتمال پذیرش (۳۷) به‌معنی این است که، در تکرار ηام، حرکت از حالت مشترک فعلی $\mathcal{S}_{\eta-1}^{t}$ به‌سمت حالت مشترک پیشنهاد شده Y با احتمال (۳۷) صورت خواهد پذیرفت (و خواهیم داشت $\mathcal{S}_{\eta}^{t} = Y$)، و در غیراین‌صورت هیچ انتقال حالتی در زنجیر رخ نخواهد داد و در نتیجه $\mathcal{S}_{\eta}^{t} = \mathcal{S}_{\eta-1}^{t}$.

چگالی اهمیتی $q(\mathcal{S}_{\eta}^{t} \mid \mathcal{S}_{\eta-1}^{t}, \mathcal{O}^{1:t})$ نقشی کلیدی در سرعت همگرایی (و نه خودهمگرایی) زنجیر مارکف ایفا می‌نماید.

البته راه بهتری نیز برای همگرانمودن زنجیر مارکف وجود دارد. به‌جای آن‌که برای کل حالت مشترک، در هر تکرار، یک پیشنهاد جابجایی ارائه دهیم، مولفه‌های آن می‌توانند در قدم‌های متوالی و پشت سر هم به‌روزرسانی گردند. این روش به‌نام single-component Metropolis-Hastings معروف است. برای شرح این روش فرض نمایید که حالت مشترک در زمان t به h مولفه به‌صورت $\mathcal{S}^{t} = \left\{\mathcal{S}_{.1}^{t}, \mathcal{S}_{.2}^{t}, \ldots, \mathcal{S}_{.h}^{t}\right\}$ تفکیک می‌گردد. اکنون، $\mathcal{S}_{.-\kappa}^{t} = \left\{\mathcal{S}_{.1}^{t}, \ldots, \mathcal{S}_{.\kappa-1}^{t}, \mathcal{S}_{.\kappa+1}^{t}, \ldots, \mathcal{S}_{.h}^{t}\right\}$ را حالتی تعریف می‌کنیم که تمامی مولفه‌های $\mathcal{S}^{t}$ به‌جز $\mathcal{S}_{.\kappa}^{t}$ در آن وجود دارند. می‌توان نشان داد که به‌روزرسانی متوالی مولفه‌ها به‌جای به‌روزرسانی یک‌باره کل حالت مشترک در همگرایی زنجیر مارکف خللی به‌وجود نخواهد آورد به‌شرطی که احتمال پذیرش مولفه $\mathcal{S}_{.\kappa}^{t}$ مطابق مرجع [۲۱] به‌صورت زیر تعریف گردد:

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{S}_{.\kappa}^{t}, Y_{.\kappa}\right) \\ &\quad = \min\Bigg(1, \frac{\pi\left(Y_{.\kappa} \mid \mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right)}{\pi\left(\mathcal{S}_{.\kappa}^{t} \mid \mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right)} \\ &\qquad \times \frac{q_{\kappa}\left(\mathcal{S}_{.\kappa}^{t} \mid Y_{.\kappa}, \mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right)}{q_{\kappa}\left(Y_{.\kappa} \mid \mathcal{S}_{.\kappa}^{t}, \mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right)}\Bigg) \end{aligned} \qquad (۳۸)$$

که، $Y_{.\kappa}$ پیشنهادی برای مولفه κام بوده و $\pi\left(\mathcal{S}_{.\kappa}^{t} \mid \mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right)$ توزیع شرطی کامل[1] برای $\mathcal{S}_{.\kappa}^{t}$ تحت $\pi(\cdot)$ نامیده می‌شود. تابع $q_{\kappa}\left(Y_{.\kappa} \mid \mathcal{S}_{.\kappa}^{t}, \mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right)$ چگالی پیشنهادی مولفه κام می‌باشد. در نتیجه، هر تکرار شامل h قدم متوالی خواهد بود. اگرچه شیوه single-component Metropolis-Hastings به‌تعداد h برابر نیازمند تعداد پیشنهاد بیش‌تری از شیوه Metropolis-Hastings نیازمند است، اما مزیت اصلی آن در جست‌وجو در فضاهایی با ابعاد به‌مراتب کم‌تر است. مزیتی که بی‌شک کارایی محاسباتی بسیار زیادی تولید می‌نماید.

احتمال پذیرش برای تمامی مولفه‌ها برابر با یک خواهد بود اگر چگالی پیشنهادی مولفه κام برابر با توزیع شرطی کامل آن مولفه باشد:

$$\begin{aligned} &q_{\kappa}\left(Y_{.\kappa} \mid \mathcal{S}_{.\kappa}^{t}, \mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right) \\ &\quad = \pi\left(Y_{.\kappa} \mid \mathcal{S}_{.-\kappa}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right) \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

این حالت خاص از الگوریتم single-component Metropolis-Hastings را نمونه‌بردار Gibbs می‌نامند.

در این مقاله تقریب چگالی پسین با ذراتی که توسط نمونه‌بردار Gibbs (که توزیع invariant آن در اصل همان چگالی اهمیتی بهینه مطرح‌شده در رابطه (۳۳) است) تولید می‌گردند، انجام می‌شود.

در MCMC رسم بر این است که برای اجتناب از اثرات شرایط اولیه بر همگرایی زنجیره مارکف، نمونه‌های تولیدشده در $\mathcal{N}_{bu}$ تکرار ابتدایی را، که دوره burn in می‌نامند، دور می‌ریزند. در تکرار ηام و برای مولفه κام در زمان t، باید از چگالی زیر نمونه‌برداری نماییم:

$$\begin{aligned} &\pi\left(\mathcal{S}_{\eta.\kappa}^{t} \mid \mathcal{S}_{\eta.1}^{t}, \ldots, \mathcal{S}_{\eta.\kappa-1}^{t}\right. \\ &\qquad \left., \mathcal{S}_{\eta-1.\kappa+1}^{t}, \ldots, \mathcal{S}_{\eta-1.h}^{t}, \mathcal{O}^{1:t}\right) \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

به‌علاوه، مجموعه $[\mathcal{S}_{\eta.1}^{t}, \ldots, \mathcal{S}_{\eta.\kappa-1}^{t}, \mathcal{S}_{\eta-1.\kappa+1}^{t}, \ldots, \mathcal{S}_{\eta-1.h}^{t}]$ را به نام $\mathcal{S}_{\eta.-\kappa}^{t}$ درنظر می‌گیریم. هر مولفه‌ای از $\mathcal{S}^{t}$ یک بردار حالت از هدفی مجزا است. به‌عبارت دیگر، h برابر با τ می‌باشد یا $\mathcal{S}_{\eta.\kappa}^{t} = \mathbf{s}_{\eta,\kappa}^{t}$.

با توجه به رابطه (۳۳)، چگالی مطرح‌شده در رابطه (۴۰) می‌تواند برای ذره iام به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} &\pi\left(\boldsymbol{\rho}_{\eta.\kappa}^{t} \mid \boldsymbol{\rho}_{\eta.-\kappa}^{i,t}, \mathcal{O}^{1:t}\right) \\ &\quad \propto \sum_{\varsigma_{\kappa}=1}^{\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y} \chi_{\mathcal{V}_{\varsigma_{\kappa}}}\left(\boldsymbol{\kappa}^{t}\right) \\ &\quad \times \prod_{m=1}^{2} \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\rho}_{\kappa}^{m,t}; \boldsymbol{\rho}_{\kappa}^{i,m,t-1} + Tv^{i,m}, \rho T^{3}/3\right) \\ &\quad \times p(\mathcal{O}^{t} \mid \varsigma_{\eta,1}^{i,t}, \ldots, \varsigma_{\kappa}, \ldots, \varsigma_{\eta-1,\tau}^{i,t}) \end{aligned} \qquad (۴۱)$$

[1] Full Conditional Distribution

که، $\varsigma^{i,t}_{\eta,\kappa}$ در رابطه (۴۱) برابر با اندیس سلولی است که هدف با بردار حالت $\mathbf{s}^{i,t}_{\eta,\kappa}$ در آن واقع گردیده است. بعد از نمونه‌برداری از (۴۱) و به‌روزرسانی مولفه‌های سرعت با توجه به روابط (۲۴-۲۲)، الگوریتم به سراغ مولفه بعدی رفته و توزیع چگالی شرطی کامل برای هدف $(\kappa+1)$ام و با بردار حالت $\boldsymbol{s}^{t}_{\eta,(\kappa+1)}$ مورد توجه قرار می‌گیرد. یک تکرار از τ قدم تشکیل شده است که در هر قدم تابع چگالی احتمال رابطه (۴۱) ترکیبی از تنها $\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y$ چگالی قطع شده (ناشی از جایگشت‌های موجود برای نحوه اشغال‌شدن سلول‌های مشاهده توسط هدف) به‌جای $(\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y)^{\tau}$ چگالی قطع‌شده در رابطه (۳۳) می‌باشد. در این روش، در اصل ذرات فیلتر ذره توسط نمونه‌بردار Gibbs تولید می‌گردند، بنابراین آن را GPF[1] می‌نامیم. وزن‌های مرتبه اول الگوریتم GPF از روی رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{O}^t \mid \boldsymbol{\rho}^{i,t-1}) \\
&=\sum_{\kappa=1}^{\tau}\Bigg(\Big(\prod_{m=1}^{\kappa-1}\Upsilon_{m,\varsigma^{i,t}_{\eta,m}}\Big)\cdot\Big(\prod_{m=\kappa+1}^{\tau}\Upsilon_{m,\varsigma^{i,t}_{\eta-1,m}}\Big) \\
&\times\sum_{\varsigma_\kappa\in A^{i,t,\kappa}_{\eta}}\Big(\mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \varsigma^{i,t}_{\eta,1},\ldots,\varsigma_\kappa,\ldots,\varsigma^{i,t}_{\eta-1,\tau})\cdot\Upsilon_{\kappa,\varsigma_\kappa}\Big)\Bigg)
\end{aligned}
\qquad (۴۲)
$$

نکته مهم این است که مولفه درست‌نمایی $\mathrm{p}(\mathcal{O}^t \mid \varsigma^{i,t}_{\eta,1},\ldots,\varsigma_\kappa,\ldots,\varsigma^{i,t}_{\eta-1,\tau})$ در رابطه (۴۲) برای قدم $\kappa+1$ام، با جایگذاری $\varsigma^{i,t}_{\eta,\kappa}$ (که همان اندیس سلولی است که $\boldsymbol{\rho}^{i,t}_{\eta,\kappa}$ در فضای آن قرار دارد) به‌جای ς_κ و قراردادن $\varsigma_{\kappa+1}$ به‌جای $\varsigma^{i,t}_{\eta-1,\kappa+1}$، به‌روز می‌گردد و به‌عبارت دیگر برخلاف OPS که وزن‌های مرتبه اول در زمان t از قبل معلوم بودند، برای GPF وزن‌های مرتبه اول در هر قدم و هر تکرار باید عوض شوند. جدول (۲) یک چرخه کامل از GPF را نشان می‌دهد.

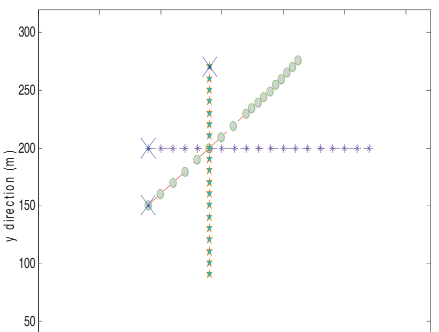
برای هر قدم، توزیع شرطی کامل رابطه (۴۱)، به‌شرط آن‌که دروازه‌گذاری سلول‌های همسایه اجرا نشده باشد، یک چگالی ترکیبی با $\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y$ مولفه تابع چگالی احتمال است. جدای از آن، هر تکرار خود دارای τ قدم خواهد بود و برای یک چگالی اهمیتی $\mathcal{N}_{it}$ تکرار قرار می‌دهیم (یعنی فرض می‌کنیم بعد از $\mathcal{N}_{it}$ تکرار، زنجیر مارکف همگرا شده است.) از طرفی، تعداد ذرات فیلتر ذره برابر با $\mathcal{N}_p$ می‌باشد. با این مقادیر، الگوریتم GPF باید به تعداد $\mathcal{N}_p \cdot \mathcal{N}_{it} \cdot \tau \cdot \mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y$ مولفه تابع چگالی احتمال قطع‌شده را ارزیابی نماید. این مقدار برای نمونه‌برداری مستقیم از تابع چگالی اهمیتی بهینه (۳۳) برابر با $\mathcal{N}_p \cdot (\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y)^{\tau}$ مولفه می‌باشد.

[1] Gibbs Particle Filter

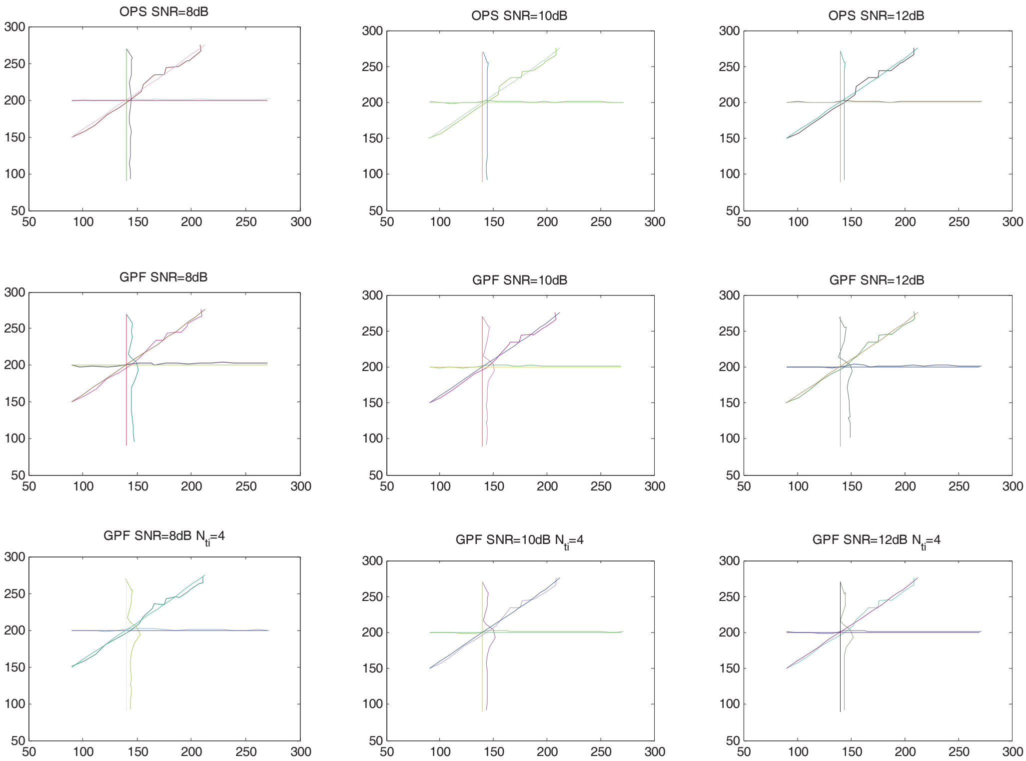
جدول ۲. چرخه کاملی از الگوریتم GPF

برای هر ذره $(i=1:\mathcal{N}_p)$:
قرار بدهید: $\boldsymbol{\rho}^{i,0,t} = \boldsymbol{\rho}^{i,\mathcal{N}_{it},t-1} + T\mathrm{v}^{i,\mathcal{N}_{it}}$.
برای هر تکرار $(\eta=1:\mathcal{N}_{it}-1)$:
برای هر هدف $(\kappa=1:\tau)$:
از روی (۴۱)، $\boldsymbol{\rho}^{i,t}_{\eta,\kappa}$ را تولید نمایید.
تابع درست‌نمایی را بروز رسانی نمایید.
پایان حلقه سوم
پایان حلقه دوم
پایان حلقه اول
در تکرار آخر $(\eta=\mathcal{N}_{it})$:
برای هر ذره $(i=1:\mathcal{N}_p)$:
برای هر هدف $(\kappa=1:\tau)$:
از روی (۴۱)، $\boldsymbol{\rho}^{i,t}_{\eta,\kappa}$ را تولید نمایید.
مطابق با (۲۲) الی (۲۴)، مقادیر $\widehat{v}_x^{i,t+1/t}$ و $\widehat{v}_y^{i,t+1/t}$ را به‌روزرسانی نمایید.
تابع درست‌نمایی را به‌روزرسانی نمایید.
پایان حلقه دوم
وزن‌های مرتبه اول را مطابق رابطه (۴۲) محاسبه نمایید.
پایان حلقه اول
بر مبنای وزن‌های مرتبه اول، $\mathcal{N}_p$ ذره را انتخاب می‌نماییم.

نکته اینجاست که الگوریتم GPF تنها زمانی به‌عنوان کاهش‌دهنده حجم محاسبات عمل خواهد کرد که مقدار $\mathcal{N}_p \cdot (\mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y)^{\tau}$ از $\mathcal{N}_p \cdot \mathcal{N}_{it} \cdot \tau \cdot \mathcal{L}_x \times \mathcal{L}_y$ کم‌تر باشد. در جدول (۲) چرخه‌ای کامل از نکته اینجاست که الگوریتم GPF تنها زمانی به‌عنوان کاهش‌دهنده حجم محاسبات عمل خواهد کرد که مقدار از کم‌تر باشد. در جدول (۲) چرخه‌ای کامل از الگوریتم GPF نشان داده شده است.



شکل ۲. مسیر اهداف شبیه‌سازی‌شده برای سناریوی تحت بررسی



شکل ۳. متوسط مسیرهای تخمین‌زده‌شده به‌ازای مقادیر SNR برابر با ۸، ۱۰ و ۱۲ dB : (سه نمودار بالا) نتایج الگوریتم OSP با $\mathcal{N}_p = 50$، (سه نمودار وسط) نتایج الگوریتم GPF با $\mathcal{N}_p = 50$ و $\mathcal{N}_{it} = 1$، (سه نمودار پایین) نتایج الگوریتم GPF با $\mathcal{N}_p = 50$ و $\mathcal{N}_{it} = 4$.

۳. نتایج شبیه‌سازی‌ها

سناریوی حرکتی اهداف برای ارزیابی الگوریتم‌های پیشنهادشده در شکل (۲) نمایش داده شده است. در این سناریو، سه هدف مختلف درحالی‌که از هم دورند شروع به حرکت نموده، به هم نزدیک شده و سپس دوباره از هم دور می‌گردند. نقطه شروع حرکت هر هدف با ضربدر نمایش داده شده است. هدفی که دارای مسیر مایل در شکل (۲) است دارای سرعت ثابت نمی‌باشد و مانوری با شتاب منفی (سرعتی کم‌شونده) در طول مسیر حرکتی خود دارد. فاصله زمانی دریافت دو مشاهده متوالی برابر با T =1s است.

اهداف در محیطی با ابعاد $320m \times 320m$ برای مجموعاً ۱۹ ثانیه در حال حرکت هستند. ناحیه مشاهده بـه سـلول‌هـای $10.7m \times 10.7m$ تقسیم شده است و این یعنی ۳۰ سـلول در هر جهت. همچنین فرض بر ان است کـه فیلتـر ردگیـر، مقـدار دقیق دامنه بازگشتی A را در رابطه (۸)، می‌داند.

به‌علاوه، σ_v^2 همواره برابر با ۱ قرار داده می‌شود تا مقایسه مابین SNR های مختلف به‌صورت نرمالیزه‌شده و تنها به تغییرات توان سیگنال محدود گردد. اندازه واریانس نرمالیزه‌شده از انحرافات سرعت یعنی ρ در رابطه (۲) برابر با اندازه توان دوم از نصف قطر سلول مشاهده قرار داده می‌شود زیرا مشاهده شد که به‌ازای این مقدار، اهداف در دو زمان متوالی، بیش از ابعاد دو سلول مشاهده مجاور هم را طی نمی‌کند. دروازه‌گذاری سلول‌های همسایه برای هر دو روش OPS و GPF با مقدار آستانه 0.02 به‌کار می‌رود. این مقدار به این نحو به‌دست آمده است که برای بقیه پارامترهای سناریو و بالخصوص با ρ داده شده، حدود ۱۰ الی ۱۵ سلول مشاهده کاندید برای هر هدف در هر زمان به‌دست می‌دهد. برای ارزیابی عملکرد الگوریتم‌ها، دو معیار را به‌کار می‌گیریم. اولین معیار در [۱۹] و به نام قابلیت اطمینان[1] معرفی شده است و تعداد میانگین اهدافی را که مسیر تخمین‌زده‌شده آن‌ها از سطح آستانه‌ای معین به نام thr (در این مقاله thr را ۱/۵ برابر قطر سلول مشاهده انتخاب نموده‌ایم) از مسیر واقعی آن‌ها دورتر نیست را محاسبه می‌نماید. قابلیت اطمینان ردگیری بر روی تمامی زمان‌های شبیه‌سازی T، تعداد تحقق‌های مستقل m و تعداد اهداف واقعی τ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{T \cdot \tau} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\kappa=1}^{\tau} \chi_{[0,\mathrm{thr}]} \left(\left\| \rho_\kappa^t - \hat{\rho}_\kappa^t (j) \right\|_2 \right) \qquad (۴۳)$$

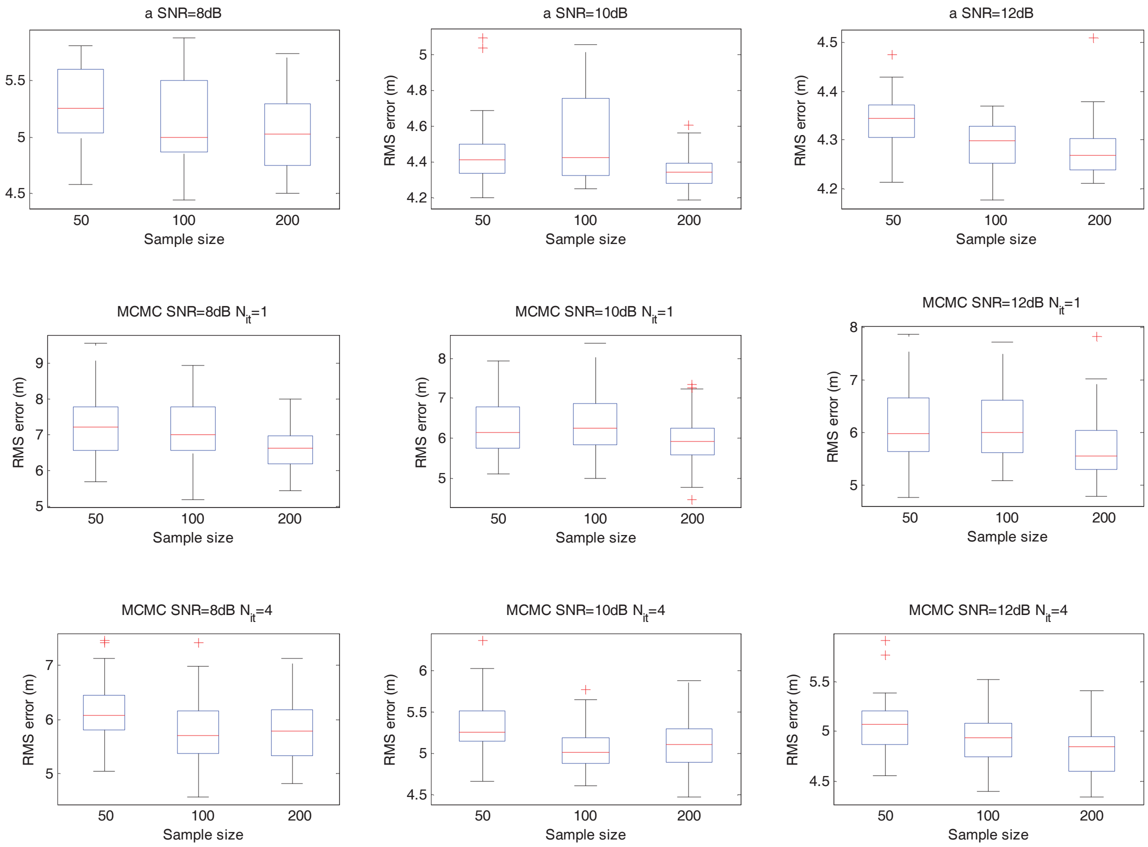
که بـردار موقعیـت ρ_κ^t هـدف κام در زمـان t و $\hat{\rho}_\kappa^t(j)$ تخمین الگوریتم موردنظر از ρ_κ^t در شماره تحقق j ام می‌باشد.

شکل (۳) متوسط مسیرهای تخمـین‌زده‌شـده (بـر روی ۵۰

[1] Reliability

تحقــق مســتقل از هــم) بــرای الگــوریتم‌هــای GPF (بــرای $\mathcal{N}_{it}=1,4$) و OPS را نشان می‌دهد. تعداد ذرات برابر بـا ۵۰ عدد و مقادیر SNR برابر با ۸، ۱۰ و ۱۲ dB است. از روی شـکل (۳) مشخص است که متوسط مسیرهای تخمیـن‌زده‌شـده بـرای $\mathcal{N}_{it}=4$ نسبت به $\mathcal{N}_{it}=1$ دارای بهبود است.

بر مبنای تمامی نمودارهای شکل (۳)، مسـتقل از الگـوریتم OPS و یا GPF، با افزایش SNR تخمین مسیر حرکتـی اهـداف بهتر می‌شود. الگوریتم OPS دقیق‌تر ردگیری مـی‌کنـد امـا ایـن تفاوت در عملکردها با افزایش مقـدار SNR کـاهش مـی‌یابـد. از آنجایی‌که الگوریتم GPF به‌ازای تکرارهـای محـدود $\mathcal{N}_{it}=1$ و $\mathcal{N}_{it}=4$، شبیه به انجام سه‌هدفه بـا سـه ردگیـری تـک‌هدفـه است، در زمان‌هایی که اهداف از کنـار هـم عبـور مـی‌کننـد بـا دشواری مواجه می‌گردد و دقت ردگیری کاهش می‌یابد. منتهـی بهبود عملکرد در تخمین مسیر حرکتـی اهـداف (بـه‌طـور مثـال هدف با مسیر افقی) برای الگوریتم GPF با $\mathcal{N}_{it}=4$ نسبت بـه الگوریتم GPF با $\mathcal{N}_{it}=1$ مشخص است.



شکل ۴. نمودار Box-and-whiskers، از RMSE موقعیت به‌ازای مقادیر SNR برابر با ۸، ۱۰ و ۱۲ dB ، که بـرای thr=22.7m محاسـبه شـده اسـت. (سه نمودار بالا) نتایج الگوریتم OPS با $\mathcal{N}_p=50$، (سه نمودار وسط) نتایج الگوریتم GPF با $\mathcal{N}_p=50$ و $\mathcal{N}_{it}=1$، (سـه نمـودار پـایین) نتـایج الگوریتم GPF با $\mathcal{N}_p=50$ و $\mathcal{N}_{it}=4$.

معیـار بعـدی بـرای سـنجش عملکـرد دو الگـوریتم، جـذر میانگین مجذور خطای RMSE[1] موقعیـت اسـت کـه تنهـا بـرای اهدافی که سیستم توانسـته اسـت آن‌هـا را ردگیـری کنـد و در تحقق j ام به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathrm{RMS}(j)=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{\kappa=1}^{\tau}\left\|\rho_{\kappa}^{t}-\hat{\rho}_{\kappa}^{t}(j)\right\|_{2}\chi_{[0,\mathrm{thr}]}\left(\left\|\rho_{\kappa}^{t}-\hat{\rho}_{\kappa}^{t}(j)\right\|_{2}\right)}{\tau.T}} \qquad (۴۴)$$

که، $\tau=3$ برابر تعداد اهداف سناریو و $T=19$ برابر با زمان کلی انجام شبیه‌سازی و $\chi_{[a,b]}(c)$ برابر یک است اگر c بین a و b واقع شده باشد و درغیراین‌صورت صفر است. منظور از "تنها برای اهدافی که سیستم توانسته است آن‌ها را ردگیری کند" این است که تنها اهدافی لحاظ می‌گردند که مسیر تخمین‌زده‌شده آن‌ها از مسیر واقعی فاصله‌ای بیش از thr نداشته باشد.

شکل (۴) RMSE موقعیت را به‌وسیله نمودارهای box-and-whiskers نشان می‌دهد. این نمودارها برای دو الگوریتم OPSGPF و برای مقادیر SNR برابر با ۸، ۱۰ و ۱۲ dB رسم شده‌اند.

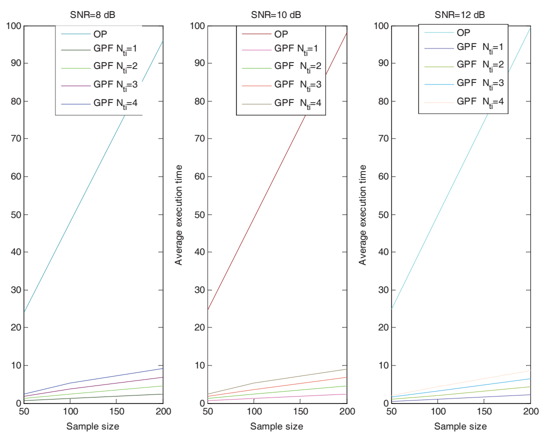
[1] Root Mean Square Error (RMSE)

آنچه که از نتایج این نمودارها بر می‌آید این است که با افزایش مقدار SNR، مقدار RMSE موقعیت برای هر دو الگوریتم کاهش می‌یابد.

به‌علاوه، هر دو روش GPF و OPS تخمین‌گرهایی سازگار[1] هستند زیرا با افزایش تعداد نمونه‌ها، میانگین و واریانس توزیع مقادیر RMSE کاهش می‌یابد. نکته آخر در مورد این نمودارها این است که با افزایش مقدار SNR تفاوت مابین الگوریتم‌های OPS و GPF در تعداد نمونه ثابت، کم می‌گردد.

اما تا بدین‌جا، نشان دادیم که نتایج الگوریتم چگالی اهمیتی بهینه بهتر از نتایج الگوریتم GPF بوده است، که چنین انتظاری از یک الگوریتم بهینه نیز می‌رود. اما هدف از معرفی GPF، به‌دست دادن جایگزینی برای سریع و آسان‌کردن نمونه‌برداری از OPS ولو با اندکی افت دقت بوده است. در ادامه به مقایسه حجم محاسباتی این دو الگوریتم می‌پردازیم تا مشاهده شود آیا دقت اندک ازدست‌رفته به‌ازای کاهش قابل ملاحظه‌ای از حجم محاسبات پدید می‌آید و یا نه؟ اگر چنین باشد، استفاده از الگوریتم GPF به‌عنوان جایگزینی برای OPS توجیه‌پذیر خواهد بود.

شکل (۵) نمایانگر زمان محاسبه (متوسط گرفته‌شده بر روی ۵۰ تحقق مستقل) یک چرخه از الگوریتم‌های OPS و GPF (با $\mathcal{N}_{it}=1,\dots,4$) می‌باشد. مقادیر SNR برابر با ۸، ۱۰ و ۱۲ dB و تعداد ذرات برابر با ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰، و ۲۰۰ نمونه انتخاب شده‌اند. پردازنده به‌کاررفته Core(TM) i3 3.06 GHz می‌باشد.



شکل ۵. متوسط زمان محاسبه یک چرخه از الگوریتم‌های OPS و GPF (با) در مقادیر SNR گوناگون و تعداد ذرات ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰، و ۲۰۰ تایی.

[1] Consistent

همچنان که شکل (۵) نشان می‌دهد متوسط زمان‌های محاسبه‌شده مستقل از مقادیر SNR بوده و با افزایش تعداد ذرات، بیش‌تر می‌گردد. الگوریتم GPF با $\mathcal{N}_{it}=4$ برای تعداد نمونه برابر با ۲۰۰، به‌طور متوسط ۸۷ ثانیه سریع‌تر از OPS کار می‌کند و این یعنی ۱۰/۷برابر سریع‌تر از الگوریتم OPS. این در حالی است که الگوریتم GPF با $\mathcal{N}_{it}=1$ برای تعداد نمونه برابر با ۲۰۰، به‌طور متوسط ۹۳/۵ ثانیه سریع‌تر از OPS کار می‌کند و این یعنی ۳۸/۴ برابر سریع‌تر از الگوریتم OPS.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به ردگیری چندهدفه با داده‌های آشکارنشده توسط فیلتر ذره‌ای پرداختیم. نشان دادیم که تابع چگالی اهمیتی بهینه برای فیلتر ذره‌ای درصورتی‌که داده‌ها ناشی از شدت سیگنال‌های دریافتی از ناحیه مشاهده‌ای مشبک‌شده باشند و این داده‌ها به‌صورت خام مورد ارزیابی قرار گرفته شده باشند، به چه صورت به‌دست می‌آید. سپس نشان دادیم که نمونه‌برداری از این تابع چگالی اهمیتی چقدر سنگین و پرهزینه است و با استفاده از نمونه‌بردار Gibbs، فیلتر ذره‌ای مبتنی بر MCMC طراحی نمودیم که به‌ازای افت عملکرد اندکی نسبت به تابع چگالی اهمیتی بهینه، حجم محاسباتی را بسیار کاهش می‌داد. به‌طور نمونه، برای فیلتر ذره‌ای با ۲۰۰ ذره، الگوریتم MCMC ارائه‌شده توسط ما با تعداد تکرارهای ۴تایی و تکی به‌ترتیب برابر با ۱۰/۷و ۳۸/۴ مرتبه سریع‌تر از الگوریتم OPS کار می‌کردند و این در حالی بود که خطای RMS موقعیت در این دو روش حداکثر سه الی چهار متر از خطای RMS موقعیت در روش OPS بیش‌تر بود. این امر ایده استفاده از الگوریتم‌های خانواده MCMC را برای کاهش حجم محاسبات در دیگر کاربردهای فیلتر ذره که هزینه نمونه‌برداری بالایی در ازای دقت به‌دست آمده دارند، همانند مسئله الحاق مشاهده به مشاهده در مسئله ردگیری غیرفعال توسط سیگنال‌های DVBT، تشویق می‌نماید.

۵. مراجع

[1] Doucet, A.; De Fiestas, N.; Gordon, N.; Eds, J. “Sequential Monte Carlo Methods in Practice”; New York: Springer-Verlag, 2001.

[2] Orton, M.; Fitzgerald, W. “A Bayesian Approach to Tracking Multiple Targets Using Sensor Arrays and Particle Filters”; IEEE Transactions on Signal Processing 2005, 50, 216-223.

[3] Hue, C.; Le Cadre, J.-P.; Perez, P. “Sequential Monte Carlo Methods for Multiple Target Tracking and Data Fusion”; IEEE Transactions on Signal Processing 2002, 50, 309-325.

[4] Rezatofighi, S. H.; Gould, S.; Ba Truong, Vo.; Ba-Ngu, Vo.; Mele, K.; Hartley, R. “Multi-Target Tracking With

[19] Moreland, M. R.; Kreucher, C. M.; Kastella, K. "A Bayesian Approach to Multiple Target Detection and Tracking"; Signal Processing, IEEE Transactions on; 2007, 55 (5), 1589-1604.

[20] Doucet, A.; Goodwill, S.; Angrier, C. "On sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering"; Stat. Comput. 2000, 10, 197–208.

[21] Gilks, W. R.; Richardson, S.; Spiegelhalter, D. J. "Markov Chain Monte Carlo in Practice"; Chapman and Hall. 1996.

[22] Blackman, S.; Popoli, R. "Design and Analysis of Modern Tracking Systems"; Artech House. 1999.

[23] Danaee, M. R.; Behnia, F. "Extension of Particle Filters for Time-Varying Target Presence Through Split and Raw Measurements"; . IEE Proceeding Radar, Sonar & Navigation 2013, 7, 517-526.

[24] Genovesio, A.; Olivo-Marin, J.-C. "Split and Merge Data Association Filter for Dense Multi-Target Tracking"; Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition 2004, 4, 677- 680.

[25] Koch, W.; Van Keuk, G. "Multiple Hypothesis Track Maintenance with Possibly Unresolved Measurements"; IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 1997, 33, 883-892.

[26] Chang, Kuo-Chu.; Bar-Shalom, Y. "Joint Probabilistic Data Association for Multitarget Tracking with Possibly Unresolved Measurements and Maneuvers"; IEEE Transactions on Automatic Control 1984, 29, 585- 594.

[27] Rotten, M. G.; Gordon, N. J.; Maskell, S. "Recursive Track-Before-Detect with Target Amplitude Fluctuations"; IEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation 2005, 152, 345- 352.

[28] Pitt, M. K.; Shepard, N. "Filtering via Simulation: Auxiliary Particle Filters"; Technical Report, Nuffield College, Oxford University. September 1997.

[29] Särkkä, S.; Vehtari, A.; Lampinen, J. "Rao-Blackwellized Oarticle Filter for Multiple Target Tracking"; Information Fusion. 2007, 8, 2-15.

[30] Anderson, B. D. O.; Moore, J. B. "Optimal Filtering"; Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 1979.

[31] Doucet, A.; Vo, B.-N.; Angrier, C.; Davy, M. "Particle Filtering for Multi-Target Tracking and Sensor Management"; Information Fusion, Proceedings of the Fifth International Conference on. 2002, 1, 474- 481.

[32] Bar-Shalom Y. "Tracking and Data Association"; San Diego, CA, USA: Academic Press Professional, Inc. 1987.

[33] Khan, Zia; Balch, T.; Dellaert, F. "MCMC-Based Particle Filtering for Tracking a Variable Number of Interacting Targets"; , IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 2005, 27, 1805-1819.

[34] Gilks, W. R.; Berzuini, C. "Following a Moving Target—Monte Carlo Inference for Dynamic Bayesian Models"; Journal of the Royal Statistical Society, 2001, 63, 127–146.

Time-Varying Clutter Rate and Detection Profile: Application to Time-Lapse Cell Microscopy Sequences"; IEEE Transactions on Medical Imaging 2015, 34, 1336-1348.

[5] Kreucher, C.; Kastella, K.; Hero, A. O. "Multitarget Tracking Using the Joint Multitarget Probability Density"; IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 2005, 41, 1396- 1414.

[6] Vo, B. T.; Vo, B. N. "Labeled Random Finite Sets and Multi-Object Conjugate Priors"; IEEE Transactions on Signal Processing 2013, 61, 3460-3475.

[7] Vo, B. N.; Singh, S.; Doucet, A. "Sequential Monte Carlo Methods for Multi-Target Filtering with Random Finite Sets"; IEEE Transactions Aerospace & Electronic Systems 2005, 41, 1224–1245.

[8] Whitley, N.; Singh, S.; Goodwill, S. "Auxiliary Particle Implementation of Probability Hypothesis Density Filter"; IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 2010, 46, 1437–1454.

[9] Rustic, B.; Clark, D.; Vo, B.-N. "Improved SMC Implementation of the PHD Filter"; in Proc. 13th Annual Conf. Information Fusion, Edinburgh, UK, 2010.

[10] Vermaak, J.; Goodwill, S. J.; Pérez, P. "Monte Carlo Filtering for Multi Target Tracking and Data Association"; IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 2005, 41, 309-332.

[11] Hue, C.; Le Cadre, J.-P.; Pérez, P. "Tracking Multiple Objects with Particle Filtering"; IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 2002, 38, 791- 812.

[12] Khan, Z.; Bach, T.; Dellaert, F. "Multitarget Tracking with Split and Merged Measurements"; IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2005, 1, 605- 610.

[13] Jianru, Xue; Nanning, Zhang; Xiaopin, Zhang. "An Integrated Monte Carlo Data Association Framework for Multi-Object Tracking"; 18th International Conference on Pattern Recognition 2006, 1, 703-706.

[14] Hwang, R. R.; Huber, M. "A Particle Filter Approach for Multi-Target Tracking"; IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems 2007, 2753-2760.

[15] Scepter, F.; Pang Sze Kim; Carmi, A.; Goodwill, S. "On MCMC-Based Particle Methods for Bayesian Filtering: Application to Multitarget Tracking"; 3rd IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), 2009, 360-363.

[16] Cox, I. J. "A Review of Statistical Data Association Techniques for Motion Correspondence"; International Journal of Computer Vision 1993, 10, 53–66.

[17] Gauvrit, H.; Cadre, J.P.; Jauffret C. "A formulation of Multitarget Tracking As an Incomplete Data Problem"; IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 1997, 33, 1242-1257.

[18] Boers, Y.; Dresden, J. N. "Multitarget Particle Filter Track Before Detect Application"; Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings. 2004, 151 (6), 351- 357.