مجله علمی پژوهشی «رادار»
سال ششم، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۷؛ ص ۴۴- ۳۱

خودکالیبراسیون شکل آرایه با استفاده از روش‌های مبتنی‌بر برازش زیرفضا

فرزاد اسکندری[۱]، محمود کریمی[۲*]
۱- کارشناسی ارشد، ۲- استاد، دانشگاه شیراز
(دریافت: ۹۷/۰۶/۲۴؛ پذیرش: ۹۸/۰۱/۲۷)

چکیده

جهت‌یابی منابع سیگنال و پرتوسازی از مهمترین مسائل در پردازش آرایه‌ای هستند که برای آنها روش‌های متعددی ارائه شده است. عملکرد همه این روش‌ها وابسته به مهیا بودن اطلاعاتی درباره پاسخ آرایه است. از جمله این اطلاعات، مکان واقعی عناصر آرایه نسبت به یکدیگر و بهره و فاز هر عنصر و ضرایب تزویج متقابل میان عناصر آرایه است. در عمل آنچه که در اختیار ما قرار دارد تنها مقادیر نامی این متغیرهاست که معمولاً با مقادیر واقعی تفاوت دارد. بسته به اینکه پاسخ واقعی آرایه تا چه حد از مقدار نامی خود متفاوت باشد، کیفیت جهت‌یابی و پرتوسازی می‌تواند به‌صورت قابل توجهی تنزل یابد. برای کاهش این تنزل کیفیت، لازم است که متغیرهای مجهول، تخمین زده شوند. برخی از انواع روش‌های ارائه‌شده برای تخمین این متغیرها را روش‌های خودکالیبراسیون می‌نامند. در این مقاله عملکرد چهار روش خودکالیبراسیون برای تخمین شکل آرایه با استفاده از شبیه‌سازی بررسی و با یکدیگر مقایسه می‌شود. البته پیش از بررسی عملکرد این چهار روش، سعی شده است که با دست‌کاری در ساختار این روش‌ها بتوان در عملکرد آن‌ها بهبود ایجاد کرد. در این مقاله همچنین یک روش خودکالیبراسیون بر پایه جست و جوی گرادیانی ارائه‌شده و عملکرد آن با استفاده از شبیه‌سازی‌های متنوع بررسی و با روش‌های دیگر مقایسه شده است.

واژگان کلیدی

جهت‌یابی آرایه‌ای، خودکالیبراسیون شکل آرایه، پاسخ آرایه، برازش زیرفضا

۱- مقدمه

پردازش سیگنال آرایه‌ای به بررسی مسأله استخراج اطلاعات از مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های به‌دست‌آمده از حسگرهای توزیع‌شده در فضا می‌پردازد. در کاربردهای راداری مقصود ما تعیین متغیرهای خاصی است که وابسته به هر سیگنال بازگشتی می‌باشند. این متغیرها ممکن است شامل جهت، ارتفاع، شیفت داپلر و غیره باشند. با استفاده از آرایه‌ای از آنتن‌های گیرنده دقت تخمین این متغیرها می‌تواند بسیار بهبود پیدا کند.

مسأله عمده‌ای که ما با آن رو به رو هستیم، مکان‌یابی منابعی است که انرژی ساطع‌شده از آنها توسط آرایه‌ای از حسگرها دریافت شده است. برای حل این مسأله تاکنون روش‌های متنوعی ارائه شده که از جمله آنها روش‌های پرتوسازی بارتلِت[۱] و کاپُن[۲] و روش‌های میوزیک[۳]، اسپریت[۴] و بیشترین درست‌نمایی[۵] هستند. لازم به ذکر است که بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش‌های پرتوسازی، میوزیک، اسپریت، بیشترین درست‌نمایی و برخی الگوریتم‌های دیگر همگی حالت‌های خاصی از یک فرآیند کلی برازش زیرفضا هستند [۴-۱].

یکپارچه کردن این روش‌ها در یک چارچوب مشترک، روابط هندسی بین این روش‌ها را روشن ساخته و مقایسه بین آنها را تسهیل می‌کند. همه روش‌های جهت‌یابی ذکرشده در بالا وابسته به مهیا بودن اطلاعاتی درباره پاسخ آرایه هستند.

پاسخ آرایه ممکن است یا با استفاده از اندازه‌گیری‌های تجربی (فرآیندی که به آن کالیبراسیون می‌گویند) یا با در نظر گرفتن فرضیاتی خاص درباره حسگرهای آرایه و هندسه آنها (مثل این‌که

* نویسنده مسئول: karimi@shirazu.ac.ir

[1] Bartlett
[2] Capon
[3] MUSIC (Multiple Signal Classification)
[4] ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)
[5] Maximum Likelihood (ML)

حسگرها همانند باشند و در مکان‌های معینی قرار گرفته باشند) تعیین شود.

متأسفانه یک آرایه نمی‌تواند به‌صورت کامل کالیبره شود یعنی پاسخ آرایه با استفاده از اندازه‌گیری‌های تجربی به‌صورت دقیق تعیین شود و نیز فرضیات ایده‌آل و دلخواه ما درباره هندسه آرایه و انتشار امواج در عمل هرگز برقرار نمی‌شوند. همچنین به‌خاطر تغییرات در مکان المان‌ها، دما و محیط اطراف، پاسخ آرایه ممکن است به مقدار قابل توجهی نسبت به آخرین باری که کالیبره شده تغییر کرده باشد. بسته به اینکه پاسخ واقعی آرایه تا چه حد از مقدار نامی خود متفاوت باشد، کیفیت پرتوسازی و جهت‌یابی ممکن است به‌صورت قابل توجهی تنزل پیدا کند.

برای در نظر گرفتن اثرات ذکرشده در بالا، معمولاً یک مدلِ تاحدی کلی برای پاسخ آرایه پیشنهاد می‌شود. در این مدل، پاسخ آرایه فقط بر حسب جهات سیگنال‌های دریافتی از منابع مدل نمی‌شود بلکه یک بردار از انحرافات یا متغیرهای مزاحم که انحراف پاسخ از مقدار نامی را توصیف می‌کنند نیز در این مدل‌سازی در نظر گرفته می‌شود. این متغیرها می‌توانند به‌عنوان مثال: جابجایی المان‌ها از موقعیت‌های نامی خود، آفست بهره و فاز کالیبره‌نشده گیرنده و ضرایب تزویج متقابل بین حسگرها باشند.

تمام تأثیراتی که گفته شد، لزوم وجود کالیبراسیون آرایه‌ای یا روش‌های پردازش آرایه‌ای که نسبت به خطای بردار هدایت مقاوم هستند و یا هر دو را اثبات می‌کند. با یک چنین مدلی، یک راه‌کار بدیهی این خواهد بود که متغیرهای مزاحم همزمان با متغیرهای سیگنال تخمین زده شوند. چنین روش‌هایی را روش های کالیبراسیون خودکار[۱] یا خود کالیبراسیون[۲] می‌نامند.

بنابر آنچه گفته شد می‌توان مسأله کالیبراسیون آرایه‌ای را به‌طور کلی یک مسأله تخمین متغیر در نظر گرفت. متغیرهای تحت تخمین در کاربردهای آرایه‌ای به‌طور کلی به دو دسته متغیرهای سیگنال و متغیرهای آرایه تقسیم‌بندی می‌شوند. از میان متغیرهای سیگنال، ما به‌طور ویژه به دنبال تخمین جهت منابع تشعشع‌کننده و نیز تخمین خود سیگنال منابع هستیم.

این نوشته به بررسی مسئله کالیبراسیون خودکار شکل آرایه با استفاده از منابع میدان دور باریک‌باند که در مکان‌های نامعلوم قرار دارند می‌پردازد. در این روش‌ها جهت‌های نامعلوم دریافت

[1] Auto-Calibration
[2] Self-Calibration

سیگنال منابع و مکان حسگرها به‌صورت توأم و با استفاده از تخمینگرهای متفاوت تخمین‌زده می‌شوند. در این مقاله، پنج روش کالیبراسیون خودکار بررسی و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. با وجود اینکه این الگوریتم‌ها قادر به تخمین دیگر خطاهای مدل نیز می‌باشند، اما ما توجه خود را به خودکالیبراسیون شکل آرایه معطوف می‌کنیم.

بنابراین، ساختار مقاله بدین صورت خواهد بود: در بخش ۲ مسئله تحت بررسی فرموله شده و ساختار مسئله که برای تمام روش‌ها مشترک و یکسان است، توصیف شده است. در بخش ۳ چهار مورد از روش‌های مرسوم خودکالیبراسیون به‌صورت مختصر ارائه شده و توضیحاتی درباره نحوه عملکرد آن‌ها داده شده است. در این بخش روش اولِ ویس و فرایدلندر (WF1)، روش دومِ ویس و فرایدلندر (WF2)، روش بیشترین احتمال پسین-برازش زیرفضای نویز[۳] و الگوریتم بیشینه‌سازیِ چشم‌داشت تعمیم یافته فضا-متناوب[۴] که بهبود یافته الگوریتم بیشینه‌سازی چشم‌داشت[۵] است، توضیح داده شده‌اند. در ادامه و در بخش ۴، روش گوس-نیوتون (روش پیشنهادی) برای پیدا کردن پاسخ تخمین‌گر بیشترین درست‌نمایی یقینی[۶] و برخی دیگر از تخمین‌گرها به‌کار برده شده و نحوه استفاده از آن برای خودکالیبراسیون شکل آرایه توضیح داده شده است. در بخش ۵ نتایج شبیه‌سازی‌ها و مقایسه الگوریتم‌ها ارائه شده و از این مقایسه در بخش ۶ نتیجه‌گیری‌هایی صورت خواهد گرفت.

۲- فرمولاسیون مسئله

نمونه‌های مشاهدات از خروجی یک آرایه M حسگری که تحت تابش Q منبع باریک باند و میدان‌دور است در حوزه زمان، می‌تواند به‌صورت شناخته شده زیر مدل شود:

$$\mathbf{x}(\mathrm{k}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\rho})\mathbf{s}(\mathrm{k}) + \mathbf{n}(\mathrm{k}) \quad ; \quad \mathrm{k} = 1, 2, ..., \mathrm{K} \qquad (۱)$$

در این مدل $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\rho})$ ماتریس پاسخ جهتی[۷] آرایه و $\mathbf{s}(\mathrm{k})$ یک بردار مختلط $\mathrm{Q}\times 1$ بُعدی است که شامل شکل موج سیگنال‌های منابع تشعشع‌کننده است و $\mathbf{n}(\mathrm{k})$ نیز بردار نویز مختلط $\mathrm{M}\times 1$ بُعدی است که درصورت تصادفی فرض‌شدن بردار $\mathbf{s}(\mathrm{k})$، مستقل

[3] Maximum A Posteriori -Noise Subspace Fitting (MAP-NSF)
[4] Space-Alternating Generalized Expectation Maximization (SAGE)
[5] Expectation Maximization
[6] Deterministic Maximum Likelihood (DML)
[7] Manifold matrix

از سیگنال منابع است. بردار نویز $\mathbf{n}(k)$ به‌صورت یک بردار تصادفی دایروی با میانگین صفر و توزیع گوسی مدل می‌شود که دارای ماتریس کواریانس $\sigma^2\mathbf{I}$ است که σ^2 توان نویز است و مجهول فرض می‌شود و $\mathbf{I}$ ماتریس همانی $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ بُعدی است. بنابراین، با داشتن مشاهدات $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=1}^{K}$ مسئله مورد علاقه ما تخمین متغیرهای جهات منابع $\boldsymbol{\theta}$ و متغیرهای آشفتگی[1] $\boldsymbol{\rho}$ به صورت توأم است.

عنصر (m,q) اُم ماتریس $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\rho})$ می‌تواند اینگونه بیان شود:

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{A}\right]_{mq} &= g_m^n(1+\Delta g_m)\exp(j(\varphi_m^n+\Delta\varphi_m))\times\\ &\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\left(\begin{array}{l}(x_m^n+\Delta x_m)\sin(\theta_q)+\\(y_m^n+\Delta y_m)\cos(\theta_q)\end{array}\right)\right)\end{aligned} \quad (۲)$$

که در اینجا، g_m^n ، φ_m^n ، x_m^n و y_m^n به‌ترتیب مقادیر نامی بهره و فاز و موقعیت مکانی حسگر m اُم هستند. Δx_m و Δy_m به‌ترتیب آشفتگی‌های مکان حسگر m اُم در جهت محورهای x و y بوده و Δg_m و $\Delta\varphi_m$ به‌ترتیب آشفتگی‌های بهره و فاز حسگر mاُم هستند. همچنین θ_q زاویه دریافت سیگنال منبع q اُم بوده و λ طول موج سیگنال تابیده‌شده به آرایه می‌باشد. بنابراین، بردار آشفتگی‌ها به این صورت خواهد بود:

$$\boldsymbol{\rho}=\left[\Delta g_1,\Delta g_2,...,\Delta g_M,\Delta\varphi_1,\Delta\varphi_2,...,\Delta\varphi_M,\boldsymbol{\delta}^T\right]^T \quad (۳)$$

$$\boldsymbol{\delta}=\left[\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_M,\Delta y_1,\Delta y_2,...,\Delta y_M\right]^T \quad (۴)$$

از آنجایی که در این مقاله فقط خطای مکان حسگرها مورد توجه است می‌توان با حذف خطای بهره و فاز و در نظر گرفتن مقادیر نامی ۱ و صفر به‌ترتیب برای بهره و فاز حسگرها، عنصر (m,q) اُم ماتریس $\mathbf{A}$ را به این صورت بازنویسی کرد:

$$\left[\mathbf{A}\right]_{mq}=\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\left(\begin{array}{l}(x_m^n+\Delta x_m)\sin(\theta_q)+\\(y_m^n+\Delta y_m)\cos(\theta_q)\end{array}\right)\right) \quad (۵)$$

بنابراین، بردار $\boldsymbol{\rho}$ کوچکتر شده و به این صورت درخواهد آمد:

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\delta}=\left[\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_M,\Delta y_1,\Delta y_2,...,\Delta y_M\right]^T \quad (۶)$$

در صورتی که ماتریس کواریانس خروجی آرایه با $\mathbf{R}$ نمایش داده شود، تجزیه بردار ویژه آن به‌صورت رابطه (۷) خواهد بود:

$$\mathbf{R}=E\left\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\right\}=\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^H \quad (۷)$$

[1] Perturbation parameters

که در اینجا λ_mها و $\mathbf{e}_m$ها به‌ترتیب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $\mathbf{R}$ هستند. با مرتب کردن مقادیر ویژه به‌صورت نزولی:

$$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_Q>\lambda_{Q+1}=\lambda_{Q+2}=\cdots=\lambda_M=\sigma^2 \quad (۸)$$

درمی‌یابیم که Q تا از مقادیر ویژه نسبت به $(M-Q)$ تا مقدار ویژه بعدی بزرگتر هستند. با معرفی ماتریس $\mathbf{E}_s=[\mathbf{e}_1\cdots\mathbf{e}_Q]$ به‌عنوان ماتریس بردارهای ویژه سیگنال و ماتریس $\mathbf{E}_n=[\mathbf{e}_{Q+1}\cdots\mathbf{e}_M]$ به‌عنوان ماتریس بردارهای ویژه نویز، فضای بُرد ماتریس $\mathbf{E}_s$ را زیر فضای سیگنال و فضای بُرد ماتریس $\mathbf{E}_n$ را زیرفضای نویز می‌نامند.

تخمینی از ماتریس کواریانس داده می‌تواند اینگونه به‌دست آمده و نوشته شود:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}&=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)=\sum_{m=1}^{M}\hat{\lambda}_m\hat{\mathbf{e}}_m\hat{\mathbf{e}}_m^H\\&=\hat{\mathbf{E}}\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\hat{\mathbf{E}}^H=\hat{\mathbf{E}}_s\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s\hat{\mathbf{E}}_s^H+\hat{\mathbf{E}}_n\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n\hat{\mathbf{E}}_n^H\end{aligned} \quad (۹)$$

در اینجا ماتریس $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s$ ماتریسی قطری است که عناصر قطری آن مقادیر ویژه سیگنال هستند. همچنین $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n$ ماتریسی قطری است که عناصر قطری آن مقادیر ویژه نویز هستند. $\hat{\mathbf{E}}_s$ و $\hat{\mathbf{E}}_n$ نیز در واقع تخمین‌هایی از $\mathbf{E}_s$ و $\mathbf{E}_n$ هستند. به‌عبارتی در رابطه (۹) داریم که:

$$\begin{aligned}&\hat{\lambda}_1\ge\hat{\lambda}_2\ge\cdots\ge\hat{\lambda}_M\\&\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s=\mathrm{diag}\left\{\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\cdots,\hat{\lambda}_Q\right\}\\&\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n=\mathrm{diag}\left\{\hat{\lambda}_{Q+1},\hat{\lambda}_{Q+2},\cdots,\hat{\lambda}_M\right\}\end{aligned}$$

۳- معرفی برخی از روش‌های مرسومِ خودکالیبراسیون

۳-۱- روش اولِ ویس و فرایدلندر (WF1)

این روش که توسط آقایان ویس و فرایدلندر [۴] ارائه شده است، یک الگوریتم کالیبراسیون شکل آرایه است که با استفاده از منابع میدان‌دور اقدام به کالیبراسیون شکل آرایه می‌نماید. روش WF1 که مبتنی بر تابع هزینه DML است یک بهینه‌سازی بلوکی تکراری است که مرتب تخمین متغیرهای جهات منابع $\boldsymbol{\theta}$ و تخمین متغیرهای آشفتگی $\boldsymbol{\delta}$ را تکرار می‌کند تا اینکه همگرایی حاصل شود. این روش با استفاده از مزیت فرض کوچک بودن آشفتگی‌ها، یک بسط مرتبه اول تیلور را نسبت به متغیرهای $\boldsymbol{\delta}$

اعمال کرده و بنابراین، توانسته است برای بخش تخمین متغیرهای آشفتگی فرم بسته‌ای ارائه دهد.

الگوریتم WF1 شامل دو مرحله است. در مرحله اول، جهات منابع در ابتدا با استفاده از مکان‌های نامی حسگرها و در تکرارهای بعد با استفاده از تخمین‌های به‌دست‌آمده از مرحله دوم تخمین زده می‌شوند. در مرحله دوم مکان حسگرها با استفاده از جهت‌های منابع که در مرحله اول به‌دست آمده‌اند تخمین زده می‌شوند. سپس این دو مرحله مرتب تکرار می‌شوند تا همگرایی حاصل شود. توجه شود که در هر دو مرحله، مقدار تابع هزینه DML به‌طور مرتب یا در حال کاهش است یا بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین، همگرایی به یک کمینه محلی تضمین شده است.

۳-۲- روش دومِ ویس و فرایدلندر (WF2)

این روش نیز همچون روش WF1 توسط آقایان ویس و فرایدلندر [۵] ارائه شده و یک روش خودکالیبراسیون شکل آرایه است که با استفاده از منابع میدان‌دور، فرآیند کالیبراسیون را انجام می‌دهد. الگوریتم WF2 یک روش مبتنی بر بردارهای ویژه است که با کمینه‌کردن طیف صفر الگوریتم میوزیک درصدد تخمین همزمان متغیرهای موردنظر است. این روش نیز با استفاده از فرض کوچک بودن آشفتگی‌ها، بسط مرتبه اول تیلوری را نسبت به متغیرهای δ اعمال کرده و توانسته برای تخمین متغیرهای آرایه، راه‌حلی به فرم بسته ارائه دهد. روش WF2 تنها زمانی قابل اعمال است که ماتریس کواریانس سیگنال، غیرمنفرد باشد. به‌عبارتی سیگنال‌های منابع ناهمدوس باشند.

این الگوریتم نیز یک الگوریتم بلوکی-تکراری است که بین دو مرحله درحال تکرار شدن است. در مرحله اول فرض می‌شود که مختصات مکان حسگرها معلوم است و با این فرض جهات منابع تخمین زده می‌شود در حالیکه در مرحله دوم فرض می‌شود که جهات منابع معلوم هستند و با این فرض مختصات مکان حسگرها تخمین زده می‌شود. مرحله اول عیناً معادل با یک الگوریتم میوزیک استاندارد است در حالی که مرحله دوم یک مرحله جدید است. لازم به ذکر است که در این الگوریتم نیز همگرایی (حداقل به یک کمینه محلی) تضمین شده است.

۳-۳- روش بیشترین احتمال پسین- برازش زیرفضای نویز (MAP-NSF)

الگوریتم MAP-NSF که توسط آقایان ویبرگ و سویندلهِرست [۶] ارائه شده، یک الگوریتم خودکالیبراسیون با استفاده از منابع میدان دور باریک‌باند است. اگرچه این روش قابل اعمال به همه خطاهای آرایه است اما در اینجا ما تنها برای خودکالیبراسیون شکل آرایه از آن استفاده می‌کنیم. در این روش دو فرض اساسی وجود دارد، فرض اول فرض کوچک بودن مقدار آشفتگی است که این روش با استفاده از این فرض، بسط مرتبه اول تیلوری را نسبت به متغیرهای δ اعمال کرده و توانسته برای تخمین متغیرهای آرایه، راه‌حلی به فرم بسته ارائه دهد. فرض دوم این است که چگالی احتمال خطاهای مکان آرایه در دست است. در واقع فرض می‌شود آشفتگی‌های مکان حسگرها دارای توزیع گوسی با میانگین و ماتریس کواریانس معلوم هستند.
در مورد الگوریتم کالیبراسیون MAP-NSF توجه به دو نکته ضروری است:

- با وجود این‌که الگوریتم MAP-NSF یک الگوریتم بلوکی-تکراری نیست اما می‌توان آن را به‌صورت بلوکی-تکراری پیاده‌سازی کرد به‌گونه‌ای که دو مرحله تخمین جهات منابع و تخمین متغیرهای آشفتگی در الگوریتم تکرار شوند تا زمانی که همگرایی حاصل شود.
- روش MAP-NSF همچون روش WF2 تنها زمانی قابل اعمال است که ماتریس کواریانس سیگنال، غیرمنفرد باشد. یعنی سیگنال‌های منابع ناهمدوس باشند.

۳-۴- روش بیشینه‌سازیِ چشم‌داشت تعمیم‌یافته فضا- متناوب (SAGE)

الگوریتم SAGE که پیش از استفاده به‌عنوان یک الگوریتم خودکالیبراسیون شکل آرایه [۷] به‌عنوان یک روش محاسباتی در محاسبه تخمین‌گر DML برای کاربردهای جهت‌یابی آرایه‌ای [۸-۹] مورد استفاده قرار گرفته بود، در واقع نوع بهبودیافته الگوریتم EM است. در این روش ابتدا بردار متغیرهای مجهول که شامل جهات منابع، مکان حسگرها و توان نویز است به زیربردارهایی تقسیم می‌شود که به‌صورت متوالی تخمین زده می‌شوند. در این الگوریتم یک فرآیند شاخص‌گذاری معرفی می‌شود که علاوه بر تکرار، شامل یک چرخه نیز می‌شود. یک چرخه شامل یک گام محاسبه چشم داشت است که به دنبال آن یک گام بیشینه‌سازی نیز می‌آید و دوباره این گام بیشینه‌سازی، بدون وقفه توسط یک گام محاسبه چشم‌داشت دیگر دنبال می‌شود. اما گام محاسبه چشم‌داشت جدید، شروع چرخه بعدی است.

لازم به‌ذکر است که یک تکرار، شامل یک یا بیش از یک چرخه می‌باشد. در هر چرخه یک زیرمجموعه از متغیرهای مجهول بروزرسانی می‌شود و تمام این مجموعه‌ها، یک بار در هر تکرار بروزرسانی می‌شوند. در این روش نیز به‌دلیل

بهینه‌سازی‌های متوالی، رسیدن به یک کمینه محلی یا کلی از تابع هزینه تضمین شده است.

۴- روش گوس- نیوتون (روش پیشنهادی)

استفاده از تخمین‌گرهای ML و تخمین‌گرهای مبتنی بر زیرفضا مثل WSF[1] در کاربردهای جهت‌یابی منابع، امری بسیار رایج و شناخته شده است. اما برای صورت‌دادن فرآیند بهینه‌سازی و پیدا کردن پاسخ این تخمین‌گرها، نیاز به الگوریتم‌های عددی به‌منظور کاهش محاسبات، گریزناپذیر است. از میان روش‌های عددی برای حل این مسائل، روش‌های AP[2]، AM[3]، EM و روش گوس- نیوتون از شهرت خاصی برخوردارند. روش گوس- نیوتون درواقع اصلاح‌شده روش عددی نیوتون در مسائل تخمین است. با وجود این‌که استفاده از روش گوس- نیوتون در تخمین جهات منابع که از جمله متغیرهای سیگنال هستند مرسوم است [۱۱-۱۰]، اما استفاده از این روش در تخمین متغیرهای آرایه سابقه قابل ذکری ندارد. در این بخش ما درصدد هستیم که علاوه بر آشنایی با این روش در محاسبه پاسخ تخمین‌گرهای SML[4]، DML و WSF، از آن در تخمین متغیرهای آرایه به‌ویژه متغیرهای شکل آرایه استفاده نماییم. آنچه ما در حالت کلی به دنبال آن هستیم، حل مسئله بهینه‌سازی زیر است:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = \arg\min_{\boldsymbol{\psi}} \mathrm{V}(\boldsymbol{\psi}) \qquad (۱۰)$$

که بردار $\boldsymbol{\psi}$ در اینجا شامل متغیرهای آرایه و نیز جهات منابع است، یعنی $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}]$، که بردار $\boldsymbol{\rho}$ بردار متغیرهای آرایه است. ما به سه نمایش از $\mathrm{V}(\boldsymbol{\psi})$، به‌ترتیب مطابق با تخمین‌گرهای SML، DML و WSF علاقه‌مند هستیم. تابع‌های هدف در این سه تخمین‌گر عبارتند از:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{SML}} = \det\left[\mathbf{P}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}_{\mathbf{A}} + \frac{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right\}\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}}{\mathrm{M}-\mathrm{Q}}\right] \qquad (۱۱)$$

$$\mathrm{V}_{\mathrm{DML}} = \mathrm{Tr}\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right\} \qquad (۱۲)$$

$$\mathrm{V}_{\mathrm{WSF}} = \mathrm{Tr}\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}\right\} \qquad (۱۳)$$

در اینجا $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$ ماتریس تصویرسازی[5] بر روی زیرفضای ستونی ماتریس $\mathbf{A}$ بوده و $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}$ مکمل متعامد[6] این ماتریس تصویرسازی است:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{I} - \mathbf{A}[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \qquad (۱۴)$$

همچنین $\hat{\mathbf{R}}$ تخمینی از ماتریس کواریانس داده است و $\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}$ ماتریس وزن بهینه بوده که به این صورت می‌باشد:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{opt}} = \left(\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathrm{s}} - \hat{\sigma}^2\mathbf{I}\right)^2 \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathrm{s}}^{-1} \qquad (۱۵)$$

روش نیوتون یک روش جست و جو است که از دسته روش های جست و جوی محلی است. ایده پایه‌ای این روش این است که تابع هدف $\mathrm{V}(\boldsymbol{\psi})$ را به‌صورت تابعی درجه دوم[7] در همسایگی نقطه کمینه مدل کند. ما یک نقطه شروع $\boldsymbol{\psi}_0$ را انتخاب می‌کنیم سپس یک مسیر نزولی[8] پیدا می‌کنیم که باعث شود مقدار $\mathrm{V}(\boldsymbol{\psi})$ کاهش یابد و یک اندازه گام نیز محاسبه می‌کنیم تا تعیین کنیم که در این مسیرِ نزولی چقدر جابه‌جا شویم. در تکرار $(\mathrm{k}+1)$اُم، تخمین $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{k}+1}$ این‌گونه به‌دست می‌آید:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{k}+1} = \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{k}} - \mu_{\mathrm{k}}\mathbf{H}^{-1}\mathrm{V}' \qquad (۱۶)$$

که در اینجا $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{k}}$ تخمین به‌دست‌آمده از تکرار k اُم است، μ_{k} طول گام، ماتریس $\mathbf{H}$ نمایش‌دهنده ماتریس هسین تابع هزینه است و V' نمایش‌دهنده بردار گرادیان تابع هزینه است. لازم به ذکر است که در رابطه بالا $\mathbf{H}$ و V' در نقطه $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{k}}$ محاسبه می‌شوند که برای سادگی در نوشتار از این وابستگی به $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{k}}$ چشم‌پوشی شده است. طول گام μ_{k} باید به شکل مناسبی انتخاب شود به‌گونه‌ای که همگرایی به کمینه محلی تضمین شده باشد.

یک روش که اغلب در انتخاب مقدار آن مورد استفاده قرار می‌گیرد این‌گونه است که یک $0 < \mu < 1$ انتخاب می‌شود سپس از دنباله $\mu_{\mathrm{k}} = (\mu)^{\mathrm{i}}$ کوچکترین عدد صحیح $\mathrm{i} \geq 0$ که باعث ایجاد یک کاهش مکفی[9] در تابع هزینه شود انتخاب می‌گردد. اگر مسیر جست و جو با $\boldsymbol{p}_{\mathrm{k}}$ نمایش داده شود، مقدار کاهش مکفی می‌تواند از طریق اصل گُلدِستین- آرمیجو[10] این‌گونه تعیین گردد:

$$\mathrm{V}(\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{k}+1}) \leq \mathrm{V}(\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{k}}) + \beta\mu_{\mathrm{k}}\boldsymbol{p}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}' \qquad (۱۷)$$

در اینجا β یک ثابت است که $0 < \beta \leq 0.5$ است و $\boldsymbol{p}_{\mathrm{k}} = -\mathbf{H}^{-1}\mathrm{V}'$ می‌باشد. بنابراین، هر تکرار شامل تعدادی گام می‌شود که تعداد گام‌ها در هر تکرار می‌تواند متفاوت باشد. در هر گام از یک تکرار، ما مقادیر صحیح نامنفی i را به‌صورت متوالی از $\mathrm{i} = 0$ شروع کرده و کوچکترین مقدار i که شرط (۱۷) را تأمین

[1] Weighted subspace fitting
[2] Alternating projection
[3] Alternating maximization
[4] Stochastic Maximum Likelihood (SML)
[5] Projection matrix
[6] Orthogonal complement
[7] Quadratic
[8] Descent direction
[9] Sufficient decrease
[10] Goldstein-Armijo

کند انتخاب می‌کنیم. به‌عنوان مثال اگر $\mu = 0.5$ انتخاب شود، این دنباله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_k = 1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots \qquad (۱۸)$$

تکرارهای (۱۶) ادامه پیدا می‌کنند تا زمانیکه یک معیار توقف مشخص تأمین گردد. به‌عنوان مثال این معیار توقف می‌تواند اینگونه باشد:

- دیگر کاهش قابل توجهی در مقدار تابع هزینه اتفاق نیافتد یعنی $\left|V(\hat{\psi}_{k+1}) - V(\hat{\psi}_k)\right| < \delta_1$ بشود.
- دیگر تغییر قابل توجهی در متغیرهای تحت تخمین مشاهده نشود یعنی $\left\|\hat{\psi}_{k+1} - \hat{\psi}_k\right\| < \delta_2$ بشود.

کیفیت نقطه همگرایی وابسته به شکل تابع هزینه است. اگر $V(\psi)$ شامل چندین کمینه باشد، فرآیند جست و جو باید از نقطه‌ای آغاز شود که به اندازه کافی به کمینه مطلق نزدیک باشد تا از همگرایی به یک کمینه محلی پرهیز شود. در این الگوریتم، یک شرط اساسی برای رفتن به سمت نقطه کمینه این است که مسیر جست و جو حتماً باید یک مسیر نزولی باشد، بنابراین، باید شرط $\boldsymbol{p}_k^T V' < 0$ تأمین گردد. این شرط تنها زمانی تأمین می‌شود که ماتریس $\mathbf{H}$ یک ماتریس مثبت تعریفی باشد. البته مثبت تعریفی بودن $\mathbf{H}$ شرط قوی‌تری نسبت به شرط $\boldsymbol{p}_k^T V' < 0$ است. یک راه برای تضمین همگرایی این است که شروط اضافه‌ای بر روی مسیر جست و جوی $\boldsymbol{p}_k$ و طول گام μ_k برقرار شوند. این شروط عبارتند از:

۱. ایجاد کردن نزول مکفی[1]
۲. وابستگی به گرادیان
۳. ایجاد کردن یک کاهش مکفی[2] در تابع هزینه $V(\psi)$
۴. طول گام خیلی کوچک نباشد.

توجه شود که خطری که وجود دارد این است که ممکن است $\boldsymbol{p}_k$ نزدیک به متعامد بر V' بشود درحالیکه هنوز مسیر $\boldsymbol{p}_k$، نزولی باقی مانده است. بنابراین، شرط $\boldsymbol{p}_k^T V' < 0$ به‌عنوان شرط نزولی بودن مسیر، یک شرط کافی نیست. در نتیجه چهار شرط اشاره‌شده بالا این‌طور فرموله می‌شوند:

شرط نزول مکفی:

$$-\frac{\boldsymbol{p}_k^T V'}{\|\boldsymbol{p}_k\| \cdot \|V'\|} \ge \varepsilon > 0 \qquad (۱۹)$$

شرط وابستگی به گرادیان:

$$\|\boldsymbol{p}_k\| \ge m\|V'\| \quad ; \quad m > 0 \qquad (۲۰)$$

شرط کاهش مکفی:

$$V(\hat{\psi}_{k+1}) \le V(\hat{\psi}_k) + \beta\mu_k \boldsymbol{p}_k^T V' \quad ; \quad 0 < \beta \le 0.5 \qquad (۲۱)$$

شرط کوچک نبودن طول گام:

$$\mu_k > \delta_4 \qquad (۲۲)$$

به‌عنوان مثال $\beta = 10^{-4}$ و $\delta_4 = 10^{-8}$ می‌توانند انتخاب شوند. لازم به ذکر است که شرط وابستگی به گرادیان بیان می‌کند که نُرم مسیر جست و جو خیلی کمتر از نُرم بردار گرادیان نباشد.

برای اطلاعات بیشتر درباره نحوه انتخاب $\boldsymbol{p}_k$ و μ_k می‌توان به مراجع [۱۴-۱۲] مراجعه نمود. بنابراین، می‌توان روش پیشنهادی را به‌صورت یک الگوریتم ارائه داد:

$$
\begin{array}{l}
\text{while } (\left|V(\hat{\psi}_{k+1}) - V(\hat{\psi}_k)\right| < \delta) \\
\quad \text{while } (\|\hat{\delta}_{k+1} - \hat{\delta}_k\| > \varepsilon_1) \\
\quad\quad i = 0 \\
\quad\quad \text{while}\left(\begin{array}{l} -\dfrac{\boldsymbol{p}_k^T V'}{\|\boldsymbol{p}_k\| \cdot \|V'\|} \ge \varepsilon > 0 \quad \text{or} \\ \|\boldsymbol{p}_k\| \ge m\|V'\| \quad \text{or} \\ V(\hat{\psi}_{k+1}) \le V(\hat{\psi}_k) + \beta\mu_k \boldsymbol{p}_k^T V' \end{array}\right) \text{ and } (\mu_k \ge \varepsilon_2)) \\
\quad\quad\quad \mu_k = (\mu)^i \quad ; \quad 0 < \mu < 1 \\
\quad\quad\quad \hat{\delta}_{k+1} = \hat{\delta}_k - \mu_k \mathbf{H}^{-1} V' \\
\quad\quad\quad i = i + 1 \\
\quad\quad \text{end} \\
\quad \text{end} \\
\quad \text{while } (\|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k\| > \varepsilon_3) \\
\quad\quad i = 0 \\
\quad\quad \text{while }\left(\begin{array}{l} -\dfrac{\boldsymbol{p}_k^T V'}{\|\boldsymbol{p}_k\| \cdot \|V'\|} \ge \varepsilon > 0 \quad \text{or} \\ \|\boldsymbol{p}_k\| \ge m\|V'\| \quad \text{or} \\ V(\hat{\psi}_{k+1}) \le V(\hat{\psi}_k) + \beta\mu_k \boldsymbol{p}_k^T V' \end{array}\right) \text{ and } (\mu_k \ge \varepsilon_4)) \\
\quad\quad\quad \mu_k = (\mu)^i \quad ; \quad 0 < \mu < 1 \\
\quad\quad\quad \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \mu_k \mathbf{H}^{-1} V' \\
\quad\quad\quad i = i + 1 \\
\quad\quad \text{end} \\
\quad \text{end} \\
\text{end}
\end{array}
$$

لازم به‌ذکر است که روش نیوتون دارای تعدادی اِشکال است: اول اینکه $\boldsymbol{p}_k$ تنها زمانی می‌تواند یک مسیر نزولی باشد که ماتریس $\mathbf{H}$ مثبت تعریفی باشد. این شرط ممکن است زمانی که

[1] Sufficient descent
[2] Sufficient decrease

ما خیلی از نقطه کمینه واقعی دور هستیم برقرار نشود چراکه $\mathrm{V}(\boldsymbol{\psi})$ ممکن است در این صورت درجه دوم نباشد. بنابراین، ممکن است هیچ مقداری برای μ_{k} پیدا نشود که باعث ایجاد کاهش در تابع هزینه شود. دوم این‌که محاسبه دقیق ماتریس‌های هسین برای توابع هزینه SML، DML و WSF از لحاظ بار محاسباتی بسیار سنگین و طاقت فرساست. یک روش استاندارد برای غلبه بر این مشکلات، استفاده از تقریب‌های کمتر پیچیده از ماتریس هسین است که مثبت نیمه تعریفی بودن $\mathbf{H}$ را نیز تضمین می‌کند. با انجام چنین تقریب‌هایی در الگوریتم نیوتون، الگوریتم گوس-نیوتون حاصل می‌شود. حال نوبت به تعیین بردار گرادیان و ماتریس هسین برای هرکدام از تخمین‌گرها می‌رسد. مؤلفه‌های iاُم بردار گرادیان این تخمین‌گرها عبارتند از:

$$\left[\mathrm{V}'_{\mathrm{SML}}\right]_{\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}\right\}\right\} \tag{۲۳}$$

$$\left[\mathrm{V}'_{\mathrm{DML}}\right]_{\mathrm{i}} = -\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}\mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{A}^{\dagger\mathrm{H}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\right)\hat{\mathbf{R}}\right\} \tag{۲۴}$$

$$\left[\mathrm{V}'_{\mathrm{WSF}}\right]_{\mathrm{i}} = -\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}\mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{A}^{\dagger\mathrm{H}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\right)\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}\right\} \tag{۲۵}$$

و مؤلفه‌های ijاُم ماتریس هسین این تخمین‌گرها عبارتند از:

$$\left[\mathbf{H}_{\mathrm{SML}}\right]_{\mathrm{ij}} = 2\hat{\sigma}^{2}\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\right]\left[\mathbf{A}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}\right]\right\}\right\} \tag{۲۶}$$

$$\left[\mathbf{H}_{\mathrm{DML}}\right]_{\mathrm{ij}} = 2\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger\mathrm{H}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_{\mathrm{j}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\right\}\right\} \tag{۲۷}$$

$$\left[\mathbf{H}_{\mathrm{WSF}}\right]_{\mathrm{ij}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger\mathrm{H}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_{\mathrm{j}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}\right\}\right\} \tag{۲۸}$$

در اینجا منظور از $\mathbf{A}_{\mathrm{i}}$ و $\mathbf{A}_{\mathrm{j}}$ مشتق ماتریس $\mathbf{A}$ نسبت به متغیرهای ψ_{i} و ψ_{j} است که به‌ترتیب مؤلفه‌های iاُم و jاُم بردار $\boldsymbol{\psi}$ هستند. همچنین ماتریس $\mathbf{G}$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}\left[\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}\right)^{-1} - \hat{\sigma}^{-2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\right] \tag{۲۹}$$

اثبات روابط مربوط به تخمین‌گر SML که در بالا آمد در [۱۶-۱۵] و روابط مربوط به دو تخمین‌گر دیگر در [۳ و ۱۶] موجود است. همان‌طور که قبلاً نیز گفته شده، بردار $\boldsymbol{\psi}$ شامل تمام متغیرهای مورد علاقه ماست. در این‌صورت باید بدانیم بسته به این‌که به‌دنبال تخمین کدام یک از این متغیرها هستیم مشتق ماتریس $\mathbf{A}$ نسبت به آن متغیر متفاوت خواهد بود و باید $\mathbf{A}_{\mathrm{i}}$ و $\mathbf{A}_{\mathrm{j}}$ را بسته به نوع متغیر به‌صورت مجزا محاسبه کرده و در روابط (۲۳) تا (۲۸) قرار دهیم. این کار در پیوست (ب) و (پ) این مقاله صورت گرفته است که ما در زیربخش‌های ۴-۱ و ۴-۲ تنها به ذکر نتایج، اکتفا می‌کنیم. توجه شود که نتایج پیوست (ب) برای اولین بار در این مقاله به‌دست آورده شده‌اند و تا آنجا که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند این نتایج در منبع دیگری به دست آورده نشده‌اند.

۴-۱- بردار گرادیان و ماتریس هسین در حالت تخمین زاویه ورود سیگنال‌ها

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{SML},\boldsymbol{\theta}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right]\right\} \tag{۳۰}$$

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{DML},\boldsymbol{\theta}} = -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right]\right\} \tag{۳۱}$$

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{WSF},\boldsymbol{\theta}} = -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right]\right\} \tag{۳۲}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{SML},\boldsymbol{\theta}} = 2\hat{\sigma}^{2}\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\right)\odot\left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۳۳}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{DML},\boldsymbol{\theta}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right)\odot\left(\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger\mathrm{H}}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۳۴}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{WSF},\boldsymbol{\theta}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right)\odot\left(\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\dagger\mathrm{H}}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۳۵}$$

۴-۲- بردار گرادیان و ماتریس هسین در حالت تخمین مکان المان‌ها

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{SML},\mathbf{x}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\right]\right\} \tag{۳۶}$$

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{DML},\mathbf{x}} = -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\right]\right\} \tag{۳۷}$$

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{WSF},\mathbf{x}} = -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}^{\perp}\right]\right\} \tag{۳۸}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{SML},\mathbf{x}} = 2\hat{\sigma}^{2}\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\right)\odot\mathbf{P}^{\perp}\right\} \tag{۳۹}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{DML},\mathbf{x}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{P}^{\perp}\odot\left(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger\mathrm{H}}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۴۰}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{WSF},\mathbf{x}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{P}^{\perp}\,\square\,\left(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\dagger\mathrm{H}}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۴۱}$$

در اینجا نشانگر $\odot$ نمایش‌دهنده ضرب هادامارد است. ماتریس‌های $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}$ و $\mathbf{D}_{\mathrm{x}}$ اصطلاحاً به‌ترتیب ماتریس دیفرانسیل نسبت به بردار $\boldsymbol{\theta}$ و ماتریس دیفرانسیل نسبت به بردار $\mathbf{x}$ نامیده می‌شوند که به این صورت تعریف می‌گردند:

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}} = \left[\frac{\partial\mathbf{a}_{:,1}}{\partial\theta_{1}}\ \frac{\partial\mathbf{a}_{:,2}}{\partial\theta_{2}}\ \cdots\ \frac{\partial\mathbf{a}_{:,\mathrm{Q}}}{\partial\theta_{\mathrm{Q}}}\right] \tag{۴۲}$$

$$\mathbf{D}_{\mathrm{x}} = \left[\frac{\partial\mathbf{a}_{1,:}^{\mathrm{T}}}{\partial\Delta\mathrm{x}_{1}}\ \frac{\partial\mathbf{a}_{2,:}^{\mathrm{T}}}{\partial\Delta\mathrm{x}_{2}}\cdots\frac{\partial\mathbf{a}_{\mathrm{M},:}^{\mathrm{T}}}{\partial\Delta\mathrm{x}_{\mathrm{M}}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{۴۳}$$

در اینجا $\mathbf{a}_{\mathrm{m},:}$ نمایشگر mاُمین سطر از ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{a}_{:,\mathrm{q}}$ نمایشگر qاُمین ستون از ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشند. لازم به ذکر است که بردار گرادیان و ماتریس هسین برای متغیر $\mathbf{y}$ و نیز متغیرهای $\mathbf{g}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ نیز دقیقاً مانند روابط (۳۶) تا (۴۱) هستند با این تفاوت

که به‌جای $\mathbf{D}_x$ باید به‌ترتیب ماتریس‌های $\mathbf{D}_y$ ، $\mathbf{D}_g$ و $\mathbf{D}_\varphi$ قرار داده شوند. ماتریس‌های $\mathbf{D}_\theta$ ، $\mathbf{D}_x$ ، $\mathbf{D}_y$ ، $\mathbf{D}_g$ و $\mathbf{D}_\varphi$ در پیوست (الف) محاسبه شده‌اند.

۵- نتایج شبیه‌سازی‌ها و مقایسه الگوریتم‌ها

در ابتدا و پیش از آن‌که نتایج شبیه‌سازی‌ها ارائه شود، لازم است که نکاتی مورد توجه قرار گیرد:

۱. در تمام شبیه‌سازی‌ها هم مؤلفه x و هم مؤلفه y برای مکان هر یک از المان‌ها توسط اغتشاش گوسی بریده شده با میانگین صفر و انحراف معیار σ_p دچار آشفتگی شده است. همان‌گونه که گفته شد این آشفتگی‌ها به‌صورت گوسیِ معمول نیست بلکه به‌دلیل محدودیت‌هایی که در واقعیت وجود دارند از چگالی احتمال گوسیِ بریده شده استفاده شده است به این ترتیب که حداکثر مقدار قابل انتخاب به دو برابرِ σ_p محدود شده است. لازم است به این نکته مهم نیز توجه شود که در هنگام به‌دست آوردن و رسم CRB برای خطای جهت‌یابی یا خطای تخمین مکان عناصر آرایه، ما در واقع توزیع خطای مکان عناصر آرایه را گوسی (و نه گوسی بریده شده) فرض کرده‌ایم. به همین علت آنچه ما به‌عنوان CRB رسم می‌کنیم با مقدار واقعی آن، قدری متفاوت است.

۲. نکته قابل ذکر دیگر این است که در برخی از آزمایشات ممکن است به‌علت کم بودن مقدار SNR یا زیاد بودن مقدار آشفتگی‌ها که به‌صورت تصادفی تولید شده‌اند و یا هردو علت، الگوریتم کالیبراسیون نتواند به خوبی اجرا شود. به‌عبارتی عملیات کالیبراسیون با شکست مواجه شود. در این صورت ممکن است تخمین‌های به‌دست‌آمده برای جهات منابع یا مکان المان‌ها حتی از حدس اولیه نیز بدتر باشند. در این شبیه‌سازی‌ها مطلوب ما این بود که الگوریتم کالیبراسیون بتواند خطای تخمین مکان را نسبت به ابتدای فرآیند کالیبراسیون، به اندازه‌ای هرچند ناچیز بهبود دهد. بنابراین، شرط موفقیت از دیدگاه ما این است که فرآیند کالیبراسیون بتواند این حداقل مقدار بهبود را در تخمین مکان حسگرها ایجاد کند و در هنگام رسم نتایج شبیه‌سازی‌ها نیز ما این نتایج را تنها برای اجراهای موفق محاسبه و رسم می‌کنیم. ما در کنار نمودارهای RMSE بر حسب SNR و RMSE بر حسب تعداد برداشت، نمودار دیگری که نشان‌دهنده درصد موفقیت هر الگوریتم در هر SNR یا در هر تعداد برداشت است را نیز رسم خواهیم کرد.

۳. نکته قابل توجه دیگر این است که برای حذف تأثیر داده های پَرت در نمودارها لازم شد که به جای میانگین‌گیری از داده‌های خروجی آزمایشاتی که با توجه به شاخص تعریف شده توسط ما موفق بوده‌اند، میانه آنها را محاسبه کرده و به کار ببریم. بنابراین، در همه شکل‌هایی که رسم خواهیم کرد منظور ما از RMSE در واقع ریشه میانه مربع خطا[1] است و نه ریشه میانگین مربع خطا[2]. البته این کار باعث می‌شود که CRB رسم‌شده در شکل‌های ما چندان برای مقایسه با منحنی نتایج مناسب نباشد.

۴. الگوریتم‌های تحت بررسی، همگی الگوریتم‌هایی تکرار شونده هستند که یک بلوک کالیبراسیون و یک بلوک جهت‌یابی را به‌صورت متوالی تکرار می‌کنند. از آنجایی که هدف ما مقایسه عملکرد بلوک کالیبراسیون این الگوریتم‌ها با یکدیگر است، با تغییر در ساختار اصلی این الگوریتم‌ها بلوک جهت‌یابی همه را تغییر داده و به‌جای آن از الگوریتم AP استفاده نموده‌ایم. مثلاً وقتی عملکرد الگوریتم گوس- نیوتن را با شبیه‌سازی بررسی می‌کنیم، در تکرارهای این الگوریتم همواره در مرحله جهت‌یابی از الگوریتم AP استفاده می‌کنیم و از روش گوس-نیوتن تنها در مرحله کالیبراسیون استفاده می‌کنیم. در نتیجه با یکسان‌بودن بلوک جهت‌یابی برای همه پنج روش تحت بررسی، می‌توان به‌صورت منصفانه‌تری عملکرد این روش‌ها را از حیث کالیبراسیون با یکدیگر مقایسه کرد.

۵. در تمام آزمایش‌ها، آرایه مورد استفاده، یک آرایه دایروی یکنواخت ۶ حسگری با فاصله بین حسگری $\lambda / 2$ بوده است و منابع سیگنال، ۳ منبع میدان دور و هم توان در جهات ۳۵، ۰ و ۳۵- درجه بوده‌اند. بنابراین، در تمام شکل‌ها، RMSE مکان المان‌ها با میانگین‌گیری بر روی همه حسگرها به‌دست‌آمده و بر حسب $\lambda / 2$ است. همچنین لازم به ذکر است که منظور از نسبت سیگنال به نویز، نسبت توان سیگنال به توان نویز در ورودی هر حسگر است و منظور ما از SNR با مفهوم ASNR در یک ضریب M تفاوت دارد.

۶. توجه شود که ما در این مقاله روابط مربوط به روش گوس-نیوتن را برای هر سه تخمینگر DML و SML و WSF به‌دست آورده‌ایم اما در شبیه‌سازی‌ها عملکرد روش گوس-نیوتن را تنها برای تخمین‌گر DML مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌دهیم.

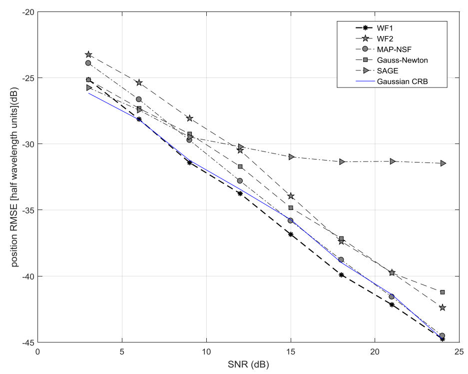
[1] Root Median Square Error
[2] Root Mean Square Error

حال به نتایج شبیه‌سازی‌ها می‌پردازیم. شکل (۱) نمایش دهنده تغییرات RMSE مکان المان‌ها نسبت به SNR پس از کالیبراسیون است. این شکل برای حالتی که انحراف معیار خطای مکان المان‌ها برابر با $\sigma_p = 0.1\lambda / 2$ باشد رسم شده است. شکل (۳) مانند شکل (۱) نمایش‌دهنده تغییرات RMSE مکان المان‌ها نسبت به SNR پس از کالیبراسیون است با این تفاوت که شکل (۳) برای آشفتگی با انحراف معیار $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$ رسم شده است.

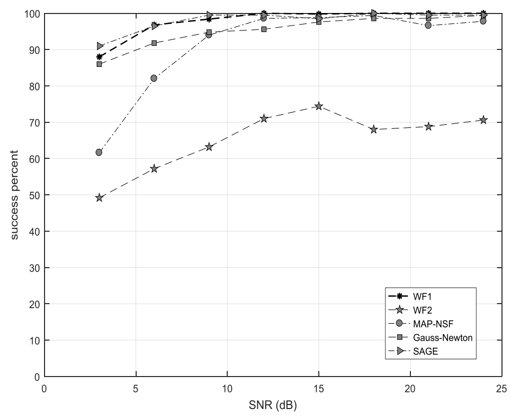
شکل‌های (۴-۲) نیز نمایش‌دهنده میزان موفقیت الگوریتم ها به درصد نسبت به SNR هستند که به‌ترتیب برای آشفتگی با انحراف معیار $\sigma_p = 0.1\lambda / 2$ و $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$ رسم شده‌اند. توجه شود که در همه شکل‌های (۶-۱) تعداد اجراهای شبیه سازی برای همه روش‌ها بجز روش SAGE برابر با ۵۰۰ است در حالی که به‌علت بار سنگین محاسباتی و زمان اجرای طولانیِ روش SAGE، تعداد اجراهای این روش برابر با ۲۰۰ گرفته شده است. شکل (۵) نمایش‌دهنده مقدار RMSE مکان حسگرها برحسب تعداد برداشت‌ها پس از کالیبراسیون است و شکل (۶) نمایش‌دهنده درصد موفقیت الگوریتم‌های کالیبراسیون در تعداد برداشت‌های متفاوت می‌باشد. این دو شکل برای حالت $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$ رسم شده‌اند.

همچنین شکل (۷) نمایش‌دهنده نمونه‌ای از تغییرات شبه طیف میوزیک قبل و بعد از کالیبراسیون شکل آرایه توسط الگوریتم پیشنهادی گوس- نیوتن بوده و شکل (۸) نمایش‌دهنده نمونه‌ای از ساختار آرایه در سه حالت نامی، واقعی و تخمین زده شده توسط این الگوریتم است.

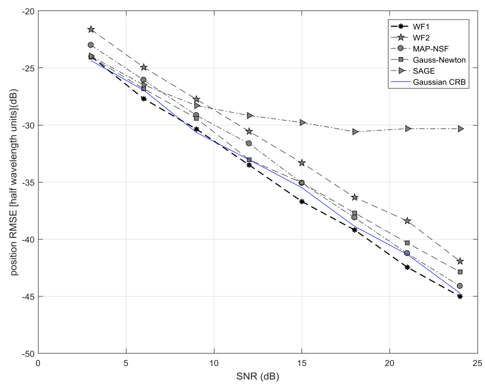
لازم به ذکر است که میانگین زمان اجرای الگوریتم‌ها و درصد موفقیت آن‌ها در انجام کالیبراسیون نیز در جدول (۱) آمده است.



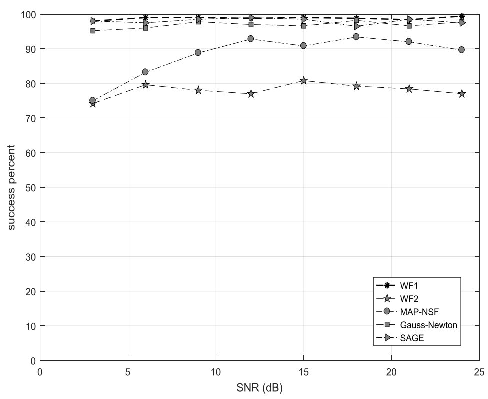
شکل (۱): تغییرات RMSE مکان المان‌ها نسبت به SNR برای آشفتگی با انحراف معیار $\sigma_p = 0.1\lambda / 2$. تعداد آزمایشات مونت کارلو $MC = 500$ و تعداد برداشت‌ها $K = 100$ بوده است. البته تعداد آزمایشات مونت کارلو برای الگوریتم SAGE برابر با $MC = 200$ بوده است.



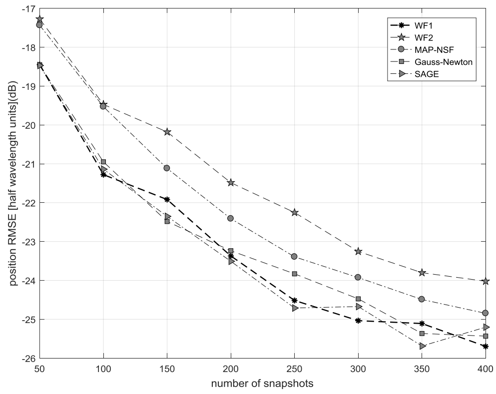
شکل (۲): تغییرات درصد موفقیت الگوریتم‌ها نسبت به SNR برای آشفتگی با انحراف معیار $\sigma_p = 0.1\lambda / 2$. تعداد آزمایشات مونت کارلو $MC = 500$ و تعداد برداشت‌ها $K = 100$ بوده است. البته تعداد آزمایشات مونت کارلو برای الگوریتم SAGE برابر با $MC = 200$ بوده است.



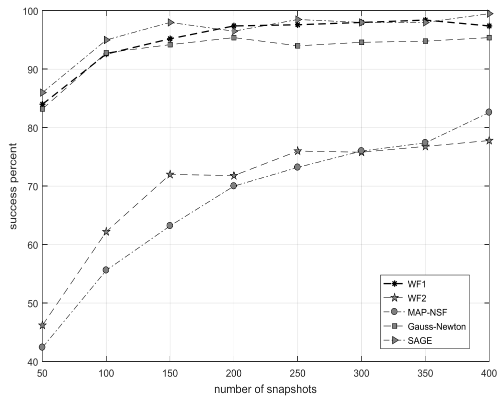
شکل (۳): تغییرات RMSE مکان المان‌ها نسبت به SNR برای آشفتگی با انحراف معیار $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$. تعداد آزمایشات مونت کارلو $MC = 500$ و تعداد برداشت‌ها $K = 100$ بوده است. البته تعداد آزمایشات مونت کارلو برای الگوریتم SAGE برابر با $MC = 200$ بوده است.



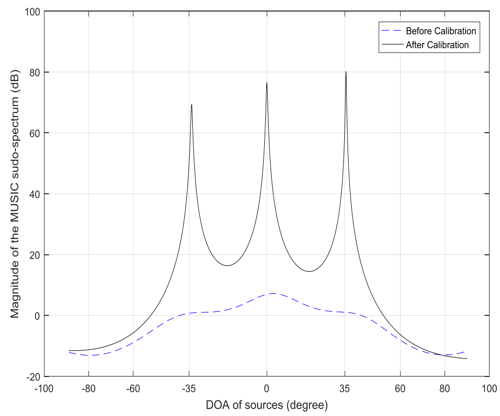
شکل (۴): تغییرات درصد موفقیت الگوریتم‌ها نسبت به SNR برای آشفتگی با انحراف معیار $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$. تعداد آزمایشات مونت کارلو $MC = 500$ و تعداد برداشت‌ها $K = 100$ بوده است. البته تعداد آزمایشات مونت کارلو برای الگوریتم SAGE برابر با $MC = 200$ بوده است.



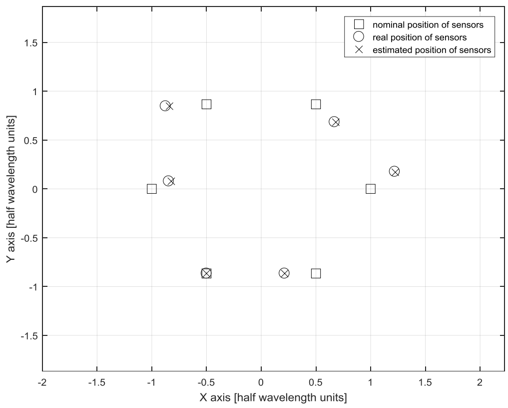
شکل (۵): تغییرات RMSE مکان المان‌ها نسبت به تعداد برداشت‌ها. تعداد آزمایشات مونت کارلو $MC = 500$ ، نسبت سیگنال به نویز $SNR = 0dB$ و $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$ می‌باشد. البته تعداد آزمایشات مونت کارلو برای الگوریتم SAGE برابر با $MC = 200$ بوده است.



شکل (۶): تغییرات درصد موفقیت الگوریتم‌ها نسبت به تعداد برداشت‌ها. تعداد آزمایشات مونت کارلو $MC = 500$ ، نسبت سیگنال به نویز $SNR = 0dB$ و $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$ می‌باشد. البته تعداد آزمایشات مونت کارلو برای الگوریتم SAGE برابر با $MC = 200$ بوده است.



شکل (۷): نمونه‌ای از تغییرات شبه-طیف میوزیک قبل و بعد از کالیبراسیون شکل آرایه با روش گوس-نیوتون. تعداد برداشت‌ها $K = 200$ ، نسبت سیگنال به نویز $SNR = 15dB$ و $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$ بوده است.



شکل (۸): نمونه‌ای از ساختار آرایه در سه حالت نامی، واقعی و تخمین‌زده‌شده توسط الگوریتم گوس-نیوتون. تعداد برداشت‌ها $K = 200$ ، نسبت سیگنال به نویز $SNR = 15dB$ و $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$ بوده است.

جدول (۱): میانگین زمان اجرا و درصد موفقیت الگوریتم‌ها

درصد موفقیت (٪)	میانگین زمان اجرا (ثانیه)	روش
۱۰۰	۱۲/۰۵	WF1
۶۴/۵	۴/۹۱	WF2
۹۹	۸/۸۹	MAP-NSF
۹۵	۱۴/۸۸	Proposed method
۱۰۰	۱۹۱/۷۲	SAGE

۶- نتیجه‌گیری

با استفاده از شکل‌های (۴-۱)، عملکرد الگوریتم‌ها در SNR های مختلف را می‌توان با یکدیگر مقایسه کرد. در همین شکل‌ها با دو برابر کردن انحراف معیار آشفتگی شکل آرایه، عملکرد الگوریتم‌ها در حضور آشفتگی‌های بزرگتر نیز قابل مشاهده است. با توجه به این چهار شکل مشاهده می‌شود که الگوریتم WF1 در تمام سناریوها و در تمام شرایط، عملکرد بهتری نسبت به بقیه الگوریتم‌ها دارد. الگوریتم‌های WF2 و SAGE در این مقایسه‌ها، بدترین عملکرد را از خود نشان داده‌اند.

می‌توان دید که در مقایسه دو الگوریتم WF2 و SAGE الگوریتم WF2 در SNRهای بالاتر از ۱۰dB مقدار RMSE به مراتب کوچکتری داشته است (به‌طور کلی در SNRهای بالا عملکرد الگوریتم SAGE خیلی بدتر از همه الگوریتم‌های دیگر است). اما نباید از این نکته غافل شویم که در تمام SNRها، خصوصاً در SNRهای پایین، درصد موفقیت الگوریتم SAGE به مراتب بیشتر از الگوریتم WF2 بوده است.

در مقایسه دو الگوریتم گوس-نیوتون و MAP-NSF می‌توان گفت که در SNRهای پایین‌تر از ۱۰dB عملکرد الگوریتم گوس-نیوتون اندکی بهتر بوده است. اما در آشفتگی‌های کوچک مثل زمانی که $\sigma_p = 0.1\lambda / 2$ است، می‌بینیم که الگوریتم MAP-NSF در SNRهای بالاتر، به‌صورت قابل توجهی عملکرد بهتری در کاهش خطای مکان المان‌ها از خود نشان می‌دهد. اما در آشفتگی‌های بزرگ، عملکرد دو الگوریتم به یکدیگر نزدیک است. به‌گونه‌ای که در SNRهای کمتر از ۱۵ dB عملکرد الگوریتم گوس-نیوتون بهتر بوده و در SNRهای بیشتر از این مقدار عملکرد الگوریتم MAP-NSF بهتر می‌باشد. بنابراین، در آشفتگی‌های بزرگ‌تر، برای SNRهای کوچکتر، الگوریتم گوس-نیوتون بر الگوریتم MAP-NSF ارجحیت دارد. لازم به ذکر است که در آشفتگی‌های بزرگتر همواره درصد موفقیت الگوریتم گوس-نیوتون بیشتر است.

در شکل‌های (۶-۵)، عملکرد الگوریتم‌ها در تعداد برداشت‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده است. با توجه به شکل (۵) مشاهده می‌شود که منحنی‌های RMSE برای الگوریتم‌های گوس- نیوتون، WF1 و SAGE به شکل درهم تنیده‌ای به یکدیگر نزدیک است. این نزدیکی حتی در منحنی‌های درصد موفقیت نیز وجود دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود الگوریتم‌های MAP-NSF و WF2 عملکرد ضعیف‌تری نسبت به سه الگوریتم دیگر از خود نشان داده‌اند، با این وجود مقادیر RMSE برای الگوریتم MAP-NSF همواره از الگوریتم WF2 کمتر است. گرچه در اکثر تعداد برداشت‌ها خصوصاً تعداد برداشت‌های پایین‌تر، درصد موفقیت WF2 اندکی بیشتر از MAP-NSF است.

باید گفت که اگر بخواهیم این پنج روش را به‌صورت کامل‌تری با یکدیگر مقایسه کنیم، لازم است که آنها را از لحاظ بار محاسباتی نیز با هم مقایسه کنیم. یکی از روش‌های انجام این مقایسه، تعریف یک سناریوی واحد برای همه الگوریتم‌ها، اجرای آن‌ها تحت شرایط یکسان و مقایسه آن‌ها از لحاظ میانگین زمان اجرای الگوریتم و نیز درصد موفقیت الگوریتم‌ها در انجام کالیبراسیون می‌باشد. نتایج چنین مقایسه‌ای در جدول (۱) آمده است. لازم به‌ذکر است که همه الگوریتم‌ها تحت شرایط یکسان و برای SNR=10dB ، آشفتگی با انحراف معیار $\sigma_p = 0.1\lambda / 2$، تعداد آزمایشات مونت کارلو MC=200 و تعداد برداشت‌ها K=100 بوده است.

همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌شود، الگوریتم WF2 سریع‌ترین و الگوریتم SAGE با اختلافی بسیار زیاد نسبت به دیگر الگوریتم‌ها، کندترین الگوریتم می‌باشد. البته درصورتی‌که درصد موفقیت الگوریتم‌ها در این مقایسه آورده نشود ممکن است نتیجه اشتباهی گرفته شود بنابراین، با توجه به درصد موفقیت الگوریتم‌ها درمیابیم که بهترین نتیجه را الگوریتم MAP-NSF از خود نشان داده است و پس از آن الگوریتم WF1 و روش پیشنهادی با اندکی اختلاف به ترتیب در مقام‌های دوم و سوم هستند. با وجود این‌که الگوریتم SAGE توانسته در این SNR و این مقدار آشفتگی، موفقیت ۱۰۰ درصدی داشته باشد اما به علت بار محاسباتی بسیار سنگین آن نسبت به الگوریتم WF2 جذابیت بسیار کمتری دارد.

لازم است توجه شود که این مقایسه در $\sigma_p = 0.1\lambda / 2$ صورت‌پذیرفته حال آن‌که اگر در $\sigma_p = 0.2\lambda / 2$ صورت می‌گرفت درصد موفقیت الگوریتم MAP-NSF طبق نتایج شکل (۴) به‌مراتب کمتر از الگوریتم پیشنهادی به‌دست می‌آمد. همان‌طور که قبلاً نیز در توضیح روش MAP-NSF آمده است، این روش در مرحله تخمین متغیرهای مجهول از یک رابطه با فرم بسته استفاده می‌کند که همین امر سبب سرعت بالای آن در کالیبراسیون و تخمین متغیر می‌گردد. البته این فرم بسته با فرض موجود بودن اطلاعات پیشین از تابع چگالی احتمال آشفتگی به‌دست‌آمده که با افزایش انحراف معیار آشفتگی خطای به‌وجود آمده در تخمین متغیرها افزایش می‌یابد و در نتیجه نتایج شکل (۴) پیدا می‌شوند.

۷- منابع

[1] M. Viberg and B. Ottersten, "Sensor Array Processing Based on Subspace Fitting," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 39, no. 5, pp. 1110−1121, May 1991.

[2] M. Viberg, "Subspace Fitting Concepts in Sensor Array Processing," PhD Thesis, Linkoping University, Linkoping, Sweden, 1989.

[3] B. E. Ottersten, "Parametric Subspace Fitting Methods for Array Signal Processing," PhD Thesis, Stanford University, Stanford, 1989.

[4] A. Gholipour, B. Zakeri, and Kh. Mafinezhad, "Near-Field Source Localization in Non-homogeneous Envirements," Journal of Radar," vol. 4, no. 1, 2016.

[5] A. J. Weiss and B. Friedlander, "Array shape calibration using sources in unknown locations- A maximum likelihood approach," IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 37, no. 12, pp. 1958−1966, Dec. 1989.

[6] A. J. Weiss and B. Friedlander, "Array shape calibration using eigenstructure methods," Signal Processing, vol. 22, no. 3, pp. 251−258, Mar. 1991.

[7] M. Viberg and A. L. Swindlehurst, "A Bayesian approach to auto-calibration for parametric array signal

processing," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 42, no. 12, pp. 3495−3507, Dec. 1994.

[8] S. Wan, "Parametric Array Calibration," PhD thesis, Edinburgh University, Edinburgh, UK, 2011.

[9] J. A. Fessler and A. O. Hero, "Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 42, no. 10, pp. 2664−2677, Oct. 1994.

[10] P. J. Chung and J. F. Bohme, "Comparative convergence analysis of EM and SAGE algorithms in DOA estimation," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 49, no. 12, pp. 2940−2949, 2001.

[11] B. Ottersten, M. Viberg, P. Stoica, and A. Nehorai, "Exact and Large Sample ML Techniques for Parameter Estimation and Detection in Array Processing," In Radar Array Processing, Haykin, Litva, and Shepherd, editors, pp. 99-151, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[12] H. L. Van Trees, "Optimum Array Processing," Wiley-Interscience, New York, 2002.

[13] J. E. Dennis and R. B. Schnabel, "Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[14] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright, "Practical Optimization," Academic, London, 1981.

[15] S. G. Nash and A. Sofer, "Linear and Nonlinear Programming," McGraw-Hill, New York, 1996.

[16] P. Stoica and A. Nehorai, "Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation," IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 38, no. 10, pp. 1783−1795, Oct. 1990.

[17] F. Eskandari, "Array Shape Self-calibration Using Subspace Fitting Methods," M.Sc Thesis, School of Electrical and Computer Shiraz University.(In Persian)

پیوست الف. محاسبه ماتریس‌های دیفرانسیل برای مکان حسگرها و بهره و فاز آن‌ها

با مهیا بودن مؤلفه i اُم از بردار گرادیان و مؤلفه (i,j) اُم از ماتریس هسین، برای سه تخمین‌گر SML ،DML و WSF، بسته به اینکه متغیر تحت تخمین $\boldsymbol{\theta}$ یا $\mathbf{y},\mathbf{x}$ یا $\boldsymbol{\varphi},\mathbf{g}$ باشد، فرم بردار گرادیان و ماتریس هسین متفاوت خواهد شد. چراکه مشتق ماتریس $\mathbf{A}$ نسبت به هرکدام از این متغیرها متفاوت است. بنابراین، با انتخاب مناسب $\mathbf{A}_i$ و $\mathbf{A}_j$ برای هرکدام از این متغیرهای تحت تخمین، مراحل محاسبه بردار گرادیان و ماتریس هسین را تکمیل می‌کنیم. مشتق‌گیری از ماتریس $\mathbf{A}$ نسبت به هرکدام از متغیرهای مربوط به حسگرها، ماتریسی با تنها یک سطر غیرصفر متناظر با شماره حسگر مربوط به‌دست خواهد داد و مشتق‌گیری از ماتریس $\mathbf{A}$ نسبت به θ_q، به ماتریسی با تنها یک ستون غیرصفر متناظر با θ_q منجر خواهد شد.

بنابراین، در صورتی که بخواهیم زاویه ورود سیگنال منابع را تخمین بزنیم، به‌جای $\mathbf{A}_i$ ماتریس $\mathbf{D}_\theta \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T$ و به‌جای $\mathbf{A}_j$ ماتریس $\mathbf{D}_\theta \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T$ را در روابط (۲۳) تا (۲۸) جایگزین می‌کنیم. در صورتی که بخواهیم مکان حسگرها را تخمین بزنیم با جایگذاری $\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}_x$، $\mathbf{A}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{D}_x$، $\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}_y$ و $\mathbf{A}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{D}_y$ در روابط مذکور، بردار گرادیان و ماتریس هسین را محاسبه می‌نماییم. همچنین درصورتی که بخواهیم متغیرهای $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{g}$ را تخمین بزنیم با جایگذاری $\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}_g$، $\mathbf{A}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{D}_g$، $\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}_\varphi$ و $\mathbf{A}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{D}_\varphi$ در همان روابط، بردار گرادیان و ماتریس هسین را برای هرکدام از متغیرها به‌دست می‌آوریم.

در اینجا بردار ستونی $\mathbf{e}_i$ یک بردار پایه‌ای نامیده می‌شود که عنصر i اُم آن یک بوده و بقیه عناصر آن صفر است. در اینجا لازم است که ابتدا با مشتق‌گیری از ماتریس $\mathbf{A}$ نسبت به هرکدام از متغیرها، ماتریس‌های $\mathbf{D}_\theta$، $\mathbf{D}_x$، $\mathbf{D}_y$، $\mathbf{D}_g$ و $\mathbf{D}_\varphi$ را محاسبه نماییم. ماتریس $\mathbf{A}$ و ستون‌های آن برای مسئله مورد نظر ما به فرم کلی زیر هستند.

$$\begin{aligned}&\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}(\theta_1,\boldsymbol{\rho}),\ldots,\mathbf{a}(\theta_Q,\boldsymbol{\rho})\right]\\&\mathbf{a}(\theta_q,\boldsymbol{\rho}) = \left[\mathrm{a}_1(\theta_q,\boldsymbol{\rho}),\ldots,\mathrm{a}_M(\theta_q,\boldsymbol{\rho})\right]^T\end{aligned} \quad \text{(الف-۱)}$$

که هرکدام از عناصر این ماتریس را می‌توان به این صورت مدل کرد:

$$\mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho}) = \mathrm{g}_m \exp(j\varphi_m)\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_m\sin(\theta_q)+\\ \mathrm{y}_m\cos(\theta_q)\end{pmatrix}\right) \quad \text{(الف-۲)}$$

مشتق‌گیری از عناصر ماتریس $\mathbf{A}$ نسبت به متغیرهای مورد نظر، نتایج زیر را به‌دست خواهد داد:

$$\frac{\partial \mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho})}{\partial \mathrm{x}_m} = j\frac{2\pi}{\lambda}\sin(\theta_q)\,\mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho}) \quad \text{(الف-۳)}$$

$$\frac{\partial \mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho})}{\partial \mathrm{y}_m} = j\frac{2\pi}{\lambda}\cos(\theta_q)\,\mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho}) \quad \text{(الف-۴)}$$

$$\frac{\partial \mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho})}{\partial \theta_q} = j\frac{2\pi}{\lambda}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_m\cos(\theta_q)-\\ \mathrm{y}_m\sin(\theta_q)\end{pmatrix}\mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho}) \quad \text{(الف-۵)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho})}{\partial \mathrm{g}_m} &= \exp(j\varphi_m)\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_m\sin(\theta_q)+\\ \mathrm{y}_m\cos(\theta_q)\end{pmatrix}\right)\\ &= \arg\left\{\mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho})\right\}\end{aligned} \quad \text{(الف-۶)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho})}{\partial \varphi_m} &= j\mathrm{g}_m\exp(j\varphi_m)\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_m\sin(\theta_q)+\\ \mathrm{y}_m\cos(\theta_q)\end{pmatrix}\right)\\ &= j\mathrm{a}_m(\theta_q,\boldsymbol{\rho})\end{aligned} \quad \text{(الف-۷)}$$

با استفاده از روابط (الف-۳) تا (الف-۷) می‌توان ماتریس های $\mathbf{D}_\theta$، $\mathbf{D}_x$، $\mathbf{D}_y$، $\mathbf{D}_g$ و $\mathbf{D}_\varphi$ را اینگونه به‌دست آورد:

$$\mathbf{D}_\theta = j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{A} \odot (\mathbf{BC})$$
(الف-۸)

$$\mathbf{D}_x = j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{A}\,\mathrm{Diag}\left[\sin(\theta_1),\ldots,\sin(\theta_Q)\right]$$
(الف-۹)

$$\mathbf{D}_y = j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{A}\,\mathrm{Diag}\left[\cos(\theta_1),\ldots,\cos(\theta_Q)\right]$$
(الف-۱۰)

$$\mathbf{D}_g = \mathbf{A}\big|_{g_m=1} \qquad \text{for} \quad m = 1,2,\ldots,M$$
(الف-۱۱)

$$\mathbf{D}_\varphi = j\mathbf{A}$$
(الف-۱۲)

که ماتریس‌های $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ در رابطه (الف-۸) به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_M \\ y_1, y_2, \ldots, y_M \end{bmatrix}^T$$
(الف-۱۳)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \ldots & \cos(\theta_Q) \\ -\sin(\theta_1) & \ldots & -\sin(\theta_Q) \end{bmatrix}$$
(الف-۱۴)

حال با توجه به محاسبه مشتق ماتریس $\mathbf{A}$ نسبت به هر پنج متغیر مورد نظر می‌توانیم بردار گرادیان و ماتریس هسین را برای هر تخمین‌گر از جمله تخمین‌گرهای مکان المان‌ها و گین و فاز آنها به‌دست آوریم.

پیوست ب. محاسبه بردار گرادیان و ماتریس هسین در حالت تخمین مکان المان‌ها و گین و فاز آنها

در پیوست (ب) میخواهیم که با جایگذاری $\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}_x$ و $\mathbf{A}_j = \mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{D}_x$ در روابط (۲۳) تا (۲۸) و اندکی استفاده از روابط مربوط به جبر ماتریسی، بردار گرادیان و ماتریس هسین را در حالت تخمین مکان حسگرها به‌دست آوریم.

ب-۱ : تخمین‌گر SML:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{SML}}{\partial x_m} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^\perp\mathbf{A}_m\right\}\right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\right\}\right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m\right\}\right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m\right\}\end{aligned}$$
(ب-۱)

$$V'_{SML,x} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{D}_x\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^\perp\right]\right\}$$
(ب-۲)

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}_{SML,x}\right]_{ij} &= 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\left[\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\right]\left[\mathbf{A}_j^H\mathbf{P}^\perp\mathbf{A}_i\right]\right\}\right\} \\ &= 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}_x\right\}\right\} \\ &= 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}_x\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^T\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_i\right)\right\}\right\} \\ &= 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}_x\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^T\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_i\right)\right\}\end{aligned}$$
(ب-۳)

$$\mathbf{H}_{SML,x} = 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{D}_x\mathbf{G}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\mathbf{D}_x^H\right) \odot \mathbf{P}^\perp\right\}$$
(ب-۴)

ب-۲ : تخمین‌گر DML:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{DML}}{\partial x_m} &= -\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{P}^\perp\mathbf{A}_m\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{A}_m^H\mathbf{P}^\perp\right)\hat{\mathbf{R}}\right\} \\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T\mathbf{P}^\perp\hat{\mathbf{R}}\right\} \\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m^T\mathbf{P}^\perp\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_m\right\} \\ &= -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m\right\}\end{aligned}$$
(ب-۵)

$$V'_{DML,x} = -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^\perp\right]\right\}$$
(ب-۶)

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}_{DML,x}\right]_{ij} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{A}_i^H\mathbf{P}^\perp\mathbf{A}_j\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}}\right\}\right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}}\right\}\right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{e}_i^T\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_i\right)\right\}\right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{e}_i^T\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_i\right)\right\}\end{aligned}$$
(ب-۷)

$$\mathbf{H}_{DML,x} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{P}^\perp \odot \left(\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_x^H\right)^T\right\}$$
(ب-۸)

ب-۳ : تخمین‌گر WSF:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{WSF}}{\partial x_m} &= -\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{P}^\perp\mathbf{A}_m\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{A}_m^H\mathbf{P}^\perp\right)\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^H\right\} \\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T\mathbf{P}^\perp\right)\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^H\right\} \\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^H\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m + \\ \mathbf{e}_m^T\mathbf{P}^\perp\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^H\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_x^H\mathbf{e}_m\end{pmatrix}\right\} \\ &= -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{e}_m^T\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^H\mathbf{P}^\perp\mathbf{e}_m\right\}\end{aligned}$$
(ب-۹)

$$V'_{WSF,x} = -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{D}_x\mathbf{A}^\dagger\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^H\mathbf{P}^\perp\right]\right\}$$
(ب-۱۰)

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}_{\mathrm{WSF},\mathbf{x}}\right]_{ij} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{A}_i^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_j\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{H}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{H}\mathbf{e}_i\right)\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{H}\mathbf{e}_i\right)\right\}\end{aligned}$$

(ب-۱۱)

$$\mathbf{H}_{\mathrm{WSF},\mathbf{x}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{P}^{\perp}\odot\left(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{H}\right)^{T}\right\} \quad \text{(ب-۱۲)}$$

روابطی که تا اینجا در پیوست (ب) به‌دست آمدند برای متغیرهای $\mathbf{y}$، $\mathbf{g}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ نیز عیناً به همین شکل خواهند بود، فقط کافی است که به جای $\mathbf{D}_x$ در آنها $\mathbf{D}_y$، $\mathbf{D}_g$ و $\mathbf{D}_{\varphi}$ قرار گرفته شود. اما برای متغیر $\boldsymbol{\theta}$ روابط مذکور باید از نو محاسبه شوند چراکه فرم آنها اندکی متفاوت خواهد بود.

پیوست پ. محاسبه بردار گرادیان و ماتریس هسین در حالت تخمین زاویه ورود سیگنال‌ها

در این پیوست با جایگذاری $\mathbf{A}_i = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}$ و $\mathbf{A}_j = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^{T}$ در روابط (۲۳) تا (۲۸) و اندکی استفاده از روابط مربوط به جبر ماتریسی، بردار گرادیان و ماتریس هسین را در حالت تخمین زاویه ورود سیگنال‌ها به‌دست می‌آوریم.

الف. تخمین‌گر SML:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{V}_{\mathrm{SML}}}{\partial\theta_{\mathbf{i}}} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_i\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\right\}\end{aligned} \quad \text{(پ-۱)}$$

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{SML},\boldsymbol{\theta}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right]\right\} \quad \text{(پ-۲)}$$

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}_{\mathrm{SML},\boldsymbol{\theta}}\right]_{ij} &= 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\left[\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\right]\left[\mathbf{A}_j^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_i\right]\right\}\right\}\\ &= 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\right\}\right\}\\ &= 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\right\}\right\}\\ &= 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\right)\right\}\end{aligned} \quad \text{(پ-۳)}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{SML},\boldsymbol{\theta}} = 2\hat{\sigma}^2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{G}^{H}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{G}\right)\odot\left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right)^{T}\right\} \quad \text{(پ-۴)}$$

ب. تخمین‌گر DML:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{V}_{\mathrm{DML}}}{\partial\theta_{i}} &= -\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_i\mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{A}_i^{H}\mathbf{P}^{\perp}\right)\hat{\mathbf{R}}\right\}\\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right\}\\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\right\}\\ &= -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\right\}\end{aligned} \quad \text{(پ-۵)}$$

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{DML},\boldsymbol{\theta}} = -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right]\right\} \quad \text{(پ-۶)}$$

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}_{\mathrm{DML},\boldsymbol{\theta}}\right]_{ij} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{A}_i^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_j\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\right)\right\}\end{aligned} \quad \text{(پ-۷)}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{DML},\boldsymbol{\theta}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right)\odot\left(\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\dagger H}\right)^{T}\right\} \quad \text{(پ-۸)}$$

ج. تخمین‌گر WSF:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{V}_{\mathrm{WSF}}}{\partial\theta_{i}} &= -\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_i\mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{A}_i^{H}\mathbf{P}^{\perp}\right)\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\right\}\\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\begin{matrix}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H} + \\ \mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\end{matrix}\right\}\\ &= -\mathrm{Tr}\left\{\begin{matrix}\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i + \\ \mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\end{matrix}\right\}\\ &= -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_i\right\}\end{aligned} \quad \text{(پ-۹)}$$

$$\mathrm{V}'_{\mathrm{WSF},\boldsymbol{\theta}} = -2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Diag}\left[\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right]\right\} \quad \text{(پ-۱۰)}$$

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}_{\mathrm{WSF},\boldsymbol{\theta}}\right]_{ij} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{A}_i^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{A}_j\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\right\}\right\}\\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{e}_i^{T}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{e}_j\right)\left(\mathbf{e}_j^{T}\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{A}^{\dagger H}\mathbf{e}_i\right)\right\}\end{aligned} \quad \text{(پ-۱۱)}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{WSF},\boldsymbol{\theta}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^{H}\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\right)\odot\left(\mathbf{A}^{\dagger}\hat{\mathbf{E}}_S\mathbf{W}_{opt}\hat{\mathbf{E}}_S^{H}\mathbf{A}^{\dagger H}\right)^{T}\right\} \quad \text{(پ-۱۲)}$$

Journal of "Radar"
Vol. 6, No. 2, 2019 (Serial No. 20)

Array Shape Self-Calibration Using Subspace Fitting Methods

F. Eskandari, M. Karimi*
*Shiraz University

(Received: 15/09/2018, Accepted: 16/04/2019)

Abstract

Estimating the direction of arrival and beamforming are among the most important issues in array signal processing for which a variety of methods have been proposed. With few exceptions, these methods require an exact knowledge of array response including the knowledge of sensors' positions, sensors' gain/phase responses and mutual coupling coefficients between sensors. There are uncertainties about these array response parameters as we usually have their nominal values which are different from the actual metrics. The performance of DOA estimation and beamforming algorithms degrade severely because of these uncertainties. To solve this problem and reduce the performance degradation, it is necessary to estimate these unknown parameters. In this paper, we use simulations to study and compare the performance of several so-called self-calibration methods in the presence of array shape error. However, before performance investigation, it is attempted to improve the performance of these methods by manipulating their structure. In addition, in this paper, a self-calibration method based on the gradient search is proposed. Various simulations are used to evaluate the performance of this method and compare it with other self-calibration methods.

Keywords: Direction-of-Arrival Estimation, Array Response, Array Shape Self-Calibration, Subspace Fitting

* Corresponding author E-mail: karimi@shirazu.ac.ir