

## تحلیل انتقال حرارت ناپایای متحرک دوبعدی در لوله سلاح با

### استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی

حسین لکزیان<sup>۱</sup> و امیر یوسفی<sup>۲</sup>

مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت

دانشگاه صنعتی مالک اشتر

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۸)

#### چکیده

در این پژوهش پدیده انتقال حرارت درون لوله سلاح به صورت دوبعدی و گذرا با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی مورد بررسی قرار گرفت. برای اعمال شرایط کلی در دامنه حل، حجم داخل لوله به دو ناحیه مجزا تقسیم شد. بخشی در معرض سیال با دما و فشار بالا ناشی از احتراق خرج پرتاب بوده و بخشی نیز در معرض سیال در شرایط محیط در نظر گرفته شد. با گذشت زمان، مرز جداکننده دو ناحیه (گلوله) به جلو حرکت می‌کند. بنابراین، حجم اشغال شده توسط سیال ناحیه پشتی افزایش و حجم اشغال شده توسط سیال ناحیه جلویی کاهش می‌یابد. شرط مرزی گره‌های واقع در جداره داخلی در هر گام زمانی با توجه به موقعیت محوری گلوله تعیین می‌گردند. گره‌های واقع شده در قسمت پشتی گلوله دارای شرط مرزی سیال با دما و فشار بالا بوده و گره‌های واقع شده در قسمت جلویی نیز دارای شرط مرزی سیال در محیط هستند. با توجه به شرایط عنوان شده، از معادله کلی انتقال حرارت ناپایا در مختصات استوانه‌ای برای شبیه‌سازی استفاده گردید و توزیع دمای لوله سلاح تحت شلیک‌های متناوب استخراج شد. در پایان از یک پژوهش تجربی برای بررسی صحت روش ارائه شده استفاده گردید. با مقایسه نتایج، دقت بالای روش ارائه شده قابل ملاحظه بود. از نتایج این پژوهش می‌توان برای تحلیل تنش لوله سلاح و تخمین میزان خوردگی و عمر آن استفاده کرد.

**واژه‌های کلیدی:** تربیع دیفرانسیلی، انتقال حرارت ناپایا، متقارن محوری

## A two Dimensional Moving Transient Heat Transfer in a Gun Tube using Differential Quadrature Method

H. Lexian

A. Yousefi

Metallurgy and Manufacturing Technologies Faculty

Malek Ashtar University of Technology

(Received: 09/April/2019 ; Accepted: 28/January /2020)

#### Abstract

In this study a heat transfer phenomena in a gun tube using Differential Quadrature Method was examined. The phenomena was dealt in a two dimensional transient manner. In order to apply a general condition to the problem, the internal volume of the cylinder was divided into two distinct zones. One zone was exposed to a fluid with high temperature and high pressure conditions due to the burning of the propellant. The other zone was exposed to a fluid in environmental condition. As the time passes, the bullet moves toward the front zone. Therefore the volume of the rear zone increases, while the volume of the front zone decreases. The boundary conditions of the internal boundary nodes are determined due to the axial position of the bullet. The boundary condition of the nodes located in the rear zone are set to the high temperature and high pressure fluid, while the boundary condition of the front nodes is set to standstill fluid conditions. According to the mentioned conditions, general transient heat conduction equation in cylindrical coordinate was utilized and temperature distribution of the gun tube was extracted for numerous rounds. Finally an experimental study was examined to validate the proposed method. A comparison between the simulation results and experimental results shows a high consistency between them. The results of this study can be used for stress analysis of gun tube and estimation of its erosion and lifetime.

**Keywords:** Differential Quadrature, Unsteady Heat Transfer, Axisymmetric

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): Lexian@mut.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: amiryousefi92@gmail.com

## فهرست علائم و اختصارات

$A$	مساحت، $m^2$
$E$	مدول الاستیسیته، $N/m^2$
$C_p$	ظرفیت گرمایی ویژه، $J/kg.K$
$T$	دما، $K$
$t$	زمان، $s$
$r$	شعاع، $m$
$k$	ضریب رسانش گرمایی، $W/m.K$
$C_{i,j}^{(1)}$	ماتریس ضرایب
$\bar{C}_{i,j}^{(1)}$	ماتریس ضرایب
$C_{i,j}^{(2)}$	ماتریس ضرایب
$\bar{C}_{i,j}^{(2)}$	ماتریس ضرایب
$Fo$	عدد بی بعد فوریه
$N_L$	تعداد گره‌ها در راستای محوری
$N_R$	تعداد گره‌ها در راستای شعاعی
$R_{in}$	شعاع داخلی لوله سلاح، $m$
$R_{out}$	شعاع خارجی لوله سلاح، $m$
$z_b$	موقعیت محوری گلوله، $m$

## علائم یونانی

$\alpha$	ضریب پخش حرارتی
$\rho$	چگالی، $kg/m^3$

## زیرنویس

$g$	گازهای حاصل از احتراق
-----	-----------------------

## بالانویس

$b$	گلوله
$n-1$	شرایط در گام زمانی قبلی
$n$	شرایط در گام زمانی حاضر
$n+1$	شرایط در گام زمانی بعد

## ۱- مقدمه

امروزه با توجه به توسعه روزافزون دانش مهندسی مکانیک، از آن برای حل مسائل در زمینه‌های مختلف استفاده می‌گردد. طراحی و تحلیل ادوات نظامی را می‌توان به‌عنوان یکی از زمینه‌های کاربردی این دانش نام برد. در تجهیزات نظامی همچون تفنگ‌ها و توپ‌ها یک ماده انفجاری در انتهای لوله سلاح منفجر شده و باعث حرکت پرتابه در درون لوله می‌شود.

به‌طورکلی فرآیند شلیک گلوله در سلاح‌ها به بازه‌های مختلف تقسیم می‌شود. پس از یک انفجار اولیه در ابتدای لوله، دما و فشار پشت گلوله افزایش می‌یابد. با این افزایش دما و فشار، گلوله شروع به حرکت در درون لوله می‌نماید. به بازه زمانی که گلوله در درون لوله قرار دارد بالستیک درونی<sup>۱</sup> گفته می‌شود. در ادامه با حرکت گلوله به سمت جلو، گلوله به دهانه لوله نزدیک شده و از لوله خارج می‌شود؛ با خروج گلوله از درون لوله، گازهای حاصل از احتراق نیز از لوله خارج شده و در هوای آزاد پخش می‌شوند. به بازه زمانی که گلوله در نزدیکی دهانه لوله قرار دارد نیز بالستیک میانی<sup>۲</sup> گفته می‌شود. با گذشت زمان گلوله از لوله دور شده و در محیط آزاد حرکت می‌کند؛ این بازه نیز با عنوان بالستیک بیرونی<sup>۳</sup> شناخته می‌شود. محققین در کارهای جداگانه به بررسی هریک از این بازه‌ها پرداخته‌اند. در این میان پژوهش‌های متعددی موضوعات مختلفی همچون انتقال حرارت در بدنه سلاح [۱]، تنش و کرنش [۲] لوله سلاح و نیز خوردگی [۳] را مورد بررسی قرار داده‌اند. از این میان پدیده انتقال حرارت در لوله سلاح توجه ویژه‌ای را به خود جلب نموده است. پدیده انتقال حرارت در این‌گونه مسائل با توجه به ماهیت گذرای فرآیند، متغیر بودن شرایط مرزی و نیز سرعت بالای آن، پدیده‌ای پیچیده محسوب می‌شود. پژوهش‌های انجام‌شده در مورد این پدیده به شیوه‌های تجربی [۴]، تحلیلی [۵] و عددی [۶] صورت گرفته است.

از نخستین کارهای صورت گرفته در زمینه انتقال حرارت در لوله سلاح می‌توان به پژوهش مولر و همکاران [۴] اشاره نمود. آن‌ها در این پژوهش به بررسی تجربی دمای لوله سلاح ۷/۶۲mm پرداختند. در این تحقیق شش ترموکوپل در نقاط مختلف در داخل لوله سلاح و نیز دو ترموکوپل در قسمت خارجی لوله سلاح قرار داده شد. سپس به شلیک ۱۲۵ گلوله به‌صورت متوالی مبادرت شده و دماهای اندازه‌گیری شده در نقاط ترموکوپل جمع‌آوری شده است. این پژوهش به‌عنوان یکی از مراجع معتبر برای صحت‌سنجی

1- Internal Ballistics  
2- Intermediate Ballistics  
3- External Ballistics

پیشنهادی خود را برای حالت بدون خنک‌سازی درونی بررسی کرده و با مقایسه با نتایج تجربی از صحت روش اطمینان حاصل نمودند؛ در ادامه با استفاده از روش پیشنهادی انتقال حرارت در سلاح با خنک‌سازی میانی را مورد ارزیابی قرار دادند.

همان‌طور که در بالا مشاهده شد، تحلیل انتقال حرارت لوله سلاح همواره یکی از مسائل مهم و اساسی در زمینه طراحی سلاح به‌منظور تحلیل تنش دقیق‌تر لوله سلاح و همچنین استخراج میزان خوردگی و عمر لوله سلاح بوده و هست. در این میان این تحلیل‌ها غالباً به‌صورت یک‌بعدی گذرا بررسی شده است و حالت دوبعدی آن فقط با استفاده از تحلیل المان محدود انجام شده است. با توجه به دقت به‌مراتب بالاتر روش تربیع دیفرانسیلی<sup>۱</sup> نسبت به روش المان محدود، در این پژوهش با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی به بررسی پدیده انتقال حرارت در لوله سلاح پرداخته شده است. برای این منظور معادله انتقال حرارت در مختصات استوانه‌ای مورد استفاده قرار گرفت. مسئله به‌صورت متقارن محوری دوبعدی در نظر گرفته شد. با توجه به این‌که ویژگی‌های ترموفیزیکی بدنه سلاح وابسته به دما هستند، این ویژگی‌ها به‌صورت متغیر در نظر گرفته شد. برای اعمال شرایط مرزی در داخل لوله سلاح نیز مقادیر دما و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی برای گازهای حاصل از احتراق به‌عنوان ورودی برای حل مسئله مورد استفاده قرار گرفت.

## ۲- معادلات حاکم

معادله کلی انتقال حرارت رسانشی ناپایا در مختصات استوانه‌ای را می‌توان به شکل معادله (۱) نوشت [۱۶]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1)$$

سمت چپ معادله (۱) بیانگر گذرا بودن پدیده است. در سمت راست تساوی نیز سه عبارت جداگانه وجود دارد. این عبارات به ترتیب نشان‌دهنده انتقال حرارت در راستاهای شعاعی، زاویه‌ای و محوری هستند.

روش‌های تحلیلی در مقالات مختلف مورد استفاده قرار گرفته است.

برخی دیگر از محققین [۱] نیز پدیده را به‌صورت تحلیلی مورد ارزیابی قرار داده‌اند. کوپر میدان دمایی یک استوانه توخالی تحت شار هارمونیک را مورد بررسی قرار داد. لو و همکاران [۷] به بررسی تحلیلی انتقال حرارت در یک لوله کامپوزیتی پرداختند. آن‌ها برای این منظور به حل معادله انتقال حرارت در مختصات استوانه‌ای با فرض تقارن محوری پرداختند. روش ارائه‌شده توسط آن‌ها به پاسخ گذرای میدان دمایی یک سیلندر کامپوزیتی منتج شد. پژوهش‌های دیگری نیز به‌صورت تحلیلی به بررسی این پدیده پرداخته‌اند [۵، ۸-۱۰].

با توسعه روزافزون رایانه‌ها استفاده از روش‌های عددی برای حل مسائل نیز با اقبال زیادی روبه‌رو شد. بسیاری از محققین با استفاده از روش‌های عددی به حل مسئله انتقال حرارت در بدنه سلاح مبادرت کردند. سوت و کارتر [۱۱] با استفاده از روش المان محدود به شبیه‌سازی میدان دمایی در سلاح M ۲۵۶ کالیبر ۱۲۰ mm پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش المان محدود به حل دوبعدی مسئله انتقال حرارت پرداختند. برای بررسی صحت روش ارائه‌شده، ابتدا مسئله معیار با جنس استیل را شبیه‌سازی نمودند، سپس روش ارائه‌شده را برای بدنه متشکل از چند جنس متفاوت گسترش دادند. آن‌ها در پژوهش خود از نرم‌افزار انسیس برای شبیه‌سازی استفاده نمودند. چن و همکاران [۱۲] روشی معکوس ارائه نمودند. آن‌ها موفق شدند به‌صورت یک‌بعدی مقادیر شار ورودی متغیر با زمان که به دیواره لوله وارد می‌شود و نیز دمای سطح داخلی لوله را محاسبه کنند. نلسون و وارد [۱۳] با استفاده از کد دوفازی NOVA به بررسی انتقال حرارت در لوله سلاح ۱۵۵ mm پرداختند. آکسای و یوکسلن [۱۴] پدیده انتقال حرارت درون لوله سلاح را به‌صورت گذرا و با استفاده از روش تفاضل محدود مورد بررسی قرار دادند و توزیع دما در جداره سلاح را به‌دست آوردند. آن‌ها همچنین به بررسی دمای جداره سلاح در چند شلیک متوالی پرداختند. در پژوهش صورت گرفته توسط آن‌ها خواص ترمودینامیکی بدنه سلاح به‌صورت تابعی از دما در نظر گرفته شد. میشر و همکاران [۱۵] به بررسی یک‌بعدی انتقال حرارت در یک سلاح نمونه با خنک‌سازی درونی در جداره لوله پرداختند. آن‌ها در ابتدا روش

بالانویس‌های  $n$  در رابطه (۵) نشان‌دهنده مقادیر در گام زمانی قبل بوده و همگی معلوم هستند. بالانویس  $n+1$  نیز بیانگر مقادیر در گام زمانی فعلی بوده و مجهول هستند.

برای حل معادلات به روش تربیع دیفرانسیلی می‌توان از سه رویکرد متفاوت برای شبکه‌بندی مسئله استفاده نمود: شبکه‌بندی یکنواخت، شبکه‌بندی به روش چبیشف گاوس لوباتو<sup>۱</sup> و شبکه‌بندی بر اساس نقاط انتخاب‌شده به‌عنوان ریشه‌های معادله چبیشف<sup>۲</sup> [۱۷]. در این پژوهش از روش چبیشف گاوس لوباتو برای شبکه‌بندی مسئله موردبررسی استفاده گردید. در این روش مختصات نقاط گره‌ای در راستای شعاعی از رابطه (۶) به‌دست می‌آیند:

$$r_i = R_{in} + \frac{R_{out} - R_{in}}{2} \left( 1 - \cos \left( \pi \frac{i-1}{N-1} \right) \right) \quad (6)$$

برای تعیین مختصات گره  $i$  در راستای محوری نیز از رابطه (۷) استفاده شده است:

$$Z_i = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{(i-1) * \pi}{NL-1} \right) \right] \quad (7)$$

در روش صریح، برخلاف روش ضمنی، پایداری حل وابستگی زیادی به گام زمانی انتخاب‌شده دارد. به‌طوری‌که انتخاب گام زمانی بزرگ منجر به واگرایی پاسخ می‌شود. برای این منظور عدد بی‌بعد فوریه به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (8)$$

که در رابطه (۸) پارامتر  $\alpha$  بیان‌گر پخش حرارتی در بدنه سلاح است. برای همگرایی حل در حالت دوبعدی می‌بایست شرایط معادله (۹) برقرار باشند [۱۸]:

$$Fo \leq \frac{1}{4} \quad \text{for } 2D \quad (9)$$

برای ارضای این شرط باید کمترین مقدار گام زمانی که در دو راستای شعاعی و محوری مطابق معادلات (۱۰) به‌دست می‌آیند، انتخاب شود:

با توجه به این‌که ضریب انتقال حرارت رسانشی وابسته به دما است، می‌توان جمله شعاعی در معادله (۱) را به‌صورت رابطه (۲) بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left[ r \frac{\partial k(T)}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + k(T) \frac{\partial T}{\partial r} + k(T) r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \\ &= \frac{\partial k(T)}{\partial T} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} k(T) \frac{\partial T}{\partial r} + k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (2)$$

با در نظر گرفتن فرض متقارن محوری در حل این مسئله، جمله انتقال حرارت زاویه‌ای برابر با صفر می‌شود:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3)$$

جمله انتقال حرارت محوری را نیز می‌توان به‌صورت رابطه (۴) بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial k(T)}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial k(T)}{\partial T} * \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4)$$

نخستین گام در حل عددی معادلات حاکم، گسسته‌سازی این معادلات است. برای این منظور ترم زمانی معادله (۱) از رویکرد صریح استفاده گردید. در این رویکرد برای محاسبه مجهولات در هر گام زمانی از مقادیر معلوم متناظر در گام‌های زمانی قبلی استفاده می‌شود. با استفاده از رویکرد صریح می‌توان معادله (۱) را با جایگذاری روابط (۲) تا (۴) به‌صورت رابطه (۵) نوشت:

$$\begin{aligned} & \rho C (T^n) \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \\ & \frac{\partial k(T^n)}{\partial T} * \left( \frac{\partial T^n}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} * k(T^n) * \frac{\partial T^n}{\partial r} \\ & + k(T^n) * \frac{\partial^2 T^n}{\partial r^2} + \frac{\partial k(T^n)}{\partial T} * \left( \frac{\partial T^n}{\partial z} \right)^2 \\ & + k(T^n) \frac{\partial^2 T^n}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (5)$$

1- Chebyshev-GaussLobatto grid

2- Roots of Chebyshev polynomial

$$C_{i,i}^{(2)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^{Nr} C_{i,j}^{(2)} \quad \text{for } i = j \quad (2-13)$$

$$\bar{C}_{i,j}^{(1)} = \frac{4 \frac{\pi}{L} q(\xi_i)}{2 \sin \frac{\xi_i - \xi_j}{2} q(\xi_j)} \quad \text{for } i \neq j \quad (1-14)$$

$$\bar{C}_{i,i}^{(1)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^{Nz} \bar{C}_{i,j}^{(1)} \quad \text{for } i = j \quad (2-14)$$

پارامترهای  $M^{(1)}(r_i)$  و  $q(\xi_i)$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M^{(1)}(r_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^{Nr} (r_i - r_k) \quad (15)$$

$$q(\xi_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^{Nz} \sin \left( \frac{\xi_i - \xi_k}{2} \right) \quad (16)$$

### ۳- شرایط مرزی

با حرکت گلوله به سمت جلو و در راستای محور لوله سلاح گازهای حاصل از احتراق در پشت گلوله نیز منبسط شده و با سطح بیشتری از بدنه سلاح در تماس خواهند بود. از طرفی هوای آزاد در جلوی گلوله نیز متراکم شده و در عین حال سطح کمتری با این گاز در تماس است. برای اعمال شرایط مرزی به سطح داخلی لوله سلاح، با توجه به حل دوبعدی مسئله، این شرط اعمال شده است. به طوری که در هر لحظه از شبیه‌سازی، مختصات محوری گلوله محاسبه گردیده است. سپس شرایط مرزی هر کدام از گره‌های مرز داخلی با توجه به نوع سیالی که با آن در تماس هستند تعیین شده است؛ برای گره‌هایی که در جلوی گلوله واقع شده‌اند شرایط هوای آزاد اعمال شده است. شکل ۳ پروفیل دمایی را در طی هر شلیک نمایش می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که در پایان هر شلیک، دمای گازهای حاصل از احتراق به دمایی برابر با دمای محیط می‌رسند. از طرفی برای گره‌هایی که در پشت گلوله هستند نیز شرایط گازهای حاصل از احتراق اعمال شده است. انتقال حرارت در مرز خارجی به صورت مجموع تشعشع و جابه‌جایی با هوای ساکن محیط در نظر گرفته شده است. برای گره‌های روی مرز داخلی لوله نیز تنها انتقال حرارت جابه‌جایی اعمال

$$\Delta t_1 = \beta \frac{\left( \frac{R_{out} - R_{in}}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{NR-1} \right) \right) \right)^2}{4\alpha} \quad (1-10)$$

$$\Delta t_2 = \beta \frac{\left( \frac{L}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{NL-1} \right) \right) \right)^2}{4\alpha} \quad (2-10)$$

در گام بعدی می‌بایست مشتقات مکانی موجود در رابطه (۵) را گسسته‌سازی نمود. همان‌طور که پیش‌تر عنوان گردید در این پژوهش از روش تربیع دیفرانسیلی برای گسسته‌سازی ترم‌های مکانی استفاده گردید. فرم گسسته‌شده معادله (۵) با استفاده از این روش به صورت رابطه (۱۱) نوشته می‌شود [۱۷]:

$$\begin{aligned} \rho C(T) \Big|_{T_{i,j}^n} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{\partial k(T)}{\partial T} \Big|_{T_{i,j}^n} \left( \sum_{l=1}^{Nr} C_{i,l}^{(1)} T_{l,j}^n \right)^2 \\ &+ \frac{1}{r_i} k(T) \Big|_{T_{i,j}^n} \sum_{l=1}^{Nr} C_{i,l}^{(1)} T_{l,j}^n + k(T) \Big|_{T_{i,j}^n} \sum_{l=1}^{Nr} C_{i,l}^{(2)} T_{l,j}^n \\ &+ \frac{\partial k(T)}{\partial T} \Big|_{T_{i,j}^n} \left( \sum_{l=1}^{Nz} \bar{C}_{j,l}^{(1)} T_{i,l}^n \right)^2 + k \Big|_{T_{i,j}^n} \sum_{l=1}^{Nz} \bar{C}_{j,l}^{(2)} T_{i,l}^n \end{aligned} \quad (11)$$

با توجه به این‌که حل معادله انتقال حرارت در مختصات استوانه‌ای در راستای شعاعی تابع بسل و در راستای طولی تابع هارمونیک است، لذا بر مبنای ماهیت چندجمله‌ای بودن توابع بسل، برای گسسته‌سازی جمله‌های مکانی در راستای شعاعی، از تربیع دیفرانسیلی بر مبنای چندجمله‌ای و برای گسسته‌سازی جملات در راستای محوری نیز از گسسته‌سازی مثلثاتی استفاده شد [۱۷]. در نتیجه پارامترهای  $C_{i,l}^{(1)}$ ،  $C_{i,l}^{(2)}$  و  $\bar{C}_{j,l}^{(1)}$  که در رابطه‌های (۱۲) تا (۱۴) آمده است به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_{i,j}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(r_i)}{(r_i - r_j) M^{(1)}(r_j)} \quad \text{for } i \neq j \quad (1-12)$$

$$C_{i,i}^{(1)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^{Nr} C_{i,j}^{(1)} \quad \text{for } i = j \quad (2-12)$$

$$C_{i,j}^{(2)} = 2C_{i,j}^{(1)} \left\{ C_{i,i}^{(1)} - \frac{1}{r_i - r_j} \right\} \quad \text{for } i \neq j \quad (1-13)$$

دما در دو گره داخلی و خارجی مجهول بوده و از این رو معادلات (۱۸) و (۱۹) تشکیل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌دهند. برای به دست آوردن دمای این دو گره می‌بایست این دستگاه حل شود. با توجه به وجود انتقال حرارت تشعشعی در مرز بیرونی بدنه، ترم غیرخطی در معادله (۱۹) دیده می‌شود. به همین خاطر، برای حل این دستگاه از روش نیوتن-رافسون استفاده شده است.

#### ۴- حل به روش نیوتن-رافسون

همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد، برای محاسبه دما در گره‌های مرزی باید دستگاه دو معادله و دو مجهولی غیرخطی حل شود. به‌طور کلی برای حل دستگاه معادلات غیرخطی روش‌های متفاوتی همچون روش نصف کردن فاصله‌ها، روش سکانت و روش نیوتن-رافسون استفاده می‌شود. در این پژوهش از روش نیوتن-رافسون برای حل دستگاه معادلات غیرخطی بهره گرفته شده که در ادامه توضیح مختصری در مورد این روش ارائه می‌شود: دستگاه معادلات شامل N معادله و N مجهول به شکل زیر مفروض است:

$$F_p(T_1, T_2, T_3, \dots, T_N) = 0 \quad p = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

در رابطه (۲۰) پارامتر  $T$  نمایانگر برداری از مقادیر  $T_p$  بوده و  $F$  نیز نشان‌دهنده بردار کلی توابع  $F_p$  است. در همسایگی نقطه  $T$ ، می‌توان هر یک از توابع  $F_p$  را با استفاده از سری تیلور به صورت زیر بسط داد:

$$F_p(T + \delta T) = F_p(T) + \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_p}{\partial T_q} \delta T_q + O(\delta T^2) \quad (21)$$

ماتریس مشتقات جزئی ظاهر شده در رابطه (۲۱) را ماتریس ژاکوبین نامیده و به صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود:

$$J_{pq} = \frac{\partial F_p}{\partial T_q} \quad (22)$$

از طرفی می‌توان رابطه (۲۱) را با استفاده از فرم ماتریسی به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$F(T + \delta T) = F(T) + J \cdot \delta T + O(\delta T^2) \quad (23)$$

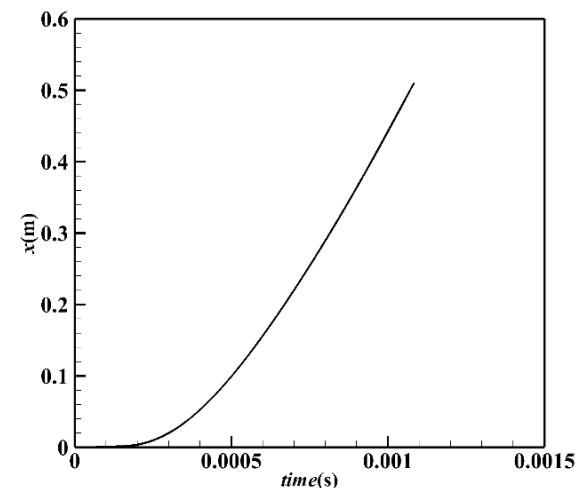
گردید و از انتقال حرارت تشعشعی برای این مرز صرف‌نظر گردید [۴]. شرط مرزی مربوط به این دو سطح با استفاده از معادله تعادل حرارتی به صورت معادلات (۱۷) نوشته می‌شود:

$$at \ r = r_i : k \frac{\partial T}{\partial r} = h_i (T(r) - T_i) \quad (1-17)$$

$$at \ r = r_o : k \frac{\partial T}{\partial r} = -h_o (T(r) - T_\infty) - \varepsilon \sigma (T(r)^4 - T_\infty^4) \quad (2-17)$$

$$\begin{cases} T_i = T_g ; h_i = h_g & \text{if } z \leq z_b(t) \\ T_i = T_\infty ; h_i = h_o & \text{if } z > z_b(t) \end{cases} \quad (3-17)$$

پارامتر  $z_b$  در معادلات (۱۷) بیانگر موقعیت محوری گلوله است. این موقعیت برحسب زمان در شکل ۱ نمایش داده شده است.



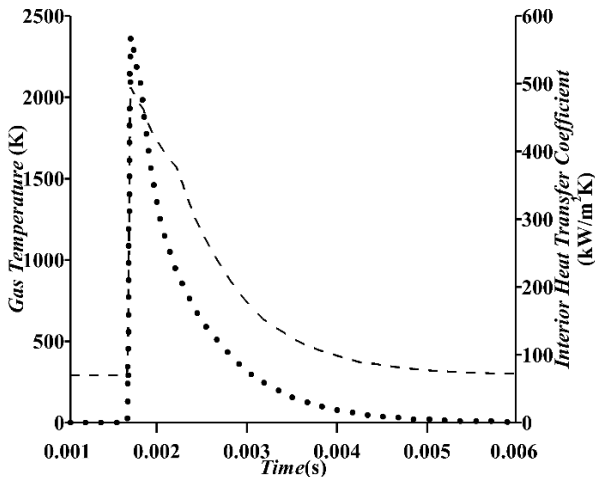
شکل (۱): موقعیت محوری گلوله برحسب زمان در طی بالستیک درونی [۱۹]

که دو معادله فوق به صورت زیر گسسته می‌شود:

$$E_1 = \left( k(T) \Big|_{T_{1,j}^n} C_{1,1}^{(1)} - h_i \right) T_{1,j}^n + k(T) \Big|_{T_{1,j}^n} C_{1,NR}^{(1)} T_{NR,j}^n + k(T) \Big|_{T_{1,j}^n} \sum_{l=1}^{Nr} C_{1,j}^{(1)} T_{l,j}^n + h_i T_i = 0 \quad (18)$$

$$E_2 = \left( h_o + k(T) \Big|_{T_{NR,j}^n} \right) T_{NR,j}^n + \varepsilon \sigma (T_{NR,j}^n)^4 + k(T) \Big|_{T_{NR,j}^n} T_{1,j}^n C_{NR,1}^{(1)} - h_o T_\infty - \varepsilon \sigma T_\infty^4 + k(T) \Big|_{T_{NR,j}^n} \sum_{l=1}^{Nr} C_{NR,j}^{(1)} T_{l,j}^n = 0 \quad (19)$$

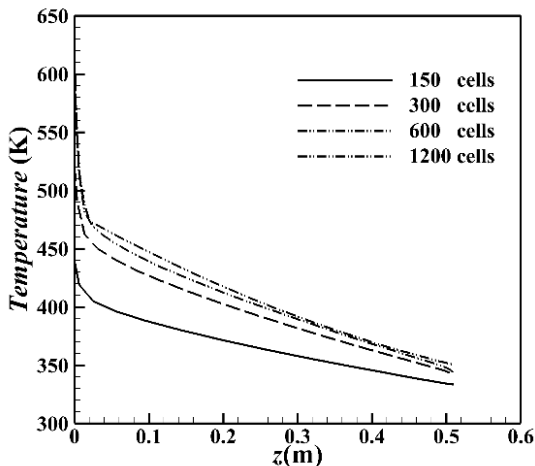
خارجی لوله مشخص باشد. این پارامترها نیز به عنوان ورودی از پژوهش صورت گرفته توسط هیل و کانر مورد استفاده قرار گرفت [۲۰]. شکل ۳ نمایشی از این پارامترها ارائه می‌باشد:



شکل (۳): دما و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی گازی حاصل از احتراق در یک شلیک [۲۰]

## ۶- نتایج

در گام بعدی به شبیه‌سازی عددی مسئله با استفاده از روابط به‌دست‌آمده مبادرت گردید. برای این منظور ابتدا استقلال حل از شبکه مورد ارزیابی قرار گرفت. برای بررسی دقیق‌تر بحث استقلال حل از شبکه، مقادیر دما به ازای شبکه‌بندی‌های متفاوت تنها در راستای شعاعی در بدنه لوله سلاح مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج مربوط به این شبیه‌سازی‌ها در شکل ۴ به نمایش در آمده است.



شکل (۴): بررسی استقلال حل از شبکه

با صرف‌نظر کردن از ترم  $\delta T^2$  و ترم‌های مرتبه بالاتر و با قرار دادن  $F(T + \delta T) = 0$ ، می‌توان به یک دستگاه معادلات خطی برای پارامتر اصلاحی  $\delta T$  به‌دست آورد. این پارامتر موجب می‌شود تمام توابع  $F_p$  به‌صورت هم‌زمان به صفر میل کنند:

$$\mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{T} = -\mathbf{F} \quad (24)$$

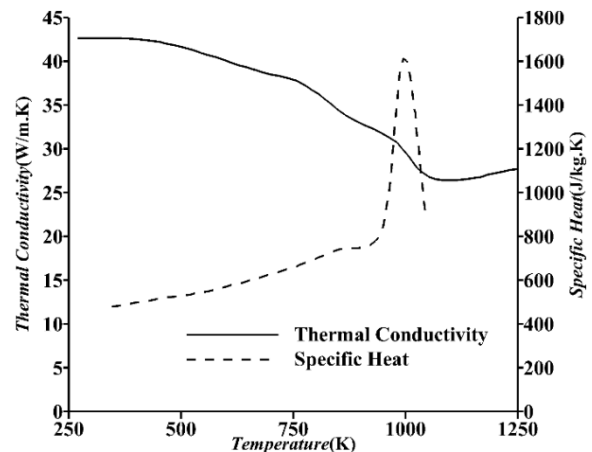
اکنون می‌توان معادله ماتریسی (۲۴) را با استفاده از روش‌های حل دستگاه همچون روش تجزیه به ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی حل نمود. با محاسبه مقادیر  $\delta T$ ، این مقادیر به بردار پاسخ اضافه می‌شوند:

$${}^{s+1}\mathbf{T} = {}^s\mathbf{T} + \delta \mathbf{T}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad {}^0\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n \quad (25)$$

و این فرآیند تا دست‌یابی به یک پاسخ همگرا ادامه می‌یابد.

## ۵- متغیرهای ورودی مسئله

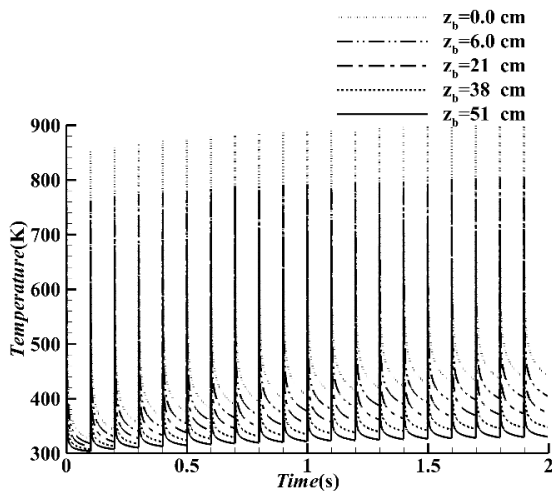
برای محاسبه دما در جداره لوله می‌بایست ویژگی‌های فیزیکی جداره لوله مشخص باشند. برای این منظور از ویژگی‌های ارائه‌شده برای فولاد توسط هیل و کانر استفاده گردید [۲۰]. این ویژگی‌ها در شکل ۲ به نمایش درآمده است:



شکل (۲): ویژگی‌های ترمودینامیکی لوله سلاح [۲۰]

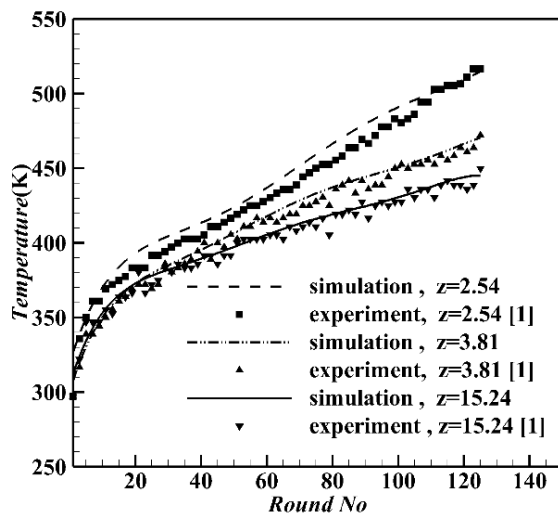
از طرفی برای حل معادلات و محاسبه دما در گره‌های داخلی و مرزی می‌بایست دمای گازهای حاصل از احتراق و نیز ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در دو دیواره داخلی و

همان طور که از این شکل دریافت می‌شود، در تمام لحظات شلیک با حرکت به سمت انتهای باز لوله دما کاهش یافته است:



شکل (۶): دمای گره‌های مختلف در سطح داخلی در طی ۲۰ شلیک متوالی

در پژوهش تجربی صورت گرفته، در چند نقطه مجزا ترموکوپل قرار داده شده است که به اندازه‌گیری دما می‌پردازند. برای بررسی دقیق‌تر نتایج و صحت‌سنجی آن‌ها نتایج حاصل از شبیه‌سازی تجربی با مقادیر به‌دست‌آمده از پژوهش تجربی مقایسه گردید. این نتایج در شکل ۷ نمایش داده شده است. همان‌طور که از شکل برمی‌آید تطابق خوبی میان نتایج تجربی و عددی مشاهده می‌شود.

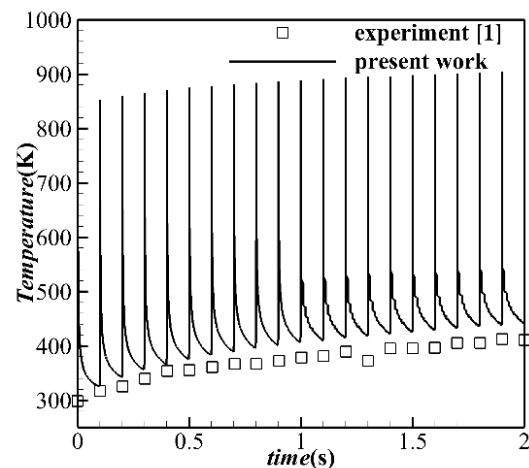


شکل (۷): دمای سطح داخلی لوله سلاح در ابتدای هر شلیک در ۱۲۵ شلیک متوالی [۴]

همان‌طور که در شکل ۴ دیده می‌شود پاسخ به ازای ۶۰۰ سلول در دامنه، با دقت مناسبی همگرا شده است.

در ادامه برای بررسی صحت شبیه‌سازی صورت گرفته، با استفاده از کد نوشته‌شده به شبیه‌سازی یک مسئله معیار [۴] مبادرت گردید؛ و نتایج به‌دست‌آمده با داده‌های تجربی پژوهش معیار مقایسه شد. نتایج این مقایسه در ادامه آورده شده است.

در استراتژی اول، بیست شلیک متوالی مورد بررسی قرار گرفت. در این استراتژی دمای گره‌ای بر روی جداره داخلی در نقطه‌ای در نزدیکی ابتدای لوله و محل انفجار باروت مورد بررسی قرار گرفت. دمای این گره در طی این بیست شلیک ثبت گردید. همان‌طور که از شکل ۵ پیداست دما تقریباً یک روند تناوبی را در طی شلیک‌های متوالی دنبال می‌کند. در هر شلیک و در طی بالستیک درونی، دمای گره افزایش یافته است. در ادامه با خروج گلوله از درون لوله با توجه به خروج گازهای حاصل از احتراق دمای جداره روندی کاهشی را دنبال می‌کند. با توجه به شکل ۵ می‌توان دریافت که دماهای کمینه و بیشینه در هر شلیک به‌مرور زمان افزایش می‌یابند.

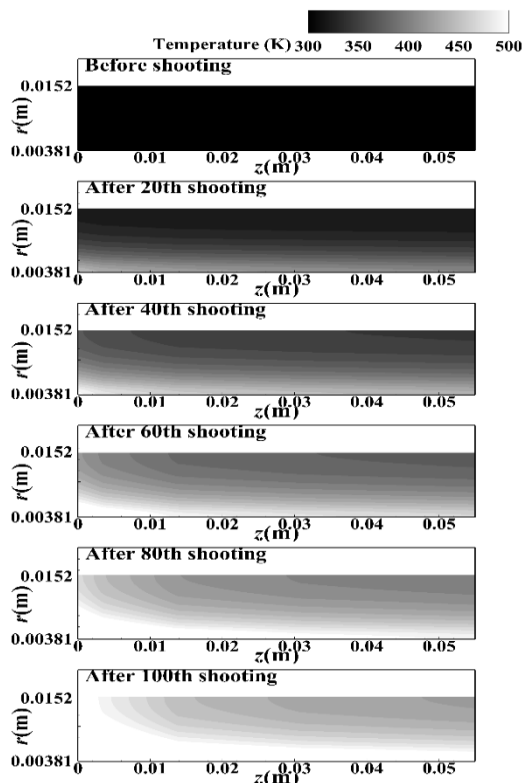


شکل (۵): نمایش روند تغییر دمای سطح داخلی لوله در ابتدای لوله و در طی ۲۰ شلیک متوالی [۴]

در هر شلیک با حرکت از انتهای بسته لوله سلاح به سمت انتهای باز لوله سلاح دما کاهش می‌یابد. در شکل ۶ دمای سطح داخلی لوله سلاح برای گره‌های متفاوت در سطح داخلی و برای ۲۰ شلیک متوالی به نمایش درآمده است.



برای نمایش دوبعدی نحوه توزیع دما در داخل بدنه سلاح در طی فرآیند شلیک، صد شلیک به صورت متوالی انجام گرفت. دماهای داخلی در انتهای هرکدام از شلیک‌ها نیز ذخیره گردید. در ادامه کانتور دمایی مربوط به پیش از شروع فرآیند شلیک و همچنین دما در پایان شلیک‌های ۲۰، ۴۰، ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ در شکل ۱۰ نمایش داده شده است.



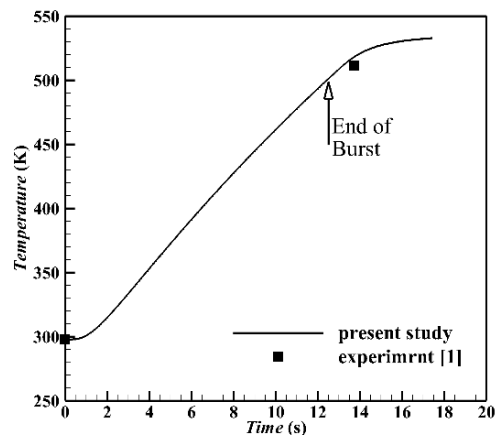
شکل (۱۰): نمایش روند تغییر دما در بدنه سلاح

همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود دما در تمام بدنه سلاح با افزایش تعداد شلیک افزایش داشته است. به صورت کلی می‌توان گفت که دما در ابتدای لوله بیشتر بوده و با حرکت به سمت انتهای باز لوله این دما کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که برای نمایش بهتر روند دما در این شکل، بازه دمایی تمامی کانتورها یکسان انتخاب شده‌اند.

## ۷- نتیجه‌گیری

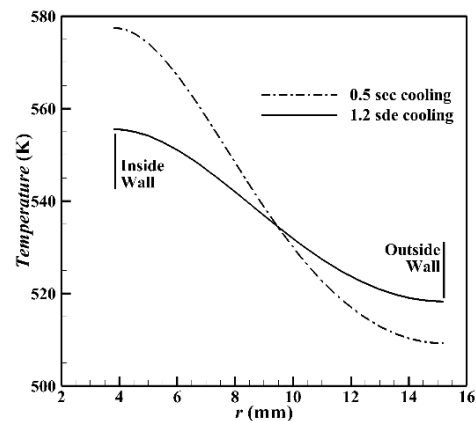
در این پژوهش با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی به بررسی پدیده انتقال حرارت در لوله سلاح پرداخته شد. استقلال حل از شبکه برای شبیه‌سازی نیز مورد ارزیابی قرار گرفت، که استقلال از حل به ازای ۶۰۰ سلول محاسباتی حاصل گردید.

در استراتژی بعدی پس از ۱۲۵ شلیک متوالی، به سلاح استراحت داده شد نتایج مربوط به این استراتژی نیز در شکل ۸ نمایش داده شده است. در این آزمایش، برخلاف آزمایش‌های پیشین، دما در گره‌ای واقع در سطح خارجی مورد مقایسه قرار گرفت. همان‌طور که از این شکل پیداست دمای گره در سطح خارجی لوله در طی شلیک‌های متوالی افزایش یافته و با اتمام فرآیند شلیک به دلیل پدیده نفوذ و انتقال دما از گره‌های میانی به گره خارجی، دمای خارجی پس از مقداری افزایش به یک مقدار ثابت رسیده است.



شکل (۸): تغییرات دمای سطح خارجی در ابتدای لوله سلاح برای ۱۲۵ شلیک متوالی و یک استراحت [۴]

با توجه به وجود پدیده پخش در دیواره سلاح توزیع دما در راستای شعاعی نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. توزیع دما برای این حالت نیز به‌ازای ۱۲۵ شلیک متوالی و بازه‌های استراحت متفاوت در پایان فرآیند شلیک در شکل ۹ به نمایش در آمده است.



شکل (۹): تغییرات دما در راستای شعاعی برای ۱۲۵ شلیک متوالی [۴]

- Laminates”, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 52, pp. 73-82, 2012.
6. Liu, W., Liu, D. and Gao, N. “CFD Study on Gaseous Pollutant Transmission Characteristics Under Different Ventilation Strategies in a Typical Chemical Laboratory”, *Building and Environment*, Vol. 126, pp. 238-251, 2017.
  7. Lu, X., Tervola, P., and Viljanen, M. “Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Composite Circular Cylinder”, *Int. J. Heat. Mass. Tran.*, Vol. 49, no's. 1-2, pp. 341-348, 2006.
  8. Dalir, N. and Nourazar, S. S. “Analytical Solution of the Problem on the Three-dimensional Transient Heat Conduction in a Multilayer Cylinder”, *J. Eng. Phys. and Thermophys*, Vol. 87, no. 1, pp. 89-97, 2014.
  9. Singh, S. and Jain, P. K. “Analytical Solution to Transient Heat Conduction in Polar Coordinates with Multiple Layers in Radial Direction”, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 47, no. 3, pp. 261-273, 2008.
  10. Singh, S. and Jain, P. K. “Finite Integral Transform Method to Solve Asymmetric Heat Conduction in a Multilayer Annulus with Time-dependent Boundary Conditions”, *Nucl. Eng. Des.*, Vol. 241, no. 1, pp. 144-154, 2011.
  11. South, J. T. and Carter, R. H. “Thermal Analysis of an M256 120-mm Cannon”, *Army Research Lab Aberdeen Proving Ground Md Weapons And Materials Research Directorate*, 2005.
  12. Chen, T.-C., Liu, C.-C., Jang, H.-Y., and Tuan, P.-C. “Inverse Estimation of Heat Flux and Temperature in Multi-layer Gun Barrel”, *Int. J. Heat Mass. Tran.*, Vol. 50, no's. 11-12, pp. 2060-2068, 2007.
  13. Nelson, C. W. and Ward, J. R. “Calculation of Heat Transfer to the Gun Barrel Wall”, *Army Ballistic Research Lab Aberdeen Proving Ground MD*, 1981.
  14. Akcay, M. and Yükselen, M. A. “Unsteady Thermal Studies of Gun Barrels During the Interior Ballistic Cycle with Non-homogenous Gun Barrel Material Thermal Characteristics”, *J. Therm. Sci. & Tech.*, Vol. 34, no. 2, pp. 75-81, 2014.
  15. Mishra, A., Hameed, A., and Lawton, B. “Transient Thermal Analyses of Midwall Cooling and External Cooling Methods for a Gun Barrel”, *J. Heat. Transf.*, Vol. 132, no. 9, p. 091901, 2010.
  16. Çengel, Y. A. “Heat and Mass Transfer: A Practical Approach. McGraw-Hill (India) Pvt. Limited, 2007.

برای بررسی صحت روش ارائه شده استراتژی‌های شلیک مختلف موردبررسی قرار گرفت؛ بررسی نتایج این استراتژی‌ها و مقایسه آن‌ها با نتایج پژوهش‌های تجربی از انطباق خوب این نتایج حکایت دارد.

در استراتژی بیست شلیک با مقایسه دماهای ابتدای هر شلیک با مقادیر پژوهش تجربی، درصد اختلاف کوچکی (حدود ۰/۸٪) در دماهای گزارش شده مشاهده شد.

شلیک ۱۲۵ گلوله متوالی و سپس استراحت نیز به‌عنوان استراتژی دیگری جهت مشاهده پدیده پخش موردبررسی قرار گرفت. همان‌طور که در شکل ۸ پیداست دمای محاسبه شده توسط روش ارائه شده برابر با ۵۱۸K بوده درحالی‌که این مقدار برای پژوهش تجربی برابر با ۵۱۰K است.

از مزیت‌های روش پیشنهادی و برنامه نوشته شده، با توجه به کلی بودن برنامه، می‌توان به قابلیت آن در شبیه‌سازی سلاح‌های مختلف با هندسه‌ها و مواد بدنه متفاوت اشاره نمود.

## ۸- مراجع

1. Cooper, L. Y. “Temperature of a cylindrical Cavity Wall Heated by a Periodic Flux”, *Int. J. Heat Mass. Tran.*, Vol. 20, no. 5, pp. 527-534, 1977.
2. Walker, M. “Stress Strain Relationships In Ultra High Molecular Weight Polyethylene Fibers Under Ballistic Loading”, *Naval Postgraduate School Monterey United States*, 2018.
3. Shakoor, A., Shahzad, K., Sliem, M. H., Ubaid, F., Akbar, H. M., Abdullah, A. M., Kahraman, R., Montemor, F. M., and Manzoor, U., “Corrosion Behavior of High Strength Low Alloy HSLA Steel in 35 Wt% NaCl Solution Containing Diethylenetriamine DETA as Corrosion Inhibitor”, in *Proc. Conf. Foundation Annual Research*, Vol. 1, no. 1, p. EEPD356: Qatar, Hamad bin Khalifa University Press, 2018.
4. Moeller, C. and Bassert, A. “Measurement of Transient Bore-Surface Temperatures in 7.62 mm Gun Tubes”, *Midwest Research Inst Kansas City MO*, 1973.
5. Kayhani, M., Norouzi, M., and Delouei, A. A. “A General Analytical Solution for Heat Conduction in Cylindrical Multilayer Composite

19. Akcay, M. "Internal and Transitional Ballistic Solution for Spherical and Perforated Propellants and Verification with Experimental Results", *Isi Bilimi ve Teknigi Dergisi/Journal of Thermal Science & Technology*, Vol. 37, no. 1, 2017.
20. Hill, R. D. and Conner, J. M. "Transient Heat Transfer Model of Machine Gun Barrels", *Mater. Manuf. Process.*, Vol. 27, no. 8, pp. 840-845, 2012.
17. Shu, C. "Differential Quadrature and its Application in Engineering", Springer Science & Business Media, Verlag London Ltd., 2012.
18. Bergman, T. L., Incropera, F. P., Lavine, A. S., and DeWitt, D. P. "Introduction to Heat Transfer", John Wiley & Sons, 2011.