نشریه علمی «علوم و فناوری‌های پدافند نوین»
سال یازدهم، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۹؛ ص ۲۳۸-۲۳۱

# روش برنامه‌ریزی درجه دوم برای انتخاب تصمیم بهینه در محیط پیچیده و فازی سناریوی نبرد

**حمید بیگدلی**
دکتری و پژوهشگر دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا

(دریافت: ۹۷/۱۰/۱۶، پذیرش: ۹۸/۰۲/۱۱)

## چکیده

فرآیند تصمیم‌گیری نظامی بسیار پیچیده و شامل عدم قطعیت در اطلاعات است. تصمیم‌گیرندگان و بازیکنان، عوامل محیطی، اهداف، راه‌کارها و معیارها از جمله موارد مهم در انتخاب تصمیم بهینه هستند. در این مقاله، یک روش برای تصمیم‌گیری نظامی در موقعیت‌های مختلف نبرد شرح داده شده است. نحوه مدل‌سازی مسائل تصمیم‌گیری در درگیری دو نیروی آبی و قرمز در چارچوب بازی‌های دوماتریسی بیان شده است. راه‌کارهای خودی و حریف مورد بررسی قرار گرفته و خروجی تحلیل در دو ماتریس بازی جداگانه قرار داده شده است. برای مدل‌سازی عدم قطعیت حاصل از تحلیل راه‌کارها از نظریه فازی استفاده شده است. با استفاده از تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، عایدی‌ها به‌صورت بازه‌ای نوشته شده است. سپس، برای محاسبه نقاط تعادل، دو مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم معرفی شده است. در نهایت، نحوه مدل‌سازی یک سناریوی نبرد به‌صورت یک بازی دوماتریسی فازی بیان شده و حل مسأله به کمک روش پیشنهادی شرح داده شده است.

**کلیدواژه‌ها:** بازی دوماتریسی، برنامه‌ریزی درجه دوم، نظریه فازی، سناریوی نبرد، تصمیم بهینه

# Quadratic Programming Method for Choosing Optimal Decision in Fuzzy and Complex Environment of Battle Scenario

**H. Bigdeli**
Army Command and Staff University
(Received: 06/01/2019; Accepted: 01/05/2019)

## Abstract

*The military decision-making process is very complex and involves uncertainty in the information. Decision makers and players, environmental factors, objectives, strategies and criteria are the important cases for choosing the optimal decision. In this paper, a methodology for military decision-making in different battle situations is described. The modeling of decision-making problems in the conflict between two red and blue forces is expressed in the frameworks of the bi-matrix games. The insider and opponent's strategies are examined and the output of the analysis is placed in two game matrices, separately. Fuzzy theory is used to model the uncertainty resulting from strategies analysis. Using the nearest interval approximation of the fuzzy numbers, the payoffs are written as interval. Then, to compute equilibrium points, two quadratic programming problems are introduced. Finally, model of battle scenario is expressed as a fuzzy bi-matrix game and it's solution is described using the proposed method.*

**Keywords:** Bi-Matrix Game, Quadratic Programming, Fuzzy Theory, Battle Scenario, Optimal Decision

*Corresponding Author E-mail: hamidbigdeli92@gmail.com

## ۱. مقدمه

تصمیم‌گیری در محیط‌های رقابتی وابسته به تصمیم حریف یا حریفان است. مسائل تصمیم‌گیری نظامی از جمله مسائل تصمیم‌گیری در محیط رقابتی هستند که اغلب شامل عدم قطعیت و پیچیدگی هستند. اغلب فرماندهان نظامی در طرح‌ریزی عملیات و تجزیه و تحلیل موقعیت‌ها از تجربه و آموزه‌های خود استفاده می‌کنند. استفاده از فناوری‌های نوین به‌عنوان مشاور فرماندهی در تصمیم‌گیری و همچنین برای پیش‌بینی نبردها و تحلیل و بررسی سناریوهای نبرد بسیار مناسب بوده و فرماندهان را یاری می‌کند. یک فرمانده قوی علاوه بر داشتن تجربه، شجاعت، درایت باید با فناوری‌های نو نیز آشنا باشد. از جمله فناوری‌هایی که می‌تواند در تصمیم‌گیری به فرماندهان کمک کند، سامانه پشتیبان تصمیم نظامی است. این سامانه‌ها ممکن است از روش‌های مختلفی در تصمیم‌گیری استفاده کنند. روش‌های تحقیق در عملیات که در ابتدا به‌عنوان تحقیق در عملیات‌های نظامی شناخته‌شده بود، کاربرد زیادی در تصمیم‌گیری‌های نظامی دارد. نظریه بازی شاخه‌ای از تحقیق در عملیات است که رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت رقابتی را مورد بررسی قرار می‌دهد. مسائلی که در آن‌ها تصمیم یک فرد وابسته به تصمیم فرد یا افراد دیگر باشد، اغلب با استفاده از نظریه بازی مدل‌سازی می‌شود. برای بررسی موقعیت‌های پیچیده نبرد نیز استفاده از مدل‌های نظریه بازی مفید به نظر می‌رسد. محبوبیت نظریه بازی در میان رشته‌های مختلف از جمله علوم نظامی، اقتصاد، زیست‌شناسی، علوم سیاسی، علوم رایانه، مهندسی برق، کسب و کار، حقوق و سیاست عمومی در حال افزایش است.

مسائل نظریه بازی به دو دسته مهم طبقه‌بندی می‌شوند: بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه. بازی‌های غیرهمکارانه به بازی‌هایی اطلاق می‌شود که بین بازیکنان هیچ‌گونه همکاری وجود ندارد. البته در برخی موارد ممکن است همکاری جزئی صورت گیرد ولی در نهایت بازیکنان راهبرد خود را بدون همکاری انتخاب می‌کنند. بازی‌های غیرهمکارانه شامل دو نوع بازی مجموع صفر و مجموع ناصفر است که بازی‌های مجموع ناصفر بحث اصلی این مقاله است. این بازی‌ها به‌عنوان بازی‌های دوماتریسی نیز گفته می‌شوند. در این مدل برای هر بازیکن یک ماتریس عایدی تعریف می‌شود که این مقادیر از مقایسه راه‌کارهای نیروی خودی و دشمن به‌دست می‌آید.

در مدل‌سازی بازی از قضاوت کارشناسان خبره در برآورد عایدی‌های بازیکنان برای هر پیامد بازی استفاده می‌شود. در کاربردهای جهان واقعی، برآورد مقدار عایدی‌ها به‌دلیل فهم مبهم کارشناسان و اطلاعات نادقیق آن‌ها، میسر نیست. برای مدل‌سازی این عدم قطعیت‌ها استفاده از نظریه فازی یکی از راه‌کارهای مناسب به شمار می‌رود.

در این مقاله، مدل بازی دوماتریسی فازی با نگرش تصمیم‌گیری نظامی مورد بررسی قرار گرفته است. به کمک تقریب نزدیک‌ترین بازه، عایدی‌های فازی به‌صورت بازه‌ای نوشته شده است و برای به‌دست‌آوردن نقاط تعادل دو مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم پیشنهاد می‌شود که با حل این مسائل راه‌کارهای بهینه بازیکنان به‌دست می‌آید. سپس برای هر یک از بازیکنان فرآیند تصمیم‌گیری در موقعیت‌های مختلف در سناریوهای بازی جنگ شرح داده شده است.

سرهنگ الیور هایوود [۱] اولین کسی بود که اهمیت نظریه بازی را در تصمیم‌گیری فرماندهی نشان داد. او در مقاله خود دو نبرد از جنگ جهانی دوم را از دید نظریه بازی بررسی کرد و نتیجه گرفت که تصمیم دکترین نظامی مشابه با جواب به‌دست‌آمده از نظریه بازی است. در ادامه به برخی از کارهای انجام‌شده در این زمینه اشاره می‌شود. براینلسون [۲] از نظریه بازی‌ها در سامانه پشتیبان تصمیم فرماندهی و کنترل استفاده کرد و سناریوی بازی جنگ را به‌صورت یک بازی در فرم گسترده مدل‌سازی و حل کرد. گیلارم و همکارانش [۳] قالب نظریه بازی را برای تشخیص طرح دشمن به کار بردند و از بازی‌های مارکف در مدل‌سازی مسائل طرح‌ریزی استفاده کردند. سناریوهای دزد و پلیس [۴]، سیستم دفاع موشکی ضدبالستیک [۵] و تروریسم [۶] ازجمله مقالات مورد نظر در زمینه تصمیم‌گیری نظامی هستند. اپلاک و همکارانش [۷] از بازی مجموع صفر فازی در مدل‌سازی فرآیند تصمیم‌گیری در موقعیت‌های نبرد استفاده کردند. آن‌ها یک روش بر اساس رتبه‌بندی اعداد فازی برای حل این مسائل ارائه دادند.

در زمینه نظریه بازی‌ها در محیط فازی کارهای مختلفی صورت گرفته است [۸ و ۹]. بیگدلی و همکاران [۱۰] بازی‌های ماتریسی و دوماتریسی را در محیط فازی مورد بررسی قرار دادند و موقعیت آورانشه در جنگ جهانی دوم را به‌صورت یک بازی ماتریسی با عایدی‌های فازی مدل‌سازی کرده و نشان دادند که راهبردهای به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی با تصمیم دکترین آمریکا مطابقت دارد. همچنین بازی مذاکرات هسته‌ای بین دو کشور را به‌صورت یک بازی دوماتریسی چندهدفی مدل‌سازی کرده و یک روش برای محاسبه نقاط تعادل کارای ضعیف آن ارائه دادند [۱۱]. در بررسی بازی‌های چندهدفی در محیط قطعی از روش برنامه‌ریزی آرمانی در محاسبه راهبرد بهینه مدافع استفاده شده است [۱۲]. در گزارش دیگری علاوه بر ارائه یک روش حل

برای بازی‌های امنیتی چندهدفی با عایدی‌های فازی، کاربردی از این مدل را در ایجاد امنیت در ایستگاه‌های مترو ارائه شده است [۱۳]. در آن گزارش، با استفاده از عملگر تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، مدل بازی امنیتی فازی به مدل بازه‌ای تبدیل شده و به کمک شرایط کاروش کان تاکر در مسائل بازه‌ای راهبرد بهینه مدافع محاسبه شد. از جمله مقالات جدید در این زمینه ارائه یک روش حل بازی‌های دوماتریسی فازی با استفاده از آلفا-برش‌های اعداد فازی است که توسط لیو و زینگ انجام شده است [۱۴]. در این مقاله، ما به دنبال حل این مسأله از طریق تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی هستیم و کاربرد روش پیشنهادی را در مدل‌سازی و حل یک سناریوی نبرد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در این زیر بخش برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه مجموعه‌های فازی [۱۵] که مورد نیاز بخش‌های بعد است، یادآوری می‌شود.

یک مجموعه فازی به‌صورت زیرمجموعه $\tilde{a}$ از مجموعه مرجع $X \subset \mathbb{R}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{a}}: X \to [0,1]$ تعریف می‌شود که به هر عنصر $x \in X$ یک عدد حقیقی $\mu_{\tilde{a}}(x)$ را از بازه $[0,1]$ به نام درجه عضویت $x$ تخصیص می‌دهد.

**تعریف.** مجموعه فازی $\tilde{a}$ در مجموعه اعداد حقیقی را که تابع عضویت آن $\mu_{\tilde{a}}(x)$ در شرایط زیر صدق کند، یک عدد فازی گویند.

- $\mu_{\tilde{a}}: \mathbb{R} \to [0,1]$ یک تابع نیمه پیوسته باشد.
- بازه $[a,d]$ موجود است به‌طوری که در این بازه، $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0$.
- اعدادی حقیقی مانند b و c موجود باشند به‌طوری که $a \le b \le c \le d$ و

الف) $\mu_{\tilde{a}}(x)$ در $[a,b]$ صعودی باشد،

ب) $\mu_{\tilde{a}}(x)$ در $[c,d]$ نزولی باشد،

ج) در $[b,c]$، $\mu_{\tilde{a}}(x) = 1$.

برای هر $\alpha \in (0,1]$، برش آلفای مجموعه فازی $\tilde{a}$ که با $\tilde{a}_\alpha$ نمایش داده می‌شود یک مجموعه معمولی است که به‌صورت $\tilde{a}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \ge \alpha\}$ تعریف می‌شود و چنانچه $\alpha = 0$، $\tilde{a}_0$ به‌صورت $\mathrm{cl}\{x \mid \mu_{\tilde{a}}(x) > 0\}$ تعریف می‌شود که $cl$ به معنی بستار مجموعه است. تکیه‌گاه $\tilde{a}$ که با $Supp(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شود، مجموعه تمام نقاط $x \in X$ است که $\mu_{\tilde{a}}(x) > 0$. می‌توان ثابت کرد که هر $\alpha$- برش عدد فازی $\tilde{a}$ یک بازه بسته به‌صورت $\left[a_\alpha^L, a_\alpha^R\right]$ است [۱۵]، که در آن

$$a_\alpha^L = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \ge \alpha\},$$
$$a_\alpha^R = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \ge \alpha\}.$$

هسته عدد فازی $\tilde{a}$ با $core(\tilde{a})$ نمایش داده شده و به‌صورت $core(\tilde{a}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) = 1\}$ تعریف می‌شود.

عدد فازی مثلثی $\tilde{a} = (a^l, a^m, a^r)$، یک عدد فازی خاص است که تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - a^l)}{(a^m - a^l)} & a^l \le x \le a^m \\ \dfrac{(a^r - x)}{(a^r - a^m)} & a^m \le x \le a^r \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن، $a^m$ نقطه میانی و $a^l$ و $a^r$ به‌ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست $Supp(\tilde{a})$ هستند.

در بخش‌های بعد، به بعضی از اعمال حسابی روی بازه‌ها نیاز است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود.

فرض کنید $a = [a^L, a^R]$ و $b = [b^L, b^R]$ دو بازه باشند. در این صورت

$$a + b = [a^L + b^L, a^R + b^R]$$
$$a - b = [a^L - b^R, a^R - b^L]$$
$$\lambda a = \begin{cases} [\lambda a^L, \lambda a^R] & \lambda \ge 0 \\ [\lambda a^R, \lambda a^L] & \lambda < 0 \end{cases}$$

که در آن، $\lambda$ یک عدد حقیقی است.

مجموعه تمام اعداد فازی و مجموعه تمام بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ به‌ترتیب با $F(\mathbb{R})$ و $P(\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود.

**تعریف** [۱۶]. عملگر $C: F(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ که برای هر $\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$، سه خاصیت زیر را داشته باشد، یک عملگر تقریب بازه نامیده می‌شود:

۱) $C(\tilde{a}) \subset Supp(\tilde{a})$

۲) $core(\tilde{a}) \subset C(\tilde{a})$

۳) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ s.t.\ d(\tilde{a}, \tilde{b}) < \delta \Rightarrow d\left(C(\tilde{a}), C(\tilde{b})\right) < \varepsilon$

که در آن، $d: F(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$، یک متر تعریف‌شده روی خانواده اعداد فازی است.

**گزاره** [۱۶]. فرض کنید $\tilde{a}$ یک عدد فازی و برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، $[a_{\alpha}^{L}, a_{\alpha}^{R}]$، $\alpha$- برش آن باشد. تقریب نزدیک‌ترین بازه $\tilde{a}$، بازه $C_d(\tilde{a}) = [c^L, c^R]$ است که در آن

$$c^R = \int_۰^۱ a_{\alpha}^{R} d\alpha,\ c^L = \int_۰^۱ a_{\alpha}^{L} d\alpha.$$

## ۲. مدل‌سازی سناریو با استفاده از بازی دوماتریسی فازی و روش حل

در این بخش، ابتدا یک روش برای حل مسأله بـازی دوماتریسـی فازی و یافتن راه‌کارهای بهینه بازیکنان ارائه می‌شود. سپس نحوه مدل‌سازی و به‌کارگیری روش پیشنهادی در یک سـناریوی نبـرد شرح داده می‌شود.

### ۲-۱. روش برنامه‌ریزی درجه دوم در حل مسائل بـازی دو ماتریسی فازی

فرض کنید دو بازیکن آبی و قرمز به‌ترتیب $m$ و $n$ راه‌کار داشته باشند. ماتریس‌های عایدی بازیکنان آبی و قرمز به‌ترتیب با $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{۱۱} \dots \tilde{a}_{۱n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ \tilde{a}_{m۱} \dots \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix},\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{۱۱} \dots \tilde{b}_{۱n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ \tilde{b}_{m۱} \dots \tilde{b}_{mn} \end{bmatrix}.$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، راه‌کارهای بازیکن آبی در سطرها و راه‌کارهای بازیکن قرمز در ستون‌های ماتریس نمایش داده شده است. در صورتی که بازیکن آبی راه‌کار $i$ام و بازیکن قرمز راه‌کار $j$ ام خود را انتخاب کند، $\tilde{a}_{ij}$ و $\tilde{b}_{ij}$ به‌ترتیب عایدی فازی بازیکنان آبی و قرمز خواهد بود. در این مقاله فرض می‌کنیم که عایدی‌های فازی اعداد فازی مثلثی باشند. هریک از راه‌کارهای $i = 1,\dots,m$ و $j = 1,\dots,n$ را به‌ترتیب راه‌کارهای محض بازیکنان آبی و قرمز می‌نامیم. در اغلب مسائل راه‌کارهای محض وجود ندارد و بازیکنان به دنبال راه‌کارهای آمیخته هستند. برای ساخت راه‌کارهای آمیخته یک توزیع احتمال به مجموعه راه‌کارهای محض تخصیص داده می‌شود. فضای راه‌کارهای آمیخته بازیکنان آبی و قرمز به‌ترتیب به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$X = \left\{ x \in \mathrm{R}^m \mid \sum_{i=۱}^{m} x_i = ۱, x_i \geq ۰, i = ۱,\dots,m \right\},$$

$$Y = \left\{ y \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{j=۱}^{n} y_j = ۱, y_j \geq ۰, j = ۱,\dots,n \right\}.$$

فرض کنید بازیکن آبی و قرمز به‌ترتیب راه‌کارهای آمیخته $x \in X$ و $y \in Y$ را انتخاب کنند. عایدی مورد انتظار بازیکن آبی و قرمز به‌ترتیب به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$x^T \tilde{A} y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \tilde{a}_{ij} y_j,$$
$$x^T \tilde{B} y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \tilde{b}_{ij} y_j.$$

$(x^*, y^*)$ را جواب تعادل بازی دو ماتریسی فوق گوییم هرگاه در روابط زیر صدق کند:

$$x^T \tilde{A} y^* \preceq x^{*T} \tilde{A} y^*, \quad \forall x \in X$$
$$x^{*T} \tilde{B} y \preceq x^{*T} \tilde{B} y^* \quad \forall y \in Y$$

توجه داشته باشید که در بیان ترتیب اعداد فازی، کوچک‌تری، بزرگ‌تری و تساوی به‌صورت معمول در اعداد قطعی تعریف نمی‌گردد. در این مقاله از بیان ترجیح استفاده می‌شود؛ یعنی مفهوم $\preccurlyeq$ در رابطه اول به معنی ترجیح دادن $x^{*T} \tilde{A} y^*$ به $x^T \tilde{A} y^*$ است. یک رابطه ترتیب برای مقایسه اعداد فازی در ادامه شرح داده خواهد شد.

برای یافتن نقاط تعادل بازی، در ابتدا به کمک تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، ماتریس‌های عایدی بازیکنان به‌صورت ماتریس‌های عایدی با عناصر بازه‌ای و به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$A_I = \begin{bmatrix} [a_{۱۱}^L, a_{۱۱}^R] & \dots & [a_{۱n}^L, a_{۱n}^R] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{m۱}^L, a_{m۱}^R] & \dots & [a_{mn}^L, a_{mn}^R] \end{bmatrix},$$
$$B_I = \begin{bmatrix} [b_{۱۱}^L, b_{۱۱}^R] & \dots & [b_{۱n}^L, b_{۱n}^R] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [b_{m۱}^L, b_{m۱}^R] & \dots & [b_{mn}^L, b_{mn}^R] \end{bmatrix}.$$

$(x^*, y^*)$ را جواب تعادل برای این بازی گوییم هرگاه

$$x^T A_I y^* \preceq x^{*T} A_I y^*, \quad \forall x \in X$$
$$x^{*T} B_I y \preceq x^{*T} B_I y^* \quad \forall y \in Y.$$

تعریف زیر را برای مقایسه اعداد فازی در نظر بگیرید.

فرض کنید $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی و $a_I = [a^L, a^R]$ و $b_I = [b^L, b^R]$ به‌ترتیب تقریب نزدیک‌ترین بازه آن‌ها باشند، در این صورت

$$\tilde{a} \preceq \tilde{b} \Leftrightarrow a_I \leq b_I \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^R \leq b^R$$

طبق این تعریف به‌راحتی نتیجه می‌شود که جواب تعادل بازی با ماتریس‌های بازه‌ای به‌دست آمده با جواب تعادل بازی با ماتریس‌های فازی معادل است. بنابراین، برای پیدا کردن جواب تعادل بازی دوماتریسی با عناصر فازی، جواب تعادل بازی دوماتریسی با عناصر بازه‌ای حاصل از اعمال عملگر تقریب نزدیک‌ترین بازه را به‌دست می‌آوریم.

برای این کار باید دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی زیر حل شود:

$$\begin{aligned}&\max_x \; x^T A_I y^* \\ &\quad x \in X \\ &\max_y \; x^{*T} B_I y \\ &\quad y \in Y\end{aligned}$$

با توجه به اینکه محدودیت‌های دو مسأله فوق جدا از هم هستند، پس یک مسأله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\max_x \; x^T A_I y^* \\ &\max_y \; x^{*T} B_I y \\ &\quad x \in X \\ &\quad y \in Y\end{aligned}$$

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از مقاله [۱۴]، این مسأله را می‌توان به‌صورت دو مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم بیان کرد. اگر کران‌های چپ مقادیر بازه‌ای در نظر گرفته شود، نقطه تعادل بازی در بدترین حالت از حل مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\underline{x}_i a_{ij}^L \underline{y}_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\underline{x}_i b_{ij}^L \underline{y}_j - \underline{\mu} - \underline{v} \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^L \underline{y}_j \le \underline{\mu}, \quad i = 1,\dots,m, \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^L \underline{x}_i \le \underline{v}, \quad j = 1,\dots,n, \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} \underline{x}_i = 1, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} \underline{y}_j = 1, \\ &\quad \underline{x}_i, \underline{y}_j \ge 0.\end{aligned}$$

با حل این مسأله راه‌کارهای بهینه بازیکنان در بدترین حالت به‌دست می‌آید. به‌طور مشابه، اگر کران‌های راست مقادیر بازه‌ای در نظر گرفته شود، مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_i a_{ij}^R \bar{y}_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_i b_{ij}^R \bar{y}_j - \bar{\mu} - \bar{v} \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^R \bar{y}_j \le \bar{\mu}, \quad i = 1,\dots,m, \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^R \bar{x}_i \le \bar{v}, \quad j = 1,\dots,n, \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i = 1, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j = 1, \\ &\quad \bar{x}_i, \bar{y}_j \ge 0.\end{aligned}$$

با حل این مسأله راه‌کارهای بهینه بازیکنان در حالت خوش‌بینانه به‌دست می‌آید. مقادیر بازیکنان در بازی دو ماتریسی به‌صورت بازه‌های بسته $\mu = \left[\underline{\mu}, \bar{\mu}\right]$ و $v = \left[\underline{v}, \bar{v}\right]$ به‌دست می‌آید.

## ۲-۲. فرآیند مدل‌سازی، تصمیم‌سازی و تصمیم‌گیری در یک سناریوی نبرد دریایی

دو کشور آبی و قرمز بر سر یک جزیره همواره با هم در کشمکش هستند. به همین منظور، نیروی دریایی کشور قرمز قصد حمله به این جزیره را دارد. جزیره هم‌اکنون در دست نیروهای آبی است. سیاست کشور قرمز به‌گونه‌ای است که در مرحله اول نیروی دریایی خود را برای آزمون قدرت نیروی آبی به این درگیری گسیل کرده است. لذا، در این سناریو درگیری دو نیروی آبی و قرمز با این فرض در نظر گرفته شده است. نیروی قرمز دارای یک ناو جنگی به همراه پشتیبانی هوایی در دریا است و نیروی آبی دارای یک سایت موشکی و نیروی هوایی به همراه یک گردان پیاده مکانیزه است. عوامل محیطی شامل شرایط آب و هوایی و نوع زمین در نظر گرفته شده است. در ادامه به فرآیند تصمیم‌گیری و نحوه مدل‌سازی سناریو با استفاده از بازی دوماتریسی فازی پرداخته می‌شود.

مرحله ۱) تحلیل موقعیت: در فرآیند تصمیم‌گیری نظامی تحلیل موقعیت اهمیت حیاتی برای پیدا کردن بهترین اقدام دارد. این گام شامل آگاهی از وضعیت و ارزیابی تمام عوامل محیطی است.

مرحله ۲) بررسی هدف و راه‌کارهای خودی و دشمن:

پس از شناسایی موقعیت، به تحلیل و بیان مأموریت پرداخته می‌شود. بخش مهم تحلیل شرح اهداف و راه‌کارها است. هدف بازیکن قرمز اشغال هدف با تلفات کمتر است. بازیکن قرمز اطلاع کاملی از توان نیروی آبی ندارد، لذا با احتیاط عمل خواهد کرد و بیشتر به دنبال سنجش توان نیروی آبی است. پس از بررسی

کامل موقعیت و دریافت اطلاعات از حریف، راه‌کارهای بازیکن قرمز به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

۱) بمباردمان (توپخانه دریایی به ساحل)
۲) استفاده از نیروی هوایی برای زدن اهداف در عمق از جمله موشک‌ها و باند فرودگاه و هواپیماهای مستقر
۳) پیاده کردن نیروی پیاده و تفنگداران دریایی به‌منظور اشغال سواحل و سرپل‌ها

بازیکن آبی پس از بررسی موقعیت و پیش‌بینی راه‌کارهای ممکن قرمز، راه‌کارهای ممکن خود را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

۱) عملیات ضدآبخاکی
۲) قطع خطوط مواصلاتی دشمن
۳) استفاده از نیروی هوایی

مرحله ۳) ارزیابی راه‌کارها:

در این مرحله بازیکنان باید تمام راه‌کارهای خود و راه‌کارهای ممکن دشمن را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهند. برای مدل‌سازی این مرحله از بازی دو ماتریسی استفاده می‌شود. در این روش، راه‌کارهای نیروی آبی در سطرهای یک ماتریس یا جدول بازی و راه‌کارهای قرمز در ستون‌های ماتریس یا جدول بازی قرار داده می‌شود. سپس بازیکنان راه‌کارها را به‌صورت دو به دو مورد بررسی قرار داده و خروجی خود را به‌صورت یک مقدار کمی نمایش می‌دهند. از آنجا که قضاوت آن‌ها ممکن است به‌صورت کیفی و به‌صورت نادقیق بیان شود، لذا از نظریه بازی برای مدل‌سازی این قضاوت‌ها استفاده می‌کنیم. قضاوت‌ها ممکن است به‌صورت زبانی بیان شوند که با استفاده از نظریه فازی می‌توان مدل‌سازی کرد. فرض می‌کنیم که مقادیر به‌صورت اعداد فازی مثلثی بیان شود. برای بیان این مقدار، بازیکنان خروجی حاصل از تحلیل راه‌کارها را به‌صورت حداقل مقدار، متوسط مقدار و حداکثر مقدار بیان می‌کنند ($\tilde{a}_{ij}=\left(a_{ij}{}^{l},a_{ij}{}^{m},a_{ij}{}^{r}\right)$). متغیرهای زبانی استفاده‌شده در این مقاله به‌صورت جدول زیر فرض شده است.

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}(۳,۵,۶) & (۲,۳,۴) & (۵,۶,۸)\\ (۰,۱,۲) & (۲,۳,۴) & (۸,۹,۱۰)\\ (۲,۳,۴) & (۲,۳,۴) & (۸,۹,۱۰)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}(۲,۳,۴) & (۵,۶,۸) & (۳,۵,۶)\\ (۵,۶,۸) & (۵,۶,۸) & (۰,۱,۲)\\ (۲,۳,۴) & (۲,۳,۴) & (۰,۱,۲)\end{bmatrix}.$$

بر این اساس، ماتریس بازیکن آبی و قرمز به‌ترتیب به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

مرحله ۴) به‌دست آوردن ماتریس با عناصر بازه‌ای:

در این مرحله با توجه به عملگر تقریب نزدیک‌ترین بازه، عناصر ماتریس را به‌صورت بازه‌ای نشان می‌دهیم.

$$A_I=\begin{bmatrix}[۴,۵.۵] & [۲.۵,۳.۵] & [۵.۵,۷]\\ [۰.۵,۱.۵] & [۲.۵,۳.۵] & [۸.۵,۹.۵]\\ [۲.۵,۳.۵] & [۲.۵,۳.۵] & [۸.۵,۹.۵]\end{bmatrix},$$

$$B_I=\begin{bmatrix}[۲.۵,۳.۵] & [۵.۵,۷] & [۴,۵.۵]\\ [۵.۵,۷] & [۵.۵,۷] & [.۵,۱.۵]\\ [۲.۵,۳.۵] & [۲.۵,۳.۵] & [.۵,۱.۵]\end{bmatrix}.$$

مرحله ۵) حل مدل و ارائه تصمیم بهینه:

در این مرحله جواب تعادل مسأله با توجه به روش برنامه‌ریزی درجه دوم پیشنهادی در گام قبل به‌دست می‌آید. با توجه به

$$\begin{aligned}&\max\{6.5\underline{x}_1\underline{y}_1+8\underline{x}_1\underline{y}_2+9.5\underline{x}_1\underline{y}_3+6\underline{x}_2\underline{y}_1+8\underline{x}_2\underline{y}_2+9\underline{x}_2\underline{y}_3+5\underline{x}_3\underline{y}_1+5\underline{x}_3\underline{y}_2+9\underline{x}_3\underline{y}_3-\underline{\mu}-\underline{v}\}\\&4.5\underline{y}_1+2.5\underline{y}_2+5.5\underline{y}_3\le\underline{\mu},\\&.5\underline{y}_1+2.5\underline{y}_2+8.5\underline{y}_3\le\underline{\mu},\\&2.5\underline{y}_1+2.5\underline{y}_2+8.5\underline{y}_3\le\underline{\mu},\\&2.5\underline{x}_1+5.5\underline{x}_2+2.5\underline{x}_3\le\underline{v},\\&5.5\underline{x}_1+5.5\underline{x}_2+.5\underline{x}_3\le\underline{v},\\&4\underline{x}_1+.5\underline{x}_2+.5\underline{x}_3\le\underline{v},\\&\underline{x}_i,\underline{y}_j\ge0,\ i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,m.\end{aligned}$$

اینکه بازیکنان را کاملاً محتاط در نظر گرفتیم، لذا می‌توان تنها مسأله متناظر با کران‌های چپ ماتریس را مورد بررسی قرار داد.

با استفاده از نرم‌افزار لینگو، نقطه تعادل و مقادیر بهینه به‌دست‌آمده از حل این مسأله به‌صورت زیر است:

$$(\underline{x}_1^*,\underline{x}_2^*,\underline{x}_3^*)=(0,0.1,0.9),$$
$$(\underline{y}_1^*,\underline{y}_2^*,\underline{y}_3^*)=(0,1,0),$$
$$\underline{u}=2.5,$$
$$\underline{v}=2.8.$$

به‌طور مشابه از حل مسأله با کران‌های راست ماتریس، نقطه تعادل و مقادیر بهینه بازیکنان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(\bar{x}_1^*,\bar{x}_2^*,\bar{x}_3^*)=(0,0,1),$$
$$(\bar{y}_1^*,\bar{y}_2^*,\bar{y}_3^*)=(0.3,0.7,0),$$
$$\bar{u}=3.5,$$
$$\bar{v}=3.8.$$

| کاملاً موفق | موفقیت بالا | موفقیت متوسط | موفقیت کم | کاملاً ناموفق |
|---|---|---|---|---|
| $(8,9,10)$ | $(5,6,8)$ | $(3,5,6)$ | $(2,3,4)$ | $(0,1,2)$ |

مرحله ۶) تفسیر جواب:

در این مرحله می‌خواهیم تفسیر جواب‌های به‌دست‌آمده در مرحله قبل را بیان کنیم. داده‌های ارائه‌شده در ماتریس‌های عایدی بر اساس اطلاعات دریافتی و تجربه بازیکنان است و تصمیم‌گیری بر اساس این داده‌ها صورت می‌گیرد. استفاده از فنون تصمیم‌گیری به همراه تجربه فرمانده در انتخاب راه‌کار بهینه بسیار کارساز است. اگرچه به‌دلیل پیچیدگی نمی‌توان تمام متغیرهای صحنه نبرد را در مدل ریاضی نمایش داد، ولی استفاده از متغیرهای مهم تا حدودی به تصمیم‌گیری بازیکنان کمک خواهد کرد. لذا تصمیم بهینه به‌دست‌آمده در مرحله قبل ترکیبی از تجربه و فناوری است و این مدل تنها به تصمیم‌گیری بازیکن کمک خواهد کرد و یک نسخه همیشگی و بدون خطا نیست. در این سناریوی فرضی داده‌ها به‌صورت ساختگی و راهبردها به‌صورت فرضی بیان شده است. در حقیقت در این مقاله یک الگوی مدل‌سازی و حل مسأله ارائه شده است. با این توضیحات تفسیر جواب‌های به‌دست‌آمده در مرحله قبل در ادامه شرح داده می‌شود.

جواب به‌دست‌آمده از حل مسأله با در نظر گرفتن کران‌های چپ برای بازیکن آبی $(\underline{x}_1^*,\underline{x}_2^*,\underline{x}_3^*)=(0,0.1,0.9)$ نشان می‌دهد که استفاده از راهبرد سوم بازیکن آبی شانس موفقیت وی را بالا خواهد برد. به عبارت دیگر در صورت استفاده از راه‌کار سوم در حدود ۹۰٪ به موفقیت خواهد رسید. اگر بازیکن آبی با در نظر گرفتن کران‌های راست مسأله را تحلیل کند، به‌طور مشابه شانس موفقیت خود را در استفاده از راه‌کار سوم خواهد یافت ($(\overline{x}_1^*,\overline{x}_2^*,\overline{x}_3^*)=(0,0,1)$). بازیکن آبی می‌تواند ترکیبی از راه‌کارهای دوم (قطع خطوط مواصلاتی) و سوم (استفاده از نیروی هوایی) خود را استفاده کند ولی تخصیص قوا به راه‌کار سوم شانس موفقیت او را بالا خواهد برد.

راه‌کار بهینه به‌دست‌آمده برای بازیکن قرمز با در نظر گرفتن کران‌های چپ ماتریس $(\underline{y}_1^*,\underline{y}_2^*,\underline{y}_3^*)=(0,1,0)$ نشان می‌دهد که موفقیت او در استفاده از راه‌کار دومش است. با توجه به جواب به‌دست‌آمده برای بازیکن قرمز از حل مسأله با کران‌های راست $(\overline{y}_1^*,\overline{y}_2^*,\overline{y}_3^*)=(0.3,0.7,0)$ نشان می‌دهد که او می‌تواند ترکیبی از راه‌کارهای اول و دوم خود را به کار گیرد. این تخصیص می‌تواند به‌صورت استفاده ۳۰ درصدی از راه‌کار اول (توپخانه به ساحل) و ۷۰ درصدی از راه‌کار دوم (استفاده از نیروی هوایی) باشد.

## ۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش برنامه‌ریزی درجه دوم برای حل بازی‌های دوماتریسی فازی پیشنهاد شد. فرآیند تصمیم‌گیری و تصمیم‌سازی شرح داده شد و نحوه مدل‌سازی یک سناریوی نبرد به تفصیل بیان شد. برای مدل‌سازی موقعیت‌های پیچیده از نظریه بازی استفاده شد و برای مدل‌سازی قضاوت‌های انسانی نظریه فازی به کار گرفته شد. از تصمیم‌گیرندگان خواسته شد تا تحلیل راه‌کارهای حریف و خودی را در یک ماتریس نمایش دهند. برای حل مسأله، در ابتدا با نوشتن تقریب بازه‌ای هر عدد فازی، ماتریس‌های بازی به‌صورت ماتریس‌هایی با عناصر بازه‌ای نوشته شدند. برای حل بازی دوماتریسی بازه‌ای دو روش برنامه‌ریزی درجه دوم معرفی شد. با حل این دو مسأله بازیکنان راه‌کارهای بهینه خود را تحت عنوان نقطه تعادل به‌دست می‌آورند. در نهایت یک سناریوی نبرد دریایی فرضی مدل‌سازی و حل شد. امتیاز روش پیشنهادی در سادگی و حفظ ماهیت فازی مسأله است. پیشنهاد می‌شود از روش پیشنهادی در مشاوره تصمیم‌گیری و تصمیم‌سازی به فرماندهان نظامی استفاده شود.

## ۴. مرجع‌ها


[1] Haywood, O. G. “Military Decision and Game Theory”; J. Oper. Res. Soc. 1989, 2, 365-385.

[2] Brynielsson, J. “Using AI and Games for Decision Support in Command and Control”; Decision Support Sys. 2007, 43, 1454 –1463.

[3] Guillarme, N. L.; Mouaddib, A.; Lerouvreur, X.; Gatepaille, S. “A Generative Game-Theoretic Framework for Adversarial Plan Recognition”; 3rd Workshop on Distributed and Multi-Agent Planning (DMAP-15), 2015.

[4] Gatti, N. “Game Theoretical Insights in Strategic Patrolling: Model and Algorithm in Normal-Form”; ECAI-08, 403–407, 2008.

[5] Brown, G.; Carlyle, M.; Kline, J.; Wood, K. “A Two-Sided Optimization for Theater Ballistic Missile Defense”; Oper. Res. 2005, 53, 263–275.

[6] Sandler, T.; Daniel, G.; Arce, M. “Terrorism and Game Theory”; Simulation & Gaming 2003, 34, 319–337.

[7] Aplak, H.; Kabak, M.; Kose, E. “A Two Person Zero Sum Game Oriented to Integration of Objectives”; J. Military Sci. 2016, 5, 65-85.

[8] Bector, C. R.; Chandra. S. “Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games”; Springer Verlag, Berlin, 2005.

[9] Nishizaki, I; Sakawa, M. “Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution”; Springer Verlag, Berlin, 2001.

[10] Bigdeli, H.; hassanpour, H.; Tayyebi, J. “The Optimistic and Pessimistic Solutions of Single and Multiobjective Matrix Games with Fuzzy Payoffs and Analysis of some of Military Problems”; Adv. Defence Sci. Technol. 2016, 2, 133-145 (In Persian).

[11] Bigdeli, H.; Hassanpour, H.; Tayyebi, J. “Constrained Bimatrix Games with Fuzzy Goals and its Application in Nuclear Negotiations”; Iranian J. Numerical Analysis and Optimization 2018, 8, 81-110.

[12] Bigdeli, H.; Hassanpour, H. “Modeling and Solving Multiobjective Security Game Problem Using Multiobjective Bilevel Problem and its Application in Metro Security System”; J. Elect. Cyber Defence 2018, 1, 31-38.

[13] Bigdeli, H.; Hassanpour, H.; Tayyebi, J. “Multiobjective Security Game with Fuzzy Payoffs”; Iranian Journal of Fuzzy Systems 2019, 16, 89-101.

[14] Liu K.; Xing Y. “Solving Fuzzy Bi-Matrix Games through a Interval Value Function Approach”; 2018, Preprints, 2018020041 (doi: 10.20944/ preprints 201802.0041.v1).

[15] Sakawa M. “Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization”; Plenum Press, New York and London, 1993.

[16] Grzegorewski, P. “Nearest Interval Approximation of a Fuzzy Number”; Fuzzy Sets Sys. 2002, 130, 321-330.