

## تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مرکب با فشار داخلی در برابر ضربه با سرعت پایین با استفاده از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود

محسن سلیم‌زاده<sup>۲</sup>

احمد مامندی<sup>\*۱</sup>

گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند،

دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۲۶)

### چکیده

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات گذرای غیرخطی ضربه با سرعت پایین بر روی پوسته استوانه‌ای مرکب تحت فشار داخلی با استفاده از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر حرکت پوسته با استفاده از نظریه غیرخطی پوسته دائل استخراج شده است. نیروی برخورد ناشی از ضربه‌زننده با قانون تماس اصلاح شده هرتز مدل شده است. برای مدل‌سازی ضربه با سرعت پایین در روش تحلیلی از مدل ارائه شده توسط شیواکمار بهره گرفته شده است. با استفاده از روش گالریکین معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر ارتعاشات پوسته حل شده‌اند. سپس، پاسخ دینامیکی و تنش پوسته تحت ضربه با سرعت پایین به کمک روش اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS و برنامه توسعه داده شده در محیط نرم‌افزار ریاضی Mathematica تحلیل شده است. سرانجام، اثر تغییر پارامترهای مختلف مانند تعداد لایه‌ها، چیدمان لایه‌ها، ضخامت و شعاع پوسته و مشخصات ضربه‌زننده بر پاسخ پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده گردید که زاویه الیاف لایه کامپوزیت اثر قابل توجهی بر پاسخ دینامیکی پوسته تحت ضربه داشته و با افزایش زاویه الیاف، دامنه پاسخ دینامیکی پوسته کاهش می‌یابد. همچنین، برای پوسته با شعاع کوچکتر فرکانس پاسخ بالاتر بوده و با افزایش شعاع پوسته اثر آن در تغییر فرکانس پاسخ کمتر می‌گردد.

**واژه‌های کلیدی:** پوسته استوانه‌ای، ماده مرکب، ارتعاشات غیرخطی، فرکانس طبیعی، ضربه با سرعت پایین، فشار داخلی

## Nonlinear Vibration Analysis of a Composite Cylindrical Shell with Internal Pressure and Subjected to a Low Velocity Impact using Analytical and FE Methods

A. Mamandi<sup>\*1</sup>

M. Salimzadeh<sup>2</sup>

Department of Mechanical Engineering, Parand Branch,  
Islamic Azad University, Parand, Iran

(Received: 03/August/2019; Accepted: 15/February/2020)

### ABSTRACT

In this paper, nonlinear vibration analysis of a composite cylindrical shell with internal pressure, subjected to a low velocity impact is investigated using analytical and FE methods. The governing coupled partial differential equations of motion are derived using Donnell's nonlinear shell theory. The impact force is modeled by employing the modified Hertzian contact theory. To model the low velocity impact, the model proposed by Shivakumar is exploited. The governing nonlinear coupled partial differential equations of motion for the shell are solved using the Galerkin method. Then, the dynamic response and generated stresses of the cylindrical shell subjected to a low velocity impact are analyzed using the ABAQUS FE software and a mathematical code developed in the environment of Mathematica software. Finally, the effect of some parameters on the impact response is studied. These parameters include the number of layers, ply orientation, shell thickness and shell radius and characteristics of the striker. It is seen that ply orientation of the composite layer has a significant effect on the dynamic response of the shell under impact and when the ply angle increases the amplitude of dynamic response of the shell decreases. Moreover, for a shell with smaller radius the response frequency is higher and when the radius of the shell increases, its effect on the frequency variation, decreases.

**Keywords:** Cylindrical shell, Composite material, Nonlinear vibrations, Natural frequency, Low velocity impact, Internal pressure

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): am\_2001h@yahoo.com

۲- کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک: mosi62mech@gmail.com

\* حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه جامع امام حسین (ع) داده شده است. این مقاله تحت لایسنس آفرینندگی مردمی (License CC BY-NC (Commons Creative در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لایسنس، از آدرس <https://maj.ihu.ac.ir> دیدن فرمائید.

## ۱- مقدمه

در طی سال‌های گذشته ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای به‌طور وسیع توسط محققین بسیار مورد ارزیابی قرار گرفته‌است. بسیاری از این مطالعات بر مطالعه پوسته‌های ساخته شده از ماده همسانگرد [۸-۱]، پوسته‌هایی از ماده غیر همسانگرد [۹-۱۰]، پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای [۱۴-۱۱] و پوسته‌های متشکل از مواد مدرج تابعی اختصاص داده شده‌است. همچنین، تاکنون در زمینه پوسته‌های ساخته شده از ماده مرکب در برابر ضربه با سرعت پایین، پژوهش‌های زیادی انجام شده‌است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌گردد.

در سال ۱۹۹۴، گنگ و همکاران [۱۵]، برای بررسی پاسخ پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه در مقابل ضربه سرعت پایین، از مدل جرم و فنر برای تعیین نیروی تماسی بین پوسته و ضربه‌زننده استفاده کرده و اثر تغییر پارامترهایی نظیر جرم ضربه‌زننده، سختی سطح تماس، سرعت ضربه‌زننده، مشخصات هندسی و ابعادی پوسته و مدول یانگ مؤثر را بررسی نمودند. در سال ۱۹۹۹، گنگ و همکاران [۱۶]، پاسخ الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای از ماده مدرج تابعی یک یا دو لایه را در مقابل ضربه سرعت پایین بررسی نمودند. در سال ۲۰۰۵، خلیلی و همکاران [۱۷]، به منظور بررسی اثر پارامترهای هندسی و فیزیکی بر روی پاسخ ساندویچ پنل‌ها با هسته متقاطع و انعطاف‌پذیر، در مقابل ضربه سرعت پایین، روابط نیروی تماسی و نیز جابجایی‌های ضربه‌زننده و پنل در جهت مایل را با مدل کردن پنل ساندویچی به‌عنوان یک سیستم دینامیکی سه درجه آزادی گسسته جرم و فنر، استخراج کرده و پاسخ دینامیکی پنل را بر اساس نظریه بهبود یافته مرتبه بالای ساندویچ پنل‌ها و در دو حالت ورق ضخیم و نازک بررسی نمودند. نتایج عددی تحلیل با نتایج عملی موجود و نیز سایر تحقیقات نظری مقایسه گردید. در سال ۲۰۰۷، ستوده و انفرادی [۱۸]، پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مرکب لایه‌ای در برابر ضربه با سرعت کم را به‌صورت پارامتری مورد مطالعه قرار دادند. بر اساس این مطالعات پاسخ ضربه تقریباً متناسب با سرعت ضربه است ولی زمان ضربه مستقل از این پارامتر می‌باشد. همچنین افزایش وزن ضربه‌زننده بر روی نیروی تماسی تأثیر زیادی ندارد اما زمان ضربه و جابجایی استوانه را افزایش می‌دهد. در سال ۲۰۰۸، صدیقی و همکاران [۱۹]، تحلیل گذرای ضربه سرعت پایین بر پوسته استوانه‌ای از ماده مرکب را با روش اجزای محدود انجام دادند.

در این تحلیل اثرات تغییر پارامترهایی نظیر جنس پوسته استوانه‌ای (فلزی و کامپوزیتی)، تغییر در تعداد و چیدمان

در دهه‌های اخیر استفاده از سازه‌های ساخته شده از مواد مرکب به دلیل خصوصیات فیزیکی مناسب آنها مانند استحکام، سختی و مقاومت در برابر خستگی بالا، در صنایعی چون خودروسازی، دریایی، خطوط لوله، مخازن نگهداری و بخصوص در صنایع هوافضایی و نظامی کاملاً مرسوم می‌باشد. کاربرد پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب در بسیاری از سازه‌ها مانند بدنه هواپیماها، ماهواره‌ها و سفینه‌ها، مخازن تحت فشار فراوان است. یکی از مهم‌ترین مشکلات در طراحی سازه‌های مرکب، ضعف و آسیب‌پذیری آنها در برخورد‌های ضربه‌ای با سرعت پایین می‌باشد که می‌تواند منجر به آسیب‌های داخلی عمده در راستای لایه لایه شدن، ایجاد ترک در زمینه ماده مرکب و یا شکست الیاف آن گردد. بر این اساس بررسی ضربه بر روی پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه مرکب در سازه‌های حساس نظیر بدنه سازه‌های هوافضایی به دلیل برخورد اشیاء پرنده و اثرات مخرب آن نیز مورد توجه محققان بوده‌است. از سوی دیگر این پوسته‌ها در کاربرد می‌توانند تحت فشارهای داخلی و یا خارجی قرار داشته باشند. بنابراین، تأثیر هم‌زمان برخورد ضربه‌زننده و بارگذاری از نوع فشار داخلی در رفتار پوسته و گسیختگی احتمالی آن دارای اهمیت می‌باشد. از طرفی با توجه به سرعت کنترل شده سازه‌های مختلف هنگام برخورد، نظیر نشست پرتابه بر روی سطح زمین در کاربردهای هوافضایی، بررسی رفتار سازه‌ها تحت اثر ضربه سرعت پایین بسیار حائز اهمیت و پر کاربرد می‌باشد. دسته‌بندی زیر از بارگذاری ضربه‌ای وجود دارد: الف- سرعت پایین: در سرعت کمتر از  $10 \text{ m/s}$ ، ب- سرعت متوسط: بین  $10 \text{ m/s}$  تا  $50 \text{ m/s}$ ، پ- سرعت بالای الاستیک: طیف وسیعی از سرعت از  $50 \text{ m/s}$  تا  $1000 \text{ m/s}$  و ت- سرعت بسیار بالا:  $2 \text{ km/s}$  تا  $5 \text{ km/s}$ . این دسته‌بندی بارگذاری ضربه از اهمیت بالایی برخوردار است. چرا که تغییرات شدید در انتقال انرژی بین پرتابه (ضربه زننده) و هدف (سازه)، اتلاف انرژی و مکانیزم انتشار خسارت با توجه به سرعت حرکت پرتابه متفاوت است. تحقیق بر روی سازه‌های چند لایه در مقابل ضربه، عموماً از منظر نوع پاسخ و واماندگی سازه به‌صورت زیر بررسی می‌گردد: الف- پیش‌بینی پاسخ سازه در مقابل ضربه، ب- تخمین نیروی تماسی بین قطعه ضربه‌زننده و سازه و پ- تعیین نوع و چگونگی واماندگی و گسیختگی سازه. لازم به ذکر است موضوع اول، یعنی پیش‌بینی پاسخ سازه در مقابل ضربه، در سال‌های اخیر بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌است.

استخراج می‌گردد. این پاسخ گذرا شامل رفتار وابسته به زمان جابجایی شعاعی و تغییر شکل‌های پوسته به صورت محلی و کلی (محدوده اثر برخورد ضربه‌زننده بر روی پوسته) و در کل پیکربندی سازه با استفاده از هر دو روش تحلیلی و عددی به دست می‌آیند. در این راستا، با مدل‌سازی پوسته در محیط نرم‌افزار اجزای محدود ABAQUS، اعمال خواص ماده مرکب، شرایط مرزی مساله، مش‌بندی و بارگذاری از نوع دینامیکی، تحلیل دینامیکی گذرای مساله برخورد انجام می‌گیرد. بررسی رفتار شامل تحلیل در برخورد بین ضربه‌زننده و هدف (پوسته استوانه‌ای از ماده مرکب) در مرحله تماس ضربه‌زننده با سازه و چگونگی رفتار پس از تماس و شکل پوسته تغییر شکل یافته و تنش‌های تماسی وابسته به زمان ایجاد شده می‌باشد. سپس، اثر تغییر پارامترهای مختلفی مانند هندسه و پیکربندی سازه پوسته (پنل) استوانه‌ای تحت فشار داخلی شامل ضخامت و شعاع، چیدمان لایه‌های ماده مرکب و زاویه لایه‌های مختلف در سازه، سرعت و جرم ضربه‌زننده (که به صورت بار جرمی متمرکز در مساله برخورد مدل می‌گردد) در چگونگی پاسخ دینامیکی پوسته مورد بررسی و تحقیق قرار می‌گیرد. همچنین، نتایج تحلیل اجزای محدود مساله در حالت‌های خاص موجود در منابع و مراجع، صحت‌سنجی می‌گردد. باید خاطر نشان کرد که در روش تحلیلی بکار گرفته شده در منابع چاپ شده پیشین، استخراج و حل معادلات الاستیسیته معادلات میدان در حل خطی مساله در حالت‌های خاص بدون فشار داخلی انجام شده‌است. از سوی دیگر، در روش اجزای محدود برای مدل‌سازی مساله و شبیه‌سازی عددی تاکنون تحقیق مستقلی که دربرگیرنده تأثیر هم‌زمان فشار داخلی با مقدار مشخص و ضربه بر روی سازه در حالت غیرخطی باشد انجام نشده‌است. این موارد را می‌توان نوآوری مقاله حاضر در نظر گرفت. لازم به ذکر است هدف دیگر از شبیه‌سازی عددی مساله، مقایسه نتایج آن با نتایج به دست آمده از روش تحلیلی برای صحت‌گذاری پاسخ زمانی پوسته پس از برخورد و استخراج توزیع سه‌بعدی تنش‌های دینامیکی و جابجایی‌های گذرا پس از برخورد ضربه زننده با پوسته بوده‌است. برای حل مساله در روش تحلیلی یک کد در محیط نرم‌افزار ریاضی Mathematica توسعه داده شده است.

## ۲- استخراج معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای از ماده مرکب با فشار داخلی در برابر ضربه سرعت پایین

در شکل ۱، یک پوسته استوانه‌ای از ماده مرکب تحت فشار داخلی  $p$  نشان داده شده‌است. طول، شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب  $l$ ،  $R$  و  $h$  می‌باشد. مبدا دستگاه مختصات استوانه‌ای بر روی سطح میانی پوسته قرار دارد. محور  $x$  در راستای طولی

لایه‌های ماده مرکب پوسته استوانه‌ای و نیز تغییر در سرعت ضربه‌زننده بررسی شده است. در سال ۲۰۱۳، ملک‌زاده و همکاران [۲۰]، پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر و بستر الاستیک تحت ضربه با سرعت پایین را مورد تحلیل قرار دادند. در این مقاله به منظور تحلیل دینامیکی ورق ساندویچی مرکب تحت بار ضربه‌ای با سرعت پایین، ورق ساندویچی با یک سامانه دینامیکی دو درجه آزادی جرم و فنر و با خطی‌سازی قانون برخورد هرتز به روش چوی، مدل‌سازی شده‌است. تأثیر تغییرات مدول‌های مختلف فنری عمودی و برشی عرضی بستر الاستیک بر فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد، توابع زمانی نیروی برخورد و تغییر مکان عرضی ورق در حین ضربه بررسی شده و با نتایج کارهای انجام شده مقایسه شده‌است. در سال ۲۰۱۳، آشنای قاسمی و همکاران [۲۱]، پاسخ ورق یک سر گیردار چند لایه مرکب با لایه‌های فلزی تحت ضربه عرضی با سرعت پایین را به روش تحلیلی - عددی مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله تابع نیروی برخورد به صورت تحلیلی محاسبه گردیده و پاسخ آن توسط نرم‌افزار اجزای محدود محاسبه شده‌است. نتایج نشان داده‌است که در خصوص ضربه‌زننده با جرم کوچک، پارامترهایی نظیر جرم و سرعت ضربه‌زننده، جرم ورق، زاویه چیدمان الیاف و فرکانس طبیعی ورق تأثیر چندانی در نیروی تماسی یا خیز سازه ندارد در حالی که برای ضربه‌زننده با جرم بزرگ پارامترهای ذکر شده بر روی رفتار دینامیکی سازه تأثیر زیادی خواهند داشت. در سال ۲۰۱۶، چوی [۲۲]، تحلیل گذرای غیرخطی هندسی ورق و پوسته‌های استوانه‌ای از ماده مرکب چند لایه تحت ضربه سرعت پایین را مورد بررسی قرار داد. در این تحلیل به مقایسه مقادیر نیروی تماسی و تغییر شکل ورق و پوسته‌های استوانه‌ای تحت ضربه سرعت پایین از دو طریق خطی و غیرخطی پرداخته شده و دلایل این اختلاف نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌است. برای مطالعه بیشتر به منابع [۲۳-۳۶] مراجعه گردد.

در پژوهش کنونی، شبیه‌سازی و تحلیل غیرخطی پوسته استوانه‌ای چندلایه از ماده مرکب با فشار داخلی در برابر ضربه با سرعت پایین با استفاده از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود انجام شده‌است. در روش تحلیلی با استخراج روابط الاستیسیته سه‌بعدی حاکم بر میدان تنش و کرنش برای پوسته استوانه‌ای ارتوتروپ چند لایه، روابط مربوط به ماتریس‌های سفتی محوری و خمشی در روابط حاکم بر نیروها و گشتاورهای لبه‌ای پوسته چندلایه متقارن با لایه‌های ارتوتروپ در حالت لایه‌های ضربدردی استخراج شده و پاسخ تحلیلی مساله برخورد با سرعت پایین با بهره‌گیری از مدل شیواکمار [۲۳] برای معادل‌سازی مدل ضربه بین پوسته و ضربه‌زننده به صورت جرم و فنر

که در آن،  $N_x$ ،  $N_\theta$  و  $N_{x\theta}$  مولفه‌های نیرو و  $M_x$ ،  $M_\theta$  و  $M_{x\theta}$  مولفه‌های گشتاور می‌باشند.  $A$  و  $D$  به ترتیب ماتریس‌های سختی محوری و خمشی هستند. درایه‌های این ماتریس‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(\beta_k)(z_k - z_{k-1}), \quad (4)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(\beta_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

که در این معادلات،  $N$  تعداد لایه‌ها را نشان می‌دهد،  $\beta_k$  زاویه لایه  $k$ ام و  $\bar{Q}_{ij}(\beta_k)$ ،  $(i, j = 1, 2, 6)$  درایه‌های ماتریس تبدیل یافته ماتریس سختی هستند که برای لایه  $k$ ام به صورت  $\bar{Q}_k = H_k^{-1} Q (H_k^{-1})^T$  تعریف می‌شود که  $H_k$  ماتریس تبدیل متعامد بوده و  $Q$  ماتریس سختی می‌باشد و از رابطه (۵) به دست می‌آیند:

$$H_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta_k & \sin^2 \beta_k & 2 \sin \beta_k \cos \beta_k \\ \sin^2 \beta_k & \cos^2 \beta_k & -2 \sin \beta_k \cos \beta_k \\ -\sin \beta_k \cos \beta_k & \sin \beta_k \cos \beta_k & \cos^2 \beta_k - \sin^2 \beta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ماتریس سختی کاهش یافته به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شود

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (6)$$

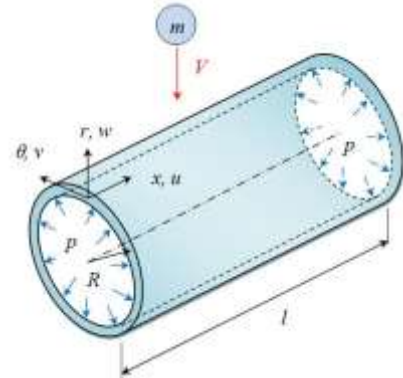
در روابط بالا،  $Q_{11}$ ،  $Q_{12}$ ،  $Q_{22}$  و  $Q_{66}$  ضرایب سختی تک لایه بوده که به صورت  $Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$ ،  $Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$ ،  $Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$  و  $Q_{66} = G_{12}$  تعریف می‌شوند.  $E_1$ ،  $E_2$  و  $G_{12}$  مدول‌های الاستیک و برشی بوده،  $\nu_{12}$  و  $\nu_{21}$  نسبت‌های پواسون تک لایه ماده مرکب می‌باشند. معادلات تعادل نیرویی غشایی (با صرف نظر نمودن از نیروی اینرسی درون صفحه‌ای) به صورت زیر بیان می‌گردد

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

و معادله حاکم بر ارتعاشات جانبی پوسته به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۵]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( Q_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{N_{x\theta}}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( Q_\theta + N_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{N_\theta}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{N_\theta}{R} = \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_0 \frac{\partial w}{\partial t} - \delta(x - x_0) \delta(\theta - \theta_0) F_c(t) - p \quad (8)$$

پوسته، محور  $y$  (یا  $U$ ) در جهت محیطی و محور  $z$  (یا  $r$ ) در جهت شعاعی (عرضی) پوسته استوانه‌ای (در راستای ضخامت  $h$ ) تعریف شده‌اند. تغییر مکان‌های سطح میانی پوسته در جهت‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$ ، به ترتیب  $u$ ،  $v$  و  $w$  در نظر گرفته شده‌اند.



شکل (۱): پوسته استوانه‌ای از ماده مرکب تحت ضربه قائم توسط جرم  $m$  با سرعت  $V$  در راستای شعاعی.

پوسته تحت ضربه یک ضربه‌زننده<sup>۱</sup> کروی به جرم  $m$  شعاع  $r$  و سرعت  $V$  در راستای شعاعی قرار دارد. فرض می‌شود که ضربه عمودی وارد بر پوسته در راستای جانبی در صفحه تقارن پوسته (صفحه گذرنده از محور طولی پوسته و درون صفحه  $xz$ ) انجام می‌شود. بر اساس نظریه غیرخطی پوسته دانتل [۲۵]، کرنش‌های صفحه میانی  $\varepsilon_{x,0}$ ،  $\varepsilon_{\theta,0}$  و  $\gamma_{x\theta,0}$  به صورت زیر بیان می‌گردند

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{\theta,0} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2, \quad (1)$$

$$\gamma_{x\theta,0} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$$

و تغییر در انحنای سطح میانی پوسته  $\kappa_x$ ،  $\kappa_\theta$  و  $\kappa_{x\theta}$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \kappa_{x\theta} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \quad (2)$$

مولفه‌های نیرو و گشتاور برای پوسته استوانه‌ای با چیدمان چندلایه متقارن با لایه‌های ارتوتروپ در حالت لایه‌های ضربدری<sup>۲</sup> به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۷]

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

<sup>1</sup> Stricker

<sup>2</sup> angle-ply

$$\begin{aligned} & \left[ \pi(\rho_m h) \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} \right] \ddot{W}_{nm} + \left[ \frac{\pi c_0}{\omega_0} \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} \right] \dot{W}_{nm} \\ & + \left[ \left( \frac{D_{22}\pi n^4}{R^4 \omega_m^2} + \frac{A_{22}\pi}{R^2 \omega_m^2} \right) \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} - \left( \frac{2D_{12}\pi n^2 + 4D_{66}\pi n^2}{l^2 R^2 \omega_m^2} \right) \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \right. \\ & + \frac{D_{11}\pi}{l^4 \omega_m^2} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^4 \varphi_m}{d\bar{x}^4} \right) d\bar{x} \left. \right] W_{nm} + \frac{A_{12}\pi}{Rh\omega_m^2} \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} U_{nm}(\bar{r}) \\ & + \frac{A_{22}n\pi}{Rh\omega_m^2} \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} V_{nm} + \left\{ \frac{3A_{22}h^2 \pi n^4}{8R^4 \omega_m^2} \int_0^l \varphi_m^4 d\bar{x} - \frac{3A_{22}h^2 \pi n^4}{8R^4 \omega_m^2} \int_0^l \varphi_m^4 d\bar{x} \right. \\ & \left. - \frac{3A_{22}h^2 \pi n^4}{8R^4 \omega_m^2} \int_0^l \varphi_m^4 d\bar{x} - \frac{9A_{11}\pi h^2}{8l^4 \omega_m^2} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} d\bar{x} \right\} W_{nm}^3 \\ & = F_c(\bar{r}) \varphi_m(x/l) \cos(\theta) - p \end{aligned} \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در روابط (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) و انجام عملیات ریاضی در عبارات انتگرالی در معادلات مذکور و سپس بازنویسی نتایج به دست آمده از روابط (۱۵) و (۱۶)،  $U_{nm}(\bar{r})$  و  $V_{nm}(\bar{r})$  در این معادلات بر حسب  $W_{nm}(\bar{r})$  به دست می‌آیند. در نهایت با جایگذاری نتایج به دست آمده در معادله (۱۷)، معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر ارتعاشات در راستای شعاعی پوسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M \ddot{W}_{nm}(\bar{r}) + C \dot{W}_{nm}(\bar{r}) + K W_{nm}(\bar{r}) + \Theta W_{nm}^3 = F_c(\bar{r}) \varphi_m(x/l) \cos(\theta) - p \quad (18)$$

در معادله (۱۸)،  $W_{nm}(\bar{r})$  ترم زمانی پاسخ پوسته،  $M$  ماتریس جرم،  $C$  ماتریس میرایی سازه‌ای سیستم و  $K$  ماتریس سختی بوده که عبارتند از:

$$M = \pi(\rho_m h - A_{mn}) \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x}, \quad (19)$$

$$C = \frac{\pi c_0}{\omega_0} \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x}, \quad (20)$$

و

$$\begin{aligned} K = & \left( \frac{D_{22}\pi n^4}{R^4 \omega_m^2} + \frac{A_{22}\pi}{R^2 \omega_m^2} \right) \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} - \left( \frac{2D_{12}\pi n^2 + 4D_{66}\pi n^2}{l^2 R^2 \omega_m^2} \right) \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} + \\ & \frac{D_{11}\pi}{l^4 \omega_m^2} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^4 \varphi_m}{d\bar{x}^4} \right) d\bar{x} + \pi A_{12} A_{66} \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \\ & \times \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \left[ l^2 n^2 A_{22} \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} + R^2 A_{12} \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \right] / \\ & \left\{ R^2 \omega_m^2 A_{11} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^4 \varphi_m}{d\bar{x}^4} \right) d\bar{x} \left[ l^2 n^2 A_{22} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^4 \varphi_m}{d\bar{x}^4} \right) d\bar{x} - R^2 A_{66} \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \right] \right. \\ & \left. - \omega_m^2 l^2 n^2 \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \left[ l^2 n^2 A_{66} A_{22} \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} + R^2 A_{12} (A_{12} + 2A_{66}) \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \right] \right\} \\ & + \{ \pi l^2 n^2 A_{22} \int_0^l \left( \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} \right) \left[ l^2 n^2 A_{66} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} - R^2 A_{11} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^3 \varphi_m}{d\bar{x}^3} \right) d\bar{x} \right] \right. \\ & \left. + \pi l^2 n^2 R^2 A_{12} A_{22} (A_{12} + A_{66}) \int_0^l (\varphi_m)^2 d\bar{x} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \right\} / \\ & \{ \omega_m^2 R^4 A_{11} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^3 \varphi_m}{d\bar{x}^3} \right) d\bar{x} \times \left[ l^2 n^2 A_{22} \int_0^l (\varphi_m)^2 d\bar{x} - R^2 A_{66} \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \right] - \\ & \omega_m^2 l^2 n^2 R^2 \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \left[ l^2 n^2 A_{22} A_{66} \int_0^l (\varphi_m)^2 d\bar{x} + R^2 (A_{12}^2 + A_{12} A_{66}) \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \right] \} \end{aligned} \quad (21)$$

$\Theta$  و در رابطه (۱۸) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{3A_{22}h^2 \pi n^4}{8R^4 \omega_m^2} \int_0^l (\varphi_m)^4 d\bar{x} - \frac{(A_{12} + 2A_{66})h^2 \pi n^4}{8l^2 R^2 \omega_m^2} \\ & \left[ \int_0^l \left( \varphi_m^3 \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} + \int_0^l \varphi_m^2 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] - \\ & \frac{9A_{11}\pi h^2}{8l^4 \omega_m^2} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} d\bar{x} \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن،  $F_c(t)$  نیروی ضربه و  $t$  زمان می‌باشد.  $Q_v$  و  $Q_x$  نیروهای برشی بوده و به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta}, \quad (9)$$

$$Q_\theta = \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta},$$

$\rho_m$  چگالی ماده،  $\delta$  تابع دلتای دیراک،  $(x_0, \nu_0)$  نقطه اثر

تحریک خارجی (ضربه)،  $c_0 = 2\xi h \rho_m \omega_p$  ضریب میرایی سازه‌ای [۲۳]،  $\varphi$  ضریب میرایی و  $\omega_p$  فرکانس اصلی پوسته می‌باشد [۲۶]. شرایط مرزی گیردار در دو انتهای پوسته به صورت زیر بیان می‌گردند

$$u = v = w = \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \text{ (at } x = 0 \text{ and } x = l) \quad (10)$$

با استفاده از متغیرهای بی‌بعد  $\bar{W} = \frac{W}{h}$ ،  $\bar{V} = \frac{v}{R}$ ،  $\bar{U} = \frac{u}{l}$  که در آن  $\bar{r} = t \omega_m$  و  $\bar{x} = \frac{x}{l}$  می‌باشد، شرایط مرزی به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}} = 0, \text{ (at } x = 0 \text{ and } x = l) \quad (11)$$

بر اساس روش گالرکین، روابط مربوط به نتایج جابجایی بی‌بعد به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۸].

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{r}) = \frac{d\varphi_m(\bar{x})}{d\bar{x}} \cos(n\theta) U_{nm}(\bar{r}), \quad (12)$$

$$\bar{V}(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{r}) = \varphi_m(\bar{x}) \sin(n\theta) V_{nm}(\bar{r}),$$

$$\bar{W}(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{r}) = \varphi_m(\bar{x}) \cos(n\theta) W_{nm}(\bar{r}),$$

که  $\varphi_m(\bar{x})$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \varphi_m(\bar{x}) = & [\sin(\lambda_m \bar{x}) - \sinh(\lambda_m \bar{x})] - \\ & \frac{\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)}{\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)} \times [\cos(\lambda_m \bar{x}) - \cosh(\lambda_m \bar{x})] \end{aligned} \quad (13)$$

و در آن،  $\lambda_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) متناظر با مقادیر ویژه بی‌بعد بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌گردند.

$$\cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m) - 1 = 0. \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در روابط (۷) و (۸) و با انتگرال گیری از روش گالرکین، معادلات اساسی زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{A_{11}\pi}{l} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^3 \varphi_m}{d\bar{x}^3} \right) d\bar{x} - \frac{A_{66}n^2 \pi}{R^2} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] U_{nm}(\bar{r}) \\ & + \frac{(A_{12} + A_{66})n\pi}{l} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right) d\bar{x} V_{nm}(\bar{r}) + \frac{A_{12}n\pi}{l} \int_0^l \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} W_{nm}(\bar{r}) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

و

$$\begin{aligned} & - \frac{(A_{12} + A_{66})n\pi}{R} \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} U_{nm}(\bar{r}) + \\ & \left[ \frac{A_{66}\pi R}{l^2} \int_0^l \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} - \frac{A_{22}n^2 \pi}{R} \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} \right] V_{nm}(\bar{r}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$- \frac{A_{22}hn\pi}{R^2} \int_0^l \varphi_m^2 d\bar{x} W_{nm}(\bar{r}) = 0$$

و

$$K_1 = \omega_1^2 M_1 \quad (24)$$

که در آن فرکانس اصلی پوسته چند لایه می‌باشد. این فرکانس تحت تأثیر زاویه چیدمان لایه‌ها قرار دارد. در صورتی که  $w_1(t)$  و  $w_2(t)$  نشان دهنده جابجایی شعاعی نقطه اعمال نیرو در پوسته و ضربه‌زننده در زمان  $t$  باشند، تغییر شکل ناشی از ضربه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\delta(t) = w_1(t) - w_2(t) \quad (25)$$

نیروی ضربه میان پوسته و ضربه‌زننده در طول زمان ضربه بر اساس نظریه تماس هر تیز به‌صورت زیر بیان می‌گردد

$$F_c(t) = K_2 \delta^p \quad (26)$$

که در آن،  $K_2$  و  $P$  ثابت مواد شرکت کننده در ضربه بوده و مقدار آن از آزمایش‌های استاتیکی به‌دست می‌آیند [۲۹]

$$F_c^*(t) = K_2^* \delta, \quad (27-الف)$$

$$F_c^*(t) = K_2^* [w_1(t) - w_2(t)], \quad (27-ب)$$

سختی موثر  $K_2^*$  به کمک آزمایش‌های دینامیکی قابل استخراج بوده و بر اساس نظریه امپدانس مکانیکی [۲۹] استخراج می‌گردد. این ثابت به کمک رابطه زیر تخمین زده می‌شود

$$K_2^* = \sqrt{\pi} \Gamma \left( \frac{P+1}{2} \right) \frac{2\Gamma \left( \frac{P+1}{2} + 1 \right) + \sqrt{\pi} \Gamma \left( \frac{P+1}{2} \right)}{4\Gamma^2 \left( \frac{P+1}{2} \right) + \pi \Gamma^2 \left( \frac{P+1}{2} \right)} \delta_m^{p-1} K_2 \quad (28)$$

که در آن،  $\Gamma$  تابع گاما می‌باشد. در نهایت معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی جرم و فنر بیان شده به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$M_1 \ddot{w}_1 + (K_1 + K_2^*) w_1 - K_2^* w_2 = 0, \quad (29)$$

$$M_2 \ddot{w}_2 - K_2^* w_1 + K_2^* w_2 = 0,$$

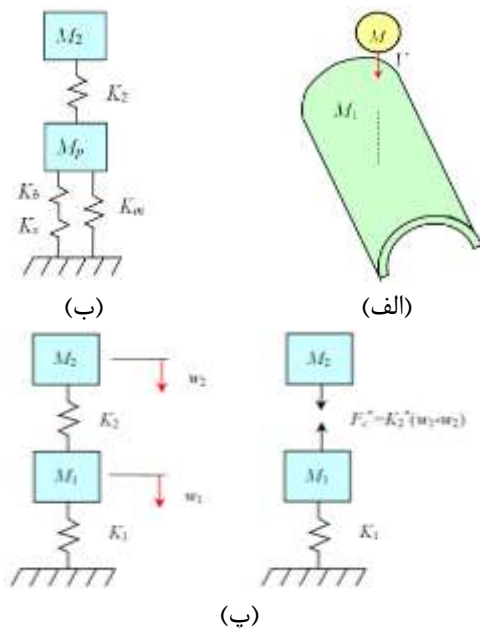
لازم به ذکر است که معادلات (۲۹) با کدنویسی در محیط نرم‌افزار Mathematica با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی رانگ-کوتا حل شده‌اند. همچنین،  $w_1(t)$  و  $w_2(t)$  در معادله (۲۷-ب) با شرایط مرزی زیر جایگزین می‌گردند

$$w_1 = \dot{w}_1 = w_2 = 0, \dot{w}_2 = V; \quad (t = 0). \quad (30)$$

بنابراین، شکل تحلیلی تابع نیروی معادل تماس در طول ضربه از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۱۵ و ۱۶]

$$F_c = \begin{cases} K_2^* [A_1(C_1 - 1) \sin \omega_1 t + A_2(C_2 - 1) \sin \omega_2 t], & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (31)$$

با حل معادله (۱۸) که یک معادله غیرخطی می‌باشد، پاسخ ارتعاشات شعاعی پوسته به تحریک خارجی محاسبه می‌گردد. تنها مجهول در این معادله نیروی تحریک خارجی ناشی از ضربه با سرعت پایین ( $F_c(\bar{t})$ ) می‌باشد که در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نیروی تماس وارد بر پوسته بر اثر تغییر شکل سطح تماس میان ضربه‌زننده و سازه (پوسته) ایجاد می‌شود. شیواکمار و همکاران [۲۳] از مدل جرم و فنر نشان داده شده در شکل ۲-ب، که توسعه یافته مدل لی [۲۴] بود، برای محاسبه تغییرات زمانی نیروی تماس در زمان ضربه استفاده کردند. در مدل آنها، پوسته و ضربه‌زننده به‌صورت دو جرم صلب به‌ترتیب با جرم‌های  $M_2$  و  $M_1$  نمایش داده می‌شوند. خصوصیات نیروی تماس به کمک سختی تماس  $K_2$ ، مربوط به سختی هر تیز و نیروی عرضی تماسی پوسته شامل خمش، برش و سختی غشایی  $K_b$ ،  $K_s$  و  $K_m$ ، تعریف می‌شود. در تحقیق حاضر، مدل جرم و فنر نشان داده شده در شکل ۲-پ مورد استفاده قرار گرفته‌است. این مدل براساس مدل شیواکمار و همکاران [۲۳] می‌باشد که در آن  $K_1$  از رابطه زیر محاسبه می‌گردد



شکل (۲): مدل جرم و فنر معادل در مساله ضربه،

الف- برخورد ضربه زننده و پوسته، ب- مدل جرم و فنر لی [۲۴] و پ- مدل جرم و فنر معادل ضربه [۱۶].

$$K_1 = K_m + \frac{K_b K_s}{K_b + K_s} \quad (23)$$

در این مدل،  $M_2$  و  $M_1$  به ترتیب جرم پوسته و ضربه‌زننده می‌باشند. همچنین،  $K_2$  سختی تماسی و  $K_1$  سختی معادل پوسته بوده که از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۲۴]

ضخامت پوسته می‌باشد. در بخش تحلیل نتایج تأثیر این کمیت‌ها (متغیرها) بر پاسخ پوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲-۱- مدل سازی مسأله در نرم افزار ABAQUS

برای شبیه‌سازی پوسته از ماده مرکب تحت ضربه از نرم افزار اجزای محدود ABAQUS استفاده شده است. پس از مدل سازی پوسته استوانه‌ای و کره ضربه زننده، اعمال خواص مادی به گوی در ماژول خواص<sup>۲</sup> و اعمال خواص لایه کامپوزیتی به پوسته مرکب به کمک گزینه لایه<sup>۳</sup> و اختصاص خواص مکانیکی به لایه‌ها و زوایای مختلف در بخش کامپوزیت<sup>۴</sup> انجام شده است. در شبکه‌بندی پوسته از المان S3D8R و گلوله فولادی صلب از المان R3D4 استفاده شده است. هنگام مونتاژ مدل (قراگیری قطعات در کنار یکدیگر در مدل) در محیط مونتاژ<sup>۵</sup>، جهت تعریف قيود تماس از ماژول برهم‌کنش<sup>۶</sup> استفاده شده است. در این ماژول به کمک قید سطح به سطح<sup>۷</sup> تمامی اجزای مدل به یکدیگر مقید شده و از روش تماس سطحی و گزینه لغزش محدود<sup>۸</sup> بهره گرفته شده است. خواص تماسی بین گلوله و ضربه‌زننده به کمک خواص تعریف شده است. این خواص شامل خواص مماسی<sup>۹</sup> و قائم<sup>۱۰</sup> و اعمال ضریب سختی بین اجزای مدل می‌باشد. در این پژوهش از رفتار ویژگی قائم و اعمال فشار خطی<sup>۱۱</sup> در طی تماس استفاده شده است. جهت تعریف حل‌گر مسأله از ماژول گام<sup>۱۲</sup> استفاده می‌شود. نوع حل‌گر مسأله ضمنی دینامیکی<sup>۱۳</sup>، تعریف شده است. در این قسمت از تحلیل با فعال کردن گزینه NLgeom کرنش‌های مرتبه بالا در محاسبات نرم‌افزار در نظر گرفته شده و محاسبات به صورت غیرخطی انجام می‌شود. شرایط مرزی پوسته در دو انتهای آن به صورت گیردار است. همچنین، از مقدار فشار ثابت در طی تحلیل در نتایج به دست آمده استفاده شده است. در شکل ۳ مدل تجمیعی شبکه‌بندی شده نهایی این دو قطعه شامل پوسته و کره ضربه‌زننده و اعمال شرایط مرزی به پوسته و سرعت اولیه به گوی نشان داده شده است.

که در رابطه بالا،  $T$  کل بازه زمانی تماس<sup>۱</sup> می‌باشد. همچنین،

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{K_1 + K_2^*}{M_1} + \frac{K_2^*}{M_2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{K_1 + K_2^*}{M_1} - \frac{K_2^*}{M_2} \right)^2 + \frac{K_2^{*2}}{M_1 M_2}},$$

$$C_1 = \frac{K_2^*}{K_2^* - \omega_1^2 M_2}, C_2 = \frac{K_2^*}{K_2^* - \omega_2^2 M_2} \quad (32)$$

$$A_1 = \frac{V}{\omega_1 (C_2 - C_1)}, A_2 = \frac{V}{\omega_2 (C_1 - C_2)}$$

برای یک ضربه‌زننده کرووی، سختی تماسی از رابطه زیر به دست می‌آید [۱]

$$K_2 = \frac{2}{3} \sqrt{r} \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (33)$$

که در آن  $r$  شعاع کره،  $E$  مدول الاستیک،  $\nu$  نسبت پواسون ماده ضربه زننده کرووی می‌باشد. بیشینه جابجایی سطح تماس از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد [۲۳]

$$\delta_m = \left( \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right)^{2/5} \left( \frac{5V^2}{4K_2} \right)^{2/5}, \quad (34)$$

بر این اساس  $K_2^*$  از رابطه (۲۸) محاسبه می‌گردد. سرانجام، نیروی ناشی از ضربه از رابطه (۳۱) به دست می‌آید. با جایگذاری نیروی ضربه از رابطه (۳۱) در معادله ارتعاشات زمانی پوسته (رابطه (۱۸))، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حاکم بر ارتعاشات غیرخطی در راستای شعاعی پوسته استوانه‌ای تحت بار ضربه خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۶-۱۵]

$$M\ddot{W}_{mn}(t) + C\dot{W}_{mn}(t) + KW_{mn}(t) + \Theta W_{mn}^3(t) = \begin{cases} k_2 [A_1 (C_1 - 1) \sin \varpi_1 t + A_2 (C_2 - 1) \sin \varpi_2 t] \varphi_m(x/l) \cos(\theta) - p, & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (35)$$

فرکانس طبیعی پوسته در مود  $mn$  از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۶-۱۵]

$$\omega_{mn}^2 = -\frac{1}{K_{mn} \rho h} \quad (36)$$

که

$$K_{mn} = -\frac{T_{33}}{\det T} \quad (37)$$

لازم به ذکر است که ماتریس  $T_{ij}$ ، شکل ماتریسی ضرایب  $W_{mn}(t)$  در رابطه (۳۵) می‌باشد که برای اجتناب از طولانی شدن مقاله روابط باز شده مربوطه به درایه‌های ماتریس  $T_{ij}$  شامل  $T_{33}$  در رابطه (۳۷) در اینجا آورده نشده‌اند. برای حل عددی رابطه (۳۵) با کدنویسی و استفاده از حل‌گر معادلات دیفرانسیل در محیط برنامه ریاضی Mathematica، پاسخ پوسته تحت ضربه استخراج می‌گردد. این پاسخ تحت تأثیر سرعت، جرم و ابعاد ضربه‌زننده، تعداد لایه‌ها، زاویه الیاف و

<sup>2</sup> Properties  
<sup>3</sup> Lamina  
<sup>4</sup> Composite  
<sup>5</sup> Assembly  
<sup>6</sup> Interaction  
<sup>7</sup> Surface to surface  
<sup>8</sup> Finite sliding  
<sup>9</sup> Tangential behavior  
<sup>10</sup> Normal behavior  
<sup>11</sup> Pressure overclosure: Linear  
<sup>12</sup> Step  
<sup>13</sup> Dynamic Implicit

<sup>1</sup> Contact duration

(تحلیل اجزای محدود)  $0.36/s$  در نظر گرفته شده است. از سوی دیگر، نتایج پاسخ‌های زمانی ارائه شده از لحظه شروع برخورد تا لحظه ترک ضربه‌زننده از سطح پوسته در تحلیل‌ها ارائه شده است. همچنین، در نتایج روش تحلیلی و نیز در شبیه‌سازی ABAQUS اثر میرایی سازه‌ای ارائه شده در رابطه (۳۵) در نظر گرفته شده است.

### ۳- نتایج و بحث در آنها

در این بخش ابتدا به صحت‌سنجی نتایج با مقالات موجود و سپس به بررسی و تحلیل نتایج به‌دست‌آمده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود در این پژوهش پرداخته می‌شود.

#### ۳-۱- صحت‌سنجی نتایج

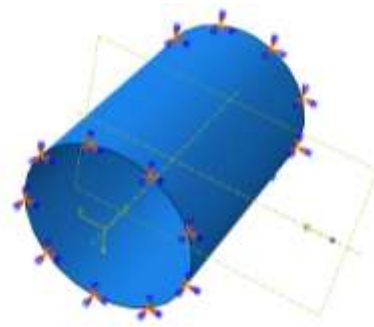
صحت‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده از کدهای کامپیوتری نوشته شده در روش تحلیلی و شبیه‌سازی در روش اجزای محدود در پژوهش کنونی از مقایسه پارامتر فرکانس بی‌بعد پوسته استوانه‌ای از رابطه  $\Omega_{mn} = \omega_{mn} R \sqrt{\rho(1-\mu^2)/E}$  با نتایج ارائه شده در مراجع [۲] و [۳] در جدول ۱ ارائه شده است. در مراجع [۲] و [۳] فرکانس بی‌بعد یک پوسته استوانه‌ای دوسر گیردار از ماده همسانگرد بر اساس نظریه انتشار امواج و روش معادلات فوریه به‌زای  $m = 1$  به‌دست آمده است. ابعاد و خواص مکانیکی پوسته عبارتند از:

$$l = 20m, R = 1m, h = 0.01m, \\ E = 210 GPa, \rho_m = 7850 kg/m^3, \nu = 0.3,$$

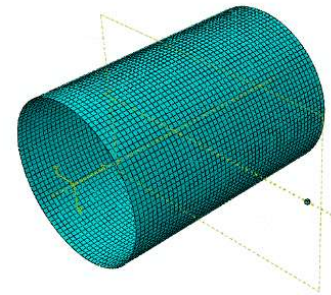
همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق مناسبی بین نتایج به‌دست‌آمده از تحلیل در این تحقیق و نتایج ذکر شده در مراجع وجود دارد.

**جدول (۱):** مقایسه پارامتر فرکانسی بی‌بعد برای پوسته از ماده همسانگرد با شرایط مرزی گیردار-گیردار.

تحقیق حاضر نسبت به [۳]	تحقیق حاضر نسبت به [۲]	تحقیق حاضر	پارامتر فرکانسی بی‌بعد		n
			مرجع [۲]	مرجع [۳]	
-۱/۸۰۸۸	-۲/۶۴۷۳	۰/۰۱۳۶۸	۰/۰۱۳۹۳۲	۰/۰۱۴۰۵۲	۲
-۰/۷۵۸۶	-۰/۹۹۰۱	۰/۰۲۲۵۰	۰/۰۲۲۶۷۲	۰/۰۲۲۷۲۵	۳
-۰/۲۵۵۹	-۰/۴۰۴۵	۰/۰۴۲۱	۰/۰۴۲۲۰۸	۰/۰۴۲۲۷۱	۴
-۰/۰۶۷۶	-۰/۱۷۰۳	۰/۰۶۸۰	۰/۰۶۸۰۴۶	۰/۰۶۸۱۱۶	۵
۰/۰۵۲۱	-۰/۰۲۳۰	۰/۰۹۹۸	۰/۰۹۹۷۴۸	۰/۰۹۹۸۲۳	۶
۰/۵۴۷۲	۰/۵۶۲۶	۰/۱۳۸	۰/۱۳۷۲۴۹	۰/۱۳۷۲۲۸	۷
۰/۰۳۶۰	-۰/۰۰۹۴	۰/۱۸۰۶	۰/۱۸۰۵۳۵	۰/۱۸۰۶۱۷	۸
۰/۰۴۴۰	۰/۰۰۷۰	۰/۲۲۹۷	۰/۲۲۹۵۹۹	۰/۲۲۹۶۸۴	۹
-۰/۰۸۴۰	-۰/۱۱۴۶	۰/۲۸۴۲	۰/۲۸۴۴۳۹	۰/۲۸۴۵۲۶	۱۰



(الف)



(ب)

**شکل (۳):** مدل پوسته استوانه‌ای و کره ضربه‌زننده در نرم‌افزار ABAQUS، (الف)- شرایط مرزی پوسته و اعمال سرعت اولیه به گوی و (ب) مدل شبکه بندی شده.

در مدل‌سازی، جنس گلوله (گوی) از فولاد بوده و خواص مکانیکی و شعاع گوی ضربه‌زننده عبارتند از:

$$E = 200GPa, \nu = 0.3, \rho = 7971.8 kg/m^3, r = 20mm$$

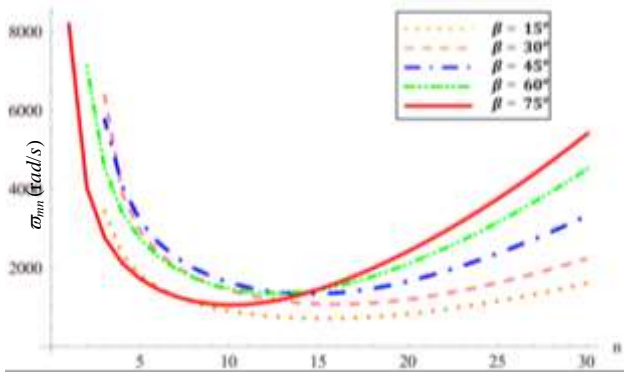
سرعت گلوله  $1 m/s$  در نظر گرفته شده است مگر آنکه مقدار آن جهت بررسی تغییرات آن در پاسخ دینامیکی پوسته ذکر گردد. همچنین، ابعاد هندسی پوسته، خواص مکانیکی برای پوسته مرکب سه لایه و مقدار فشار داخلی آن به‌صورت زیر می‌باشند

$$l = 1m, R = 0.35m, h = 0.0003m, \\ \rho_m = 1700 kg/m^3, P = 0.008, \\ E_1 = 1.41 \times 10^{11} N/m^2, E_2 = 9.1 \times 10^9 N/m^2, \\ G_{12} = 7.2 \times 10^9 N/m^2, \nu_{12} = 0.0194, \nu_{21} = 0.3, \\ \xi = 0.0033, p = 1.5bar,$$

در شبیه‌سازی‌های انجام شده زاویه الیاف در کامپوزیت سه لایه متقارن با لایه‌های ارتوتروپ با لایه‌چینی ضربدری [۳۷]، به‌صورت  $[\beta / -\beta / \beta]$  در نظر گرفته شده که در آن  $\beta$  از  $0^\circ$  تا  $90^\circ$  متغیر است. لازم به ذکر است که ضربه‌زننده پس از برخورد با پوسته و تغییر شکل آن، بر روی پوسته نمی‌ماند و آن را ترک می‌کند. کل زمان تحلیل ضربه در شبیه‌سازی عددی



مختلف لایه‌چینی الیاف با استفاده از روش تحلیلی نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد فرکانس اصلی پوسته برای زاویه  $\beta = 15^\circ$  در  $n=13$  و برای  $\beta = 75^\circ$  در  $n=7$  حاصل می‌شود. همچنین، با توجه به شکل ۵، مشاهده می‌گردد که فرکانس طبیعی پوسته در هر لایه‌چینی با زاویه الیاف مشخص ابتدا تا یک  $n$  مشخص روند کاهشی داشته و پس از آن با افزایش مقدار  $n$  افزایش یافته‌است. از سوی دیگر در  $n$ های بالا با افزایش زاویه الیاف به‌ازای یک  $n$  مشخص مقدار فرکانس طبیعی افزایش یافته‌است.



شکل (۵): تغییرات فرکانس طبیعی پوسته از ماده مرکب برحسب عدد موج محیطی  $n$  برای زوایای مختلف الیاف  $(m=1)$

در ادامه ارائه نتایج، با استفاده از نتایج شبیه‌سازی از روش تحلیلی و اجزای محدود برای معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته (رابطه (۳۵)) تغییرات خیز دینامیکی در راستای شعاعی پوسته مورد بررسی قرار گرفته‌است.

### ۳-۳- بررسی اثر تغییر پارامترهای مختلف بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای مرکب سه لایه تحت ضربه با سرعت پایین

در شکل ۶، تغییرات خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته از ماده مرکب  $(w/h)$  با زاویه الیاف  $\beta = 45^\circ$  برحسب زمان تحت بارگذاری ضربه با سرعت پایین برای دو گلوله با ابعاد متفاوت در تحلیل غیرخطی با استفاده از روش تحلیلی نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، ابعاد ضربه‌زننده اثر قابل توجهی بر پاسخ پوسته داشته و دامنه نوسانات غیرخطی افزایش قابل توجهی می‌یابد. از این شکل مشاهده می‌گردد که فرکانس‌های پاسخ زمانی پوسته تحت ضربه با گلوله با ابعاد

برای صحنه‌گذاری نتایج با منابع موجود، حالتی که پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تحت ضربه با سرعت کم بوده (بدون در نظر گرفتن اثرات ترم‌های غیرخطی در معادله حاکم، میرایی سازه‌ای و فشار داخلی پوسته) توسط کد تهیه شده بر اساس روش تحلیلی مقایسه نتایج با مرجع [۱۵] انجام شده‌است. در مرجع [۱۵] مقدار خیز بیشینه در طی بازه زمانی تماس در نقطه میانی در طول پوسته ارتوتروپ از ماده گرافیت-اپوکسی با مشخصات

$$V = 6 \text{ m/s}, M_1 = 0.6058 \text{ kg}, M_2 = 3 \text{ kg},$$

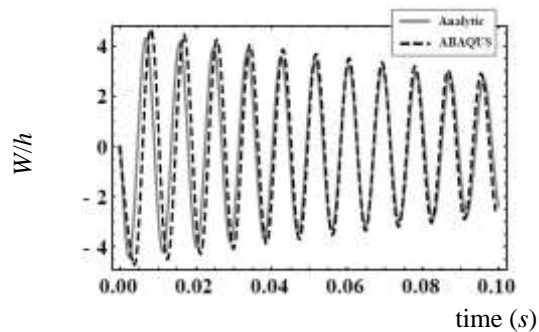
$$[(\pm 45/0_2)_2 / \pm 45/0/90]_{2S}$$

$$R = 0.3 \text{ m}, L = 0.3 \text{ m}, h = 0.0127 \text{ m},$$

$$K_1 = 216.2 \text{ MNm}^{-1}, K_2^* = 1.5 \text{ MNm}^{-1},$$

گزارش شده که در پژوهش کنونی مقدار خیز بیشینه در این نقطه برابر با  $0.389 \text{ mm}$  محاسبه شده که نشان‌دهنده تطابق مناسب بین روش حل در تحقیق کنونی با نتایج مرجع [۱۵] می‌باشد.

در شکل ۴، تغییرات خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته  $(w/h)$  برحسب زمان با استفاده از روش تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود ارائه شده در این مقاله نشان داده شده‌است. مطابق شکل ۴، نتایج شبیه‌سازی تطابق مناسبی بین دو روش تحلیلی و عددی در پژوهش کنونی را نشان می‌دهد.

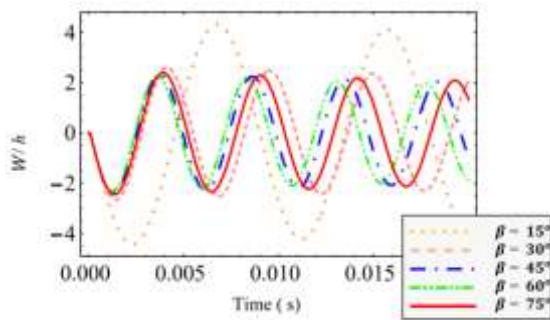


شکل (۴): مقایسه پاسخ خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته برحسب زمان با استفاده از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود.

در ادامه، نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی در نرم‌افزار ABAQUS و کد کامپیوتری نوشته شده در محیط برنامه ریاضی Mathematica برای بررسی و نتیجه‌گیری ارائه شده‌اند.

### ۳-۲- نتایج فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مرکب سه‌لایه با فشار داخلی در برابر ضربه سرعت پایین

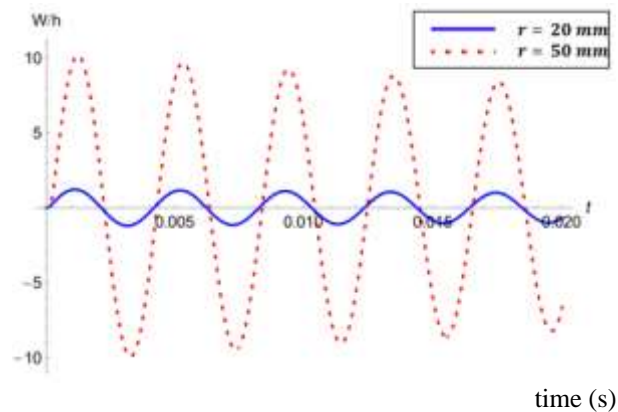
در شکل ۵، تغییرات فرکانس طبیعی پوسته  $(\omega_{min})$  برحسب عدد موج محیطی  $(n)$  به‌ازای مود اول طولی  $m=1$  برای زوایای



شکل (۷): تغییرات خیز بی بعد نقطه میانی پوسته برحسب زمان در برابر ضربه با سرعت پایین به ازای زاویه مختلف الیاف.

برای نشان دادن چگونگی تغییرات تنش در پوسته تحت ضربه، در شکل ۸-الف و ۸-ب توزیع (کانتور) تنش ایجاد شده در پوسته با زاویه الیاف  $45^\circ$  ( $45/45/45$ ) و در شکل ۹-الف و ۹-ب توزیع تنش برای پوسته با زاویه الیاف  $90^\circ$  ( $90/90/90$ )، بر اثر ضربه با سرعت  $3 \text{ m/s}$ ، به ترتیب در لحظه پس از برخورد (شکل ۸-الف و ۹-الف در لحظه زمانی  $10^{-2} \times 1/6 \text{ s}$ ) و اندکی پس از آن (جدا شدن گلوله از پوسته) (شکل ۸-ب و ۹-ب در لحظه زمانی  $10^{-2} \times 4/2 \text{ s}$ ) با استفاده از شبیه سازی اجزای محدود نشان داده شده است. در شکل ۸-الف بیشینه تنش ایجاد شده در پوسته به  $34/7 \text{ MPa}$  رسیده است. این میزان تنش بلافاصله پس از برخورد به میزان زیادی کاهش می یابد. میزان تنش اندکی پس از برخورد (جدا شدن گلوله از پوسته) در شکل ۸-ب نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می گردد، مقدار به دست آمده برای تنش  $4/2 \text{ MPa}$  می باشد. از شکل ۹-الف دیده می شود، میزان تنش به  $24 \text{ MPa}$  رسیده است. بر این اساس مقاومت پوسته در برابر ضربه در زاویه الیاف  $45^\circ$  (شکل ۸-الف) نسبت به زاویه  $90^\circ$  (شکل ۹-الف) بیشتر می باشد. از شکل ۹-ب دیده می شود، میزان تنش به  $4/5 \text{ MPa}$  رسیده است. این نتایج نشان می دهد اندکی پس از برخورد تنش به میزان زیادی کاهش یافته و زاویه الیاف بر میزان تنش ایجاد شده تقریباً بی تأثیر است (شکل ۸-ب و شکل ۹-ب را ببینید). لازم به ذکر است که موقعیت مکانی بیشینه تنش ایجاد شده در لحظه تماس ضربه زنده و پوسته در محل برخورد ضربه زنده در مقطع میانی پوسته می باشد و با گذشت زمان و پس از جدایش ضربه زنده از روی پوسته مقدار بیشینه تنش کاهش یافته و به دلیل ماهیت دینامیکی مساله و ایجاد تغییر شکل های وابسته به زمان در پوسته، موقعیت مکانی بروز بیشینه تنش وابسته به زمان بر روی پوسته جابجا می گردد (شکل ۸ و شکل ۹ را ببینید).

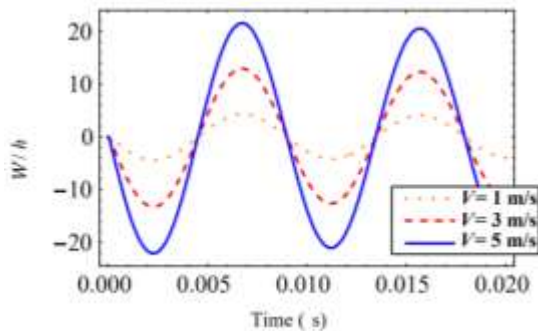
$r=50 \text{ mm}$  و  $r=20 \text{ mm}$  برحسب  $\text{rad/s}$  به ترتیب عبارتند از  $1533$  و  $1496$ .



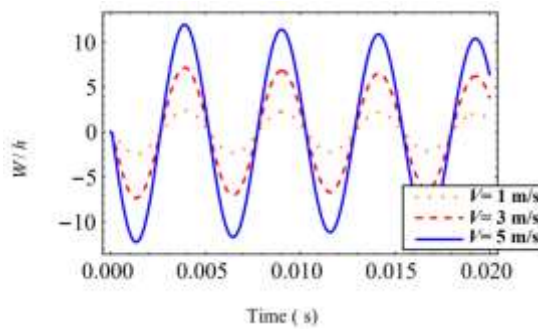
شکل (۶): تغییرات خیز بی بعد نقطه میانی پوسته برحسب زمان در ضربه با سرعت پایین برای گلوله با ابعاد متفاوت.

در شکل ۷، تغییرات خیز بی بعد پوسته نقطه میانی با زاویه مختلف الیاف برحسب زمان تحت ضربه با سرعت پایین با استفاده از روش تحلیلی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می گردد، زاویه الیاف اثر مشخصی بر پاسخ پوسته تحت ضربه دارد. بزرگترین دامنه مربوط به زاویه  $15^\circ$  می باشد. با افزایش زاویه الیاف، دامنه پاسخ کاهش می یابد. از سوی دیگر، میزان تغییر دامنه بین زاویه  $15^\circ$  تا  $30^\circ$  محسوس تر است. با افزایش زاویه الیاف این اختلاف دامنه کاهش می یابد. با افزایش زاویه الیاف، راستای الیاف از راستای طولی به حالت مایل (نسبت به محور طولی پوسته) قرار می گیرد. بنابراین، تحت ضربه، الیاف طولی تحت خمش بزرگتری قرار گرفته و دامنه پاسخ افزایش می یابد. از این شکل مشاهده می گردد که فرکانس های پاسخ زمانی پوسته برحسب  $\text{rad/s}$  برای زوایای  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$ ،  $60^\circ$  و  $75^\circ$  به ترتیب عبارتند از  $1047$ ،  $1283$ ،  $1309$  و  $1257$ . همچنین، فرکانس پاسخ در زوایای  $45^\circ$  و  $60^\circ$  از فرکانس پاسخ در زاویه  $75^\circ$  بیشتر بوده و کمترین فرکانس مربوط به زاویه  $15^\circ$  می باشد. این نتایج از تحلیل فرکانسی پوسته که در شکل ۵ نشان داده شد، کاملاً مورد انتظار است. بنابراین می توان نتیجه گیری کرد که چیدمان الیاف در زاویه ای بین  $30^\circ$  تا  $60^\circ$  علاوه بر کاهش دامنه پاسخ، فرکانس اساسی پوسته را افزایش می دهد. لازم به ذکر است که اثر زاویه الیاف بر پاسخ پوسته تحت ضربه بین زاویه  $15^\circ$  تا  $30^\circ$  و زوایای کمتر قابل توجه بوده و در زوایای بزرگتر میزان تغییرات بسیار کم است.

در شکل ۱۰- الف و ۱۰- ب تغییرات خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته برحسب زمان به ترتیب برای زاویه الیاف  $15^\circ$  و  $75^\circ$  تحت ضربه‌زننده با سه سرعت مختلف با استفاده از روش تحلیلی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت گلوله، دامنه پاسخ افزایش قابل توجهی می‌یابد. این امر به دلیل افزایش نیروی ضربه می‌باشد. همچنین، برای پوسته با زاویه الیاف  $75^\circ$  نسبت به پوسته با زاویه الیاف  $15^\circ$ ، فرکانس پاسخ پوسته افزایش یافته که دلیل آن را می‌توان در تحریک مودهای ارتعاشی سازه در اثر ضربه مشخص دانست به گونه‌ای که فرکانس پاسخ زمانی می‌تواند به یکی از فرکانس‌های طبیعی پوسته نزدیک گردد. در شکل ۱۰- الف و شکل ۱۰- ب فرکانس زمانی پاسخ پوسته برای الیاف با زاویه  $15^\circ$  و  $75^\circ$  به ترتیب تقریباً برابر با  $698 \text{ rad/s}$  ( $111 \text{ Hz}$ ) و  $1257 \text{ rad/s}$  ( $200 \text{ Hz}$ ) است به گونه‌ای که فرکانس پاسخ زمانی به دست آمده تقریباً برابر با فرکانس‌های پایه برای این دو زاویه در شکل ۵ است.



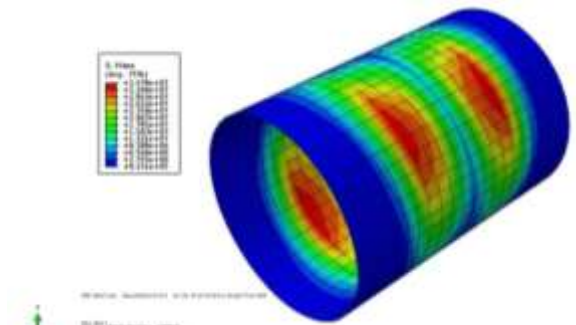
(الف)



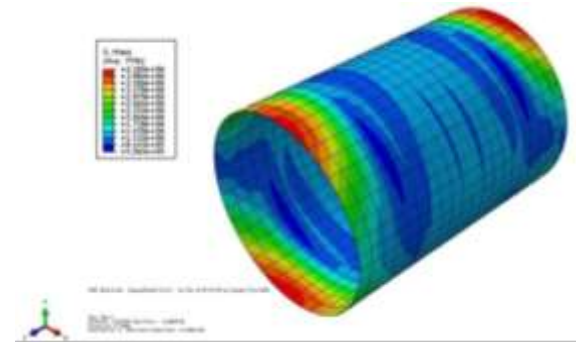
(ب)

شکل ۱۰): تغییرات خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته با زاویه الیاف متفاوت برحسب زمان تحت ضربه با سرعت پایین برای گلوله با سه سرعت متفاوت، الف- پوسته با زاویه الیاف  $15^\circ$  و ب- پوسته با زاویه الیاف  $75^\circ$ .

در شکل ۱۱، تغییرات نیروی ضربه وارد شده در نقطه میانی پوسته با زوایای الیاف  $15^\circ$  و  $75^\circ$  توسط ضربه‌زننده در سرعت‌های متفاوت برحسب زمان با استفاده از روش تحلیلی

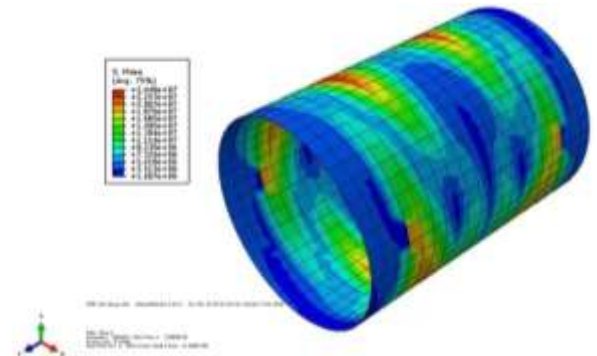


(الف)

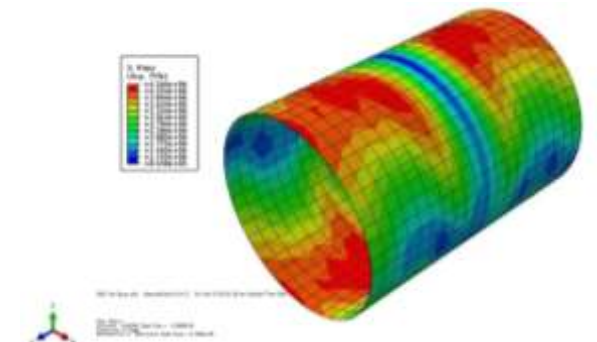


(ب)

شکل ۸): تنش ایجاد شده در پوسته با زاویه الیاف  $45^\circ$  تحت ضربه، الف- در لحظه پس از برخورد ( $1/6 \times 10^{-2} \text{ s}$ ) و ب- اندکی پس از برخورد ( $4/2 \times 10^{-2} \text{ s}$ ).



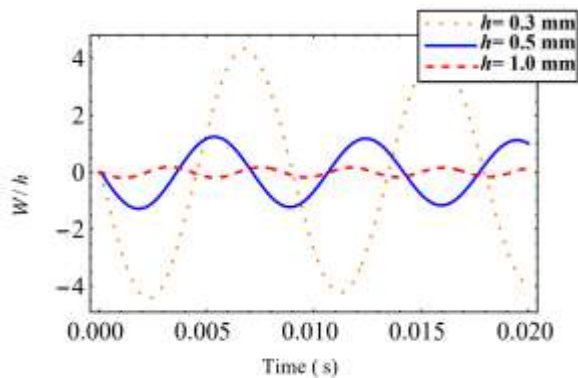
(الف)



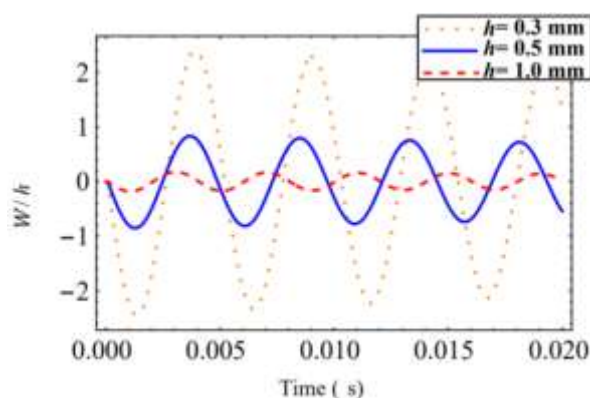
(ب)

شکل ۹): تنش ایجاد شده در پوسته با زاویه الیاف  $90^\circ$  تحت ضربه، الف- در لحظه پس از برخورد ( $1/6 \times 10^{-2} \text{ s}$ ) و ب- اندکی پس از برخورد ( $4/2 \times 10^{-2} \text{ s}$ ).

برای ضخامت‌های  $h = 0.3 \text{ mm}$ ،  $h = 0.5 \text{ mm}$  و  $h = 1 \text{ mm}$  به ترتیب عبارتند از ۱۲۵۷، ۱۳۰۹ و ۱۴۹۶.



(الف)

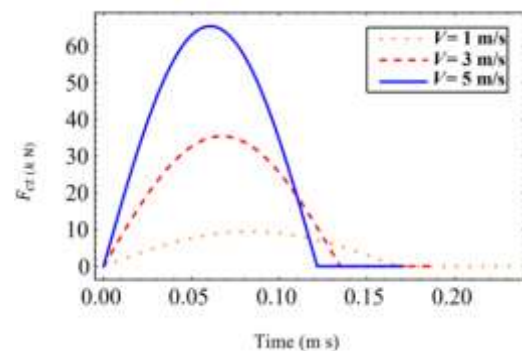


(ب)

**شکل (۱۲):** تغییرات خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته با ضخامت‌های مختلف و زاویه الیاف متفاوت به ضربه سرعت پایین برحسب زمان، (الف) - پوسته با زاویه الیاف  $15^\circ$  و (ب) - پوسته با زاویه الیاف  $75^\circ$ .

در صورتی که ضخامت کلی پوسته ثابت نگه داشته شود و تعداد لایه‌ها افزایش یابد به دلیل تقارن چیدمان لایه‌ها خواص پوسته تغییر نمی‌یابد. در شکل ۱۳، پاسخ دینامیکی خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته با زاویه الیاف  $15^\circ$  تحت ضربه برای تعداد لایه‌های برابر با سه، پنج و هفت با حفظ ضخامت کلی پوسته با استفاده از روش تحلیلی نشان داده شده است. چیدمان زاویه الیاف برای حالت‌های شامل پنج و هفت لایه به ترتیب به صورت  $[\beta / -\beta / \beta / -\beta / \beta / -\beta / \beta]$  و  $[-\beta / \beta / -\beta / \beta / -\beta / \beta / -\beta / \beta]$  گرفته شده‌است. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود، پاسخ زمانی این نوع لایه‌چینی پوسته به تعداد لایه آن بستگی ندارد. دلیل این مطلب را این‌گونه دانست که به دلیل تقارن در لایه‌چینی متقارن با تعداد لایه‌های فرد مجموع ضخامت‌های هر دو لایه متقارن نسبت به لایه میانی پوسته ثابت مانده که تاثیری بر ماتریس سفتی محوری و خمشی پوسته ندارد. در نتیجه نسبت سختی به جرم مجموعه ثابت می‌ماند که منجر به

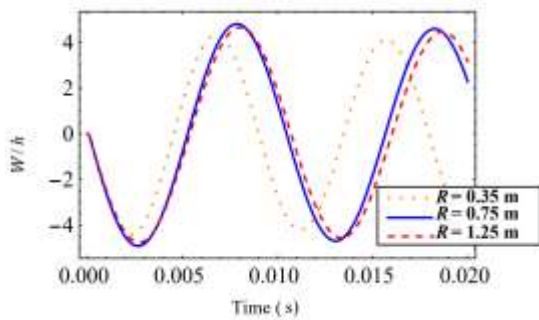
نشان داده شده است. لازم به ذکر است که در استخراج نتایج این شکل تمامی پارامترهای پوسته و ضربه‌زننده ثابت نگه داشته شده و تنها زاویه الیاف تغییر داده شده‌است. از این شکل مشاهده می‌گردد که نیروی ضربه بین پوسته و ضربه‌زننده تابعی از سرعت گلوله می‌باشد و با افزایش سرعت گلوله افزایش قابل توجهی پیدا می‌کند. همچنین رابطه نیرو و سرعت غیرخطی می‌باشد. همان‌طور که انتظار می‌رود، نیروی ضربه‌زننده برای زوایای متفاوت الیاف پوسته تغییر نکرده است و به بیان دیگر نیروی ضربه به زاویه الیاف وابسته نمی‌باشد.



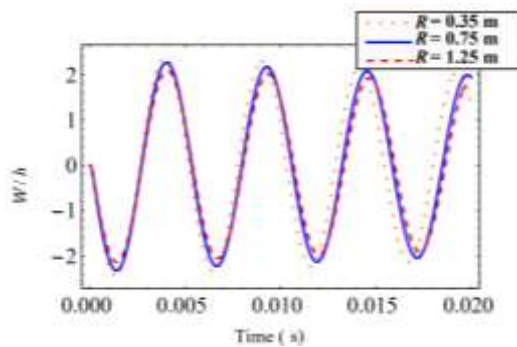
**شکل (۱۱):** تغییرات نیروی ضربه (تماس) بین پوسته با زاویه الیاف  $15^\circ$  و  $75^\circ$  و ضربه‌زننده با سرعت‌های متفاوت برحسب زمان.

در شکل ۱۲-الف و ۱۲-ب تغییرات خیز بی‌بعد نقطه میانی در طول پوسته به ترتیب با زاویه الیاف  $15^\circ$  و  $75^\circ$  تحت ضربه‌زننده با سرعت  $1 \text{ m/s}$  برای سه ضخامت متفاوت پوسته با استفاده از روش تحلیلی نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت، دامنه پاسخ به میزان زیادی کاهش می‌یابد. این امر به دلیل افزایش اینرسی پوسته تحت ضربه بوده که با توان سوم ضخامت رابطه دارد. به علاوه رفتار پوسته در زاویه الیاف  $75^\circ$  شبیه به زاویه  $15^\circ$  بوده اما دامنه ارتعاشات شعاعی به طور کلی کاهش یافته است. به‌طور کلی فرکانس طبیعی پوسته با کمیت‌هایی مانند ضخامت، شعاع پوسته و زاویه الیاف تغییر می‌کند (شکل‌های ۵، ۷، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ را ببینید). از شکل ۱۲ مشاهده می‌گردد که میزان جابجایی نقطه میانی پوسته (به عنوان نمونه برای ضخامت مشخص مثلاً  $0.3 \text{ mm}$ ) در زاویه الیاف  $15^\circ$  نسبت به پوسته با زاویه الیاف  $75^\circ$  متفاوت است. همچنین، از شکل ۱۲-الف مشاهده می‌گردد که فرکانس‌های پاسخ زمانی پوسته برحسب  $\text{rad/s}$  برای ضخامت‌های  $h = 0.3 \text{ mm}$ ،  $h = 0.5 \text{ mm}$  و  $h = 1 \text{ mm}$  به ترتیب عبارتند از ۶۹۸، ۸۹۸ و ۱۳۹۷ و برای شکل ۱۲-ب مقادیر فرکانس‌های پاسخ زمانی به دست آمده برحسب  $\text{rad/s}$





(الف)



(ب)

**شکل (۱۳):** تغییرات خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته با شعاع‌های مختلف به ضربه با سرعت پایین، الف- زاویه الیاف  $15^\circ$  و ب- زاویه الیاف  $75^\circ$ .

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، شبیه‌سازی تحلیل غیرخطی ضربه با سرعت پایین برای یک پوسته استوانه‌ای از ماده مرکب با فشار داخلی، با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی صورت گرفت. خلاصه‌ای از نتایج به‌دست‌آمده عبارتند از:

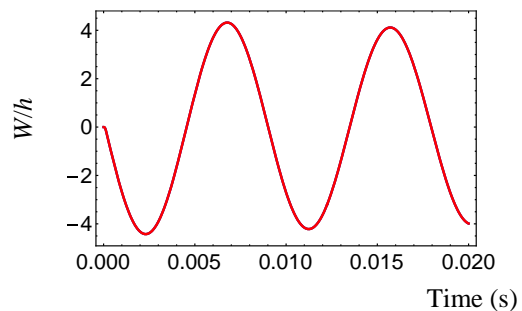
۱- مشاهده گردید که زاویه الیاف اثر قابل توجهی بر پاسخ پوسته تحت ضربه دارد. بزرگترین دامنه در زاویه الیاف  $15^\circ$  می‌باشد. با افزایش زاویه الیاف، دامنه پاسخ کاهش می‌یابد. علاوه بر این، میزان تغییر دامنه بین زاویه الیاف  $15^\circ$  تا  $30^\circ$  محسوس است. با افزایش زاویه الیاف این اختلاف دامنه کاهش می‌یابد. از سوی دیگر پوسته با الیاف طولی تحت خمش بزرگتری قرار گرفته و دامنه پاسخ افزایش می‌یابد.

۲- فرکانس پاسخ در زوایای الیاف  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  از فرکانس پاسخ در زاویه الیاف  $75^\circ$  بیشتر بوده و کمترین فرکانس مربوط به زاویه  $15^\circ$  می‌باشد.

۳- در زاویه الیاف بین  $30^\circ$  تا  $60^\circ$  علاوه بر کاهش دامنه پاسخ، مقدار فرکانس اساسی پوسته افزایش می‌یابد.

۴- با افزایش سرعت گلوله دامنه پاسخ افزایش قابل توجهی می‌یابد. این مورد به دلیل افزایش انرژی ضربه می‌باشد.

رفتار دینامیکی (پاسخ زمانی) یکسان می‌گردد. همچنین، از شکل ۱۳ مشاهده می‌گردد که فرکانس پاسخ زمانی پوسته برابر است با  $698 \text{ rad/s}$ .



**شکل (۱۴):** پاسخ خیز بی‌بعد شده نقطه میانی پوسته با ضخامت ثابت و تعداد لایه‌های فرد به ضربه با سرعت پایین.

در شکل ۱۴-الف و ۱۴-ب تغییرات خیز بی‌بعد نقطه میانی پوسته به ترتیب با زاویه الیاف  $15^\circ$  و  $75^\circ$  تحت ضربه‌زنده با سرعت  $1 \text{ m/s}$  برای سه شعاع متفاوت پوسته با استفاده از روش تحلیلی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش شعاع پوسته، دامنه پاسخ کمی افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش شعاع از حدی مشخص، مقادیر پاسخ ارتعاشی تغییر چندانی ندارد. این مورد به این دلیل است که با افزایش شعاع پوسته، جرم و سختی با یکدیگر افزایش می‌یابند. بر این اساس در شعاع کمتر سختی پوسته غالب بوده و با افزایش شعاع از حدی مشخص، این اثر کاهش می‌یابد. بنابراین، دامنه پاسخ تغییر چندانی پیدا نمی‌کند. همچنین فرکانس پاسخ به دلیل تغییر جرم و سختی پوسته، در شعاع کوچکتر بالاتر بوده و با افزایش شعاع پوسته اثر تغییر فرکانس کمتر مشاهده می‌گردد. در زاویه الیاف  $75^\circ$  برخلاف زاویه  $15^\circ$ ، با افزایش شعاع پوسته، دامنه پاسخ کاهش می‌یابد. این نتیجه نشان می‌دهد که در این زاویه از الیاف، اثر تغییر سختی بر تغییر جرم پوسته غالب است. بر این اساس در شعاع کمتر جرم پوسته غالب بوده و با افزایش شعاع پوسته، این اثر کاهش می‌یابد. بنابراین، دامنه پاسخ با افزایش شعاع کاهش یافته است. از شکل ۱۴-الف مشاهده می‌گردد که فرکانس‌های پاسخ زمانی پوسته برحسب  $\text{rad/s}$  برای شعاع‌های  $R = 0.35 \text{ m}$ ،  $R = 0.75 \text{ m}$  و  $R = 1.25 \text{ m}$  به ترتیب عبارتند از  $698$ ،  $419$  و  $571$  و برای شکل ۱۴-ب مقادیر فرکانس‌های پاسخ زمانی به‌دست‌آمده برحسب  $\text{rad/s}$  برای ضخامت‌های  $R = 0.35 \text{ m}$ ،  $R = 0.75 \text{ m}$  و  $R = 1.25 \text{ m}$  به ترتیب عبارتند از  $1257$ ،  $1150$  و  $1161$ .

- Instability of Axially Excited Cylindrical Shells”, *Computers and Structures*, Vol. 82, No. 31–32, pp. 2621–2634, 2004.
4. Shin, L.Y. and Wann, K.Y. “Nonlinear Free Vibration Analysis of Rotating Hybrid Cylindrical Shells”, *Computers and Structures*, Vol. 70, No. 2, pp. 161–168, 1999.
  5. Liu, Y. and Chu, F. “Nonlinear Vibrations of Rotating Thin Circular Cylindrical Shell”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 67, No. 2, pp. 1467–1479, 2012.
  6. Bakhtiari-Nejad, F. and Bideleh, S.M.M. “Nonlinear Free Vibration Analysis of Prestressed Circular Cylindrical Shells on the Winkler/Pasternak Foundation”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 53, pp. 26–39, 2012.
  7. Kurylov, Y. and Amabili, M. “Polynomial versus Trigonometric Expansions for Nonlinear Vibrations of Circular Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 9, pp. 1435–1449, 2010.
  8. Toorani, M.H. “Dynamics of the Geometrically Non-linear Analysis of Anisotropic Laminated Cylindrical Shells”, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 38, No. 9, pp. 1315–1335, 2003.
  9. Toorani, M.H. and Lakis, A.A. “Large Amplitude Vibrations of Anisotropic Cylindrical Shells”, *Computers and Structures*, Vol. 82, No. pp. 23–26, 2004.
  10. Lakis, A.A., Selmane, A. and Toledano, A. “Nonlinear Free Vibration Analysis of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, No. 1, pp. 27–49, 1998.
  11. Amabili, M. “Nonlinear Vibrations of Laminated Circular Cylindrical Shells: Comparison of Different Shell Theories”, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 1, pp. 207–220, 2011.
  12. Amabili, M. “Nonlinear Vibrations of Angle-ply Laminated Circular Cylindrical Shells: Skewed Modes”, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 12, pp. 3697–3709, 2012.
  13. Ganapathi, M. and Varadan, T.K. “Nonlinear Free Flexural Vibrations of Laminated Circular Cylindrical Shells”, *Composite Structures*, Vol. 30, No. 1, pp. 33–49, 1995.
  14. Zhang, W., Hao, Y.X. and Yang, J. “Nonlinear Dynamics of FGM Circular Cylindrical Shell with Clamped-clamped Edges”, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, pp. 1075–86, 2012.
  15. Gong, S.W., Toh, S.L. and Shim, V.P.W. “The Elastic Response of Orthotropic Laminated Cylindrical Shells to Low-velocity Impact”,
- نیروی ضربه با افزایش سرعت گلوله افزایش قابل توجهی پیدا می‌کند. همچنین رابطه نیروی ضربه و سرعت غیرخطی می‌باشد.
- ۵- با افزایش ضخامت پوسته، دامنه پاسخ به میزان زیادی کاهش می‌یابد. این مورد به دلیل افزایش سختی پوسته تحت ضربه بوده که با توان سوم ضخامت رابطه دارد. همچنین، رفتار پوسته در زاویه الیاف  $75^\circ$  شبیه به پوسته با زاویه الیاف  $15^\circ$  بوده اما دامنه نوسانات به طور کلی کاهش یافته‌است.
  - ۶- در صورتی که ضخامت کلی پوسته ثابت نگه داشته شود و تعداد لایه‌های فرد افزایش یابد به دلیل تقارن چیدمان لایه‌ها خواص پوسته تغییر نمی‌یابد. بنابراین، پاسخ پوسته در صورت ثابت بودن ضخامت کلی، به تعداد لایه بستگی ندارد.
  - ۷- با افزایش شعاع پوسته در زوایای طولی الیاف، دامنه پاسخ کمی افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش شعاع از حدی مشخص پاسخ تغییر چندانی ندارد. این نتیجه به دست آمده به این دلیل است که با افزایش شعاع پوسته، جرم و سختی با یکدیگر افزایش می‌یابند. بر این اساس در شعاع کمتر سختی پوسته غالب بوده و با افزایش شعاع از حدی مشخص، این اثر کاهش می‌یابد.
  - ۸- فرکانس پاسخ به دلیل تغییر جرم و سختی پوسته، در شعاع کوچکتر بالاتر بوده و با افزایش شعاع پوسته اثر تغییر فرکانس کمتر مشاهده می‌گردد.
  - ۹- در پوسته با زاویه الیاف  $75^\circ$  بر خلاف پوسته با زاویه الیاف  $15^\circ$ ، با افزایش شعاع پوسته، دامنه پاسخ کاهش می‌یابد. این مطلب نشان می‌دهد که در این زاویه الیاف، اثر تغییر سختی بر تغییر جرم پوسته غالب است. بر این اساس در شعاع کمتر جرم پوسته غالب بوده و با افزایش شعاع پوسته، این اثر کاهش می‌یابد. بنابراین، دامنه پاسخ با افزایش شعاع کاهش یافته‌است.
- ۵- مراجع**
1. Pellicano, F. “Vibrations of Circular Cylindrical Shells: Theory and Experiments”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 303, No. 1–2, pp. 154–70, 2007.
  2. Pellicano, F., Amabili, M. and Paidoussis, M.P. “Effect of the Geometry on the Non-linear Vibration of Circular Cylindrical Shells”, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 37, No. 7, pp. 1181–98, 2002.
  3. Goncalves, P.B. and Prado, Z.G. “Effect of Non-linear Modal Interaction on the Dynamic

26. Reddy J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plate: Theory and Analysis", New York: CRC Press; 1997.
27. Zhang, Y., Zhu, P. and Lai, X. "Finite Element Analysis of Low-velocity Impact Damage in Composite Laminated Plates", *Materials and Design*, Vol. 27, pp. 513-519, 2006.
28. Zhou, D.W. and Stronge, W.J. "Low Velocity Impact Denting of HSSA Lightweight Sandwich Panel", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 1031-1045, 2006.
29. Ramkumar, R.L. and Thakar, Y.R. "Dynamic Response of Curved Laminated Plates Subjected to Low Velocity Impact", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 109, pp. 67-71, 1987.
30. Meoa, M., Vignjevic, R. and Marengo, G. "The Response of Honeycomb Sandwich Panels under Low-Velocity Impact Loading", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47, pp. 1301-1325, 2005.
31. Yigit, A.S. and Christoforou, A.P. "Computational Modeling and Simulation of Low Velocity Impact on Fibrous Composite Panels Drop Weight Unpartitioned Model", *Composite Structures*, Vol. 81, pp. 568-574, 2007.
32. Farooq, U. and Gregory, K. "Dynamic Response of Curved Laminated Plates Subjected to Low Velocity Impact", *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 4, No. 2, pp. 24-32, 2009
33. Khalili, S.M.R., Soroush, M., Davar, A. and Rahmani, O. "Finite Element Modeling of Low-velocity Impact on Laminated Composite Plates and Cylindrical Shells", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 1363-1375, 2011.
34. Amabili, M. "Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates", pp. 156-160, Cambridge University Press, 2008.
35. Kiran Kumar, P. Subrahmanyam, J.V. and Rama Lakshmi, P. "A Review on Non-Linear Vibrations of Thin Shells", *International Journal of Engineering Research and Applications*, Vol. 3, No. 1, pp. 181-207, 2013.
36. Ustundag, B. "On the Free Vibration Behavior of Cylindrical Shell Structures", MSc Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2011.
37. Jones, R.M. "Mechanics of Composite Materials", Taylor and Francis, Second Edition, 1999.
- Composite Engineering, Vol. 4, No. 2, pp. 247-266, 1994.
16. Gong, S.W., Lam, K.Y. and Reddy, J.N. "The Elastic Response of Functionally Graded Cylindrical Shells to Low-velocity Impact", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 22, pp. 397-417, 1999.
17. Khalili, M.R., Malekzadeh K. and Mittal R.K. "Effect of Physical and Geometrical Parameters on Transverse Low-velocity Impact Response of Sandwich Panels with a Transversely Flexible Core", *Composite Structures*, Vol. 77, pp. 430-443, 2005.
18. Sotoodeh, A. and Enferadi, M. "Parametric Study of Dynamic Response of Composite Cylindrical Shells Subjected to Low Velocity Impact", The 7th Conference of Iranian Aerospace Society, Tehran, Iran, Feb. 19, 2007. (in Persian)
19. Sadighi, M., Ahmadi, I. and Aghdam, M.M. "Transient Finite Element Analysis of Low Velocity Impact on Cylindrical Composite Shell", The 16th Annual Conference of Mechanical Engineering (ISME2008), Kerman, Iran, May 14-16, 2008. (in Persian)
20. Malekzadeh Fard, K., Payganeh, G., and Kardan, M. "Dynamic Response of Sandwich Panels with Flexible Cores and Elastic Foundation Subjected to Low-velocity Impact", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 45, No. 2, pp. 27-42, 2013. (in Persian)
21. Ashnai Ghasemi, F., Malekzadeh Fard, K. and Paknejad, R. "Response of Cantilever Fiber Metal Laminate (FML) Plates using an Analytical-numerical Method", *Modares Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 57-67, 2013. (in Persian)
22. Choi, I.H. "Geometrically Nonlinear Transient Analysis of Composite Laminated Plate and Shells Subjected to Low-velocity Impact", *Composite Structures*, Vol. 142, pp. 7-14, 2016.
23. Shivakumar, K.N., Elber, W. and Illg, W. "Prediction of Impact Force and Duration due to Low-Velocity on Circular Composite Laminates", *ASME Transaction Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 674-680, 1985.
24. Lee, D.I. and Kwak, B.M. "An Analysis of Low-Velocity Impact of Spheres on Elastic Curved Shell Structures", *International Journal of Solid Structures*, Vol. 30, No. 21, pp. 2879-2893, 1993.
25. Mindlin, R. D. "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", *ASME Transaction Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 31-38, 1951.