نشریه علمی «علوم و فناوری‌های پدافند نوین»
سال دوازدهم، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰؛ ص ۲۱۵- ۲۰۵

علمی- پژوهشی

حفاظت از خطوط ارتباطی در برابر عملیات تخریبی با استفاده از ممانعت برش کمینه پویا

ابوالفضل عبدالله‌زاده [۱]، مسعود امان [۲]*، جواد طیبی [۳]

۱- دانشجوی دکتری، ۲- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده ریاضیات و آمار، پردیس علوم، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران،
۳- استادیار دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

(دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۲۸، پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۹)

چکیده

یکی از اهداف عمده دشمن در جنگ‌های زمینی رصد کردن شبکه‌های ارتباطی و قطع خطوط جابه‌جایی نیرو و تجهیزات می‌باشد. رویکرد بهینه برای این منظور قطع خطوط واقع بر یک برش کمینه است. دشمن این کار را معمولاً با حملات هوایی، موشکی یا توپخانه و همچنین تخریب پل‌ها و جاده‌ها انجام می‌دهد. از طرفی نیروهای مدافع می‌خواهند از منابع و امکانات موجود، حداکثر استفاده را کرده و مانع رسیدن دشمن به هدفش شوند. در این مقاله این مسأله را از دید نیروهای مدافع در قالب یک مسأله ممانعت شبکه دوسطحی فرمول‌بندی می‌کنیم. این مسأله را مسأله ممانعت از برش کمینه پویا می‌نامیم. با توجه به پیچیدگی ذاتی و ماهیت مسأله، آن را به کمک رویکرد تجزیه بندرز حل نموده و در نهایت اعتبار مسأله را به کمک یک نمونه کاربردی مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

کلیدواژه‌ها: خطوط ارتباطی، عملیات تخریبی ، ممانعت شبکه، برش کمینه، تجزیه‌بندرز

Communication Line Protection Against Sabotages Using Dynamic Minimum Cut Interdiction

A. Abdolahzadeh, M. Aman*, J. Tayyebi

University of Birjand

(Received: 18/08/2020; Accepted: 29/12/2020)

Abstract

In ground wars, one of the enemy's main goals is to monitor communication networks and to interrupt the force and equipment lines. For this purpose, the optimal approach is to disconnect routes on a minimum cut. This is possible by air, missile, and artillery attacks, as well as the destruction of bridges and roads. On the other hand, the defense forces seek to exploit maximally the available resources and facilities to interdict the enemy reaching this goal. In this paper, we model this problem from the viewpoint of defense forces in the form of a bi-level network interdiction problem. Due to the inherent complexity and nature of the problem, we solve it using the Bender's decomposition approach. Finally, we establish the validity of the model by a practical example.

Keywords: Communication Lines, Sabotages, Network Interdiction, Minimum Cut, Bender’s Decomposition

* Corresponding Author E-mail: mamann@birjand.ac.ir

۱- مقدمه

افسران و فرماندهان نظامی برخلاف سایر مدیران و تصمیم‌گیرندگان دیگر جز در زمان جنگ نمی‌توانند فنون، مهارت‌ها و تصمیمات خود را ارزیابی کنند. علاوه بر این ممکن است در زمان جنگ برای وضعیت‌هایی تصمیم‌گیری کنند که تجربه آن را در زمان صلح نداشته‌اند. به همین دلیل در تاریخ نظامی‌گری، همواره روش‌ها و فنونی گسترش یافته که به آن‌ها اجازه می‌دهد در زمان صلح تصمیمات خود را مورد ارزیابی قرار دهند. فرمول‌بندی وسیله‌ای برای کسب تجربه و تصحیح خطا بدون پرداخت هزینه‌ای گزاف در جهان واقعی است و فرصتی برای اصلاح پیشنهادها یا توسعه و تعدیل در یک سامانه و یا فرآیند را ارائه می‌دهد. فرمول‌بندی یکی از ارکان نو ظهور در عرصه تصمیم‌گیری در حوزه‌های نظامی است [۱].

بهینه‌سازی شبکه، یک شاخه از علم تحقیق در عملیات است که به بررسی مسائل بهینه‌سازی بر ساختار گراف و شبکه می‌پردازد. یکی از مهم‌ترین زمینه‌ها در این شاخه مسأله ممانعت از بهینه‌سازی شبکه است. در این مقاله به بحث در مورد یک مسأله جدید در این دسته پرداخته و آن را فرمول‌بندی و حل می‌کنیم. این مسأله یکی از کاربردی‌ترین مسائل نظامی در حوزه پدافندی را دنبال می‌کند.

مسائل بهینه‌سازی شبکه شامل مسائلی می‌شوند که بر ساختار شبکه تعریف شده و هدف آن‌ها بیشینه یا کمینه کردن یک یا چند تابع در شرایط خاص و تحت محدودیت‌های مشخص می‌باشد. می‌توان برای هر مسأله بهینه‌سازی شبکه یک مسأله ممانعت تعریف کرد. در مسائل ممانعت شبکه نیروی بازدارنده‌ای وجود دارد که با تغییر ساختار و پارامترهای شبکه از جمله تخریب، ممنوع کردن، منحرف کردن، تغییر ظرفیت کمان‌ها و رئوس تلاش می‌کند مقدار بهینه مسأله را تا حد ممکن بدتر کند. در این مسائل دو فرد یا دو نیرو (یکی ممانعت کننده و دیگری کاربر) با یکدیگر در حال رقابت‌اند. کاربر هدفش این است که استفاده بهینه را از شبکه ببرد. مثلاً کوتاه‌ترین مسیر را بپیماید یا سعی در ارسال بیشترین جریان را از رأس مبدأ به رأس مقصد دارد. از طرف دیگر ممانعت‌کننده می‌خواهد با استفاده از بودجه‌ای که در دست دارد بیشترین خسارت را به شبکه در راستای بیشترین کاهش در اهداف کاربر وارد کرده تا از رسیدن کاربر به هدفش تا حد ممکن خودداری کند. البته ممکن است جایگاه ممانعت کننده و کاربر بنا به کاربرد مسأله تغییر کند [۲].

در گونه‌ای از مسائل ممانعت شبکه، هدف ممانعت‌کننده جلوگیری از جریان یافتن بعضی موارد نامطلوب مانند سلاح‌های دشمن، مواد مخدر و ... در یک شبکه است. از این نوع مسائل تحت عنوان ممانعت از بیشترین جریان یاد می‌شود. نیروی ممانعت‌کننده در این مسائل تلاش می‌کند تا زیرمجموعه‌ای از کمان‌ها یا رئوس را حذف کند به طوری که بیشترین جریانی که می‌توان در شبکه از رأس منبع به رأس مقصد فرستاد،کمینه گردد و از طرفی مجموع هزینه‌های تخریب شبکه از بودجه ممانعت تجاوز نکند. در حقیقت در این مسأله، ممانعت کننده می‌خواهد بیشترین جریان را که کاربر از رأس مبدأ به رأس مقصد منتقل می‌کند، با استفاده از منابع محدودی که در اختیار دارد کمینه کند.

مسأله ممانعت از بیشترین جریان اولین بار در جنگ ویتنام برای تخریب خطوط ارتباطی دشمن مورد استفاده قرار گرفت. در این مسأله، دشمن قصد دارد تا حمله‌ای همه جانبه را ترتیب دهد. بدین منظور وی می‌خواهد تا همه نیروهایش را در شبکه منتقل کند. در طرف مقابل ممانعت‌کننده تلاش می‌کند تا از انتقال نیروهای دشمن با استفاده از منابع قابل دسترس تا حد ممکن ممانعت کند. این منابع می‌توانند شامل تسلیحات جنگی مانند موشک‌های کروز، بمباران هوایی و ... باشند. در کاربردی دیگر، این مسأله برای ممانعت از قاچاق مواد مخدر در آمریکا توسط استینروف[1] در سال ۱۹۹۱ مورد استفاده قرار گرفت و او با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی این مسأله را حل کرد. همچنین این مسأله بعد از حملات تروریستی ۱۱ سپتامبر نیز مورد توجه و استفاده قرار گرفته است [۳].

در گونه‌ای دیگر از مسائل شبکه هدف حفظ کارایی شبکه تحت عملیات تخریبی می‌باشد، به عنوان مثال نیرویی قصد تخریب شبکه را دارد و ممانعت کننده قصد دفاع از شبکه و ارسال بیشترین جریان یا حرکت بر روی کوتاهترین مسیر ممکن را دارد. در این مقاله به بررسی مسأله حفاظت خطوط ارتباطی تحت حملات دشمن می‌پردازیم به‌گونه‌ای که می‌خواهیم با امکانات و توانایی نظامی که در دست داریم تا حد ممکن مسیرهای ارتباطی بین دو نقطه مشخص در منطقه را حفظ کنیم. این کار را می‌توانیم با قرار دادن تجهیزات پدافندی دفاعی یا افزایش استحکامات مسیرها انجام دهیم. این مسأله را وابسته به زمان در نظر می‌گیریم. به این صورت که تخریب یا بمباران یک خط ارتباطی توسط دشمن زمان‌بر خواهد بود و ما می‌توانیم با مشاهده حرکات دشمن در تخریب خطوط شبکه تصمیم بگیریم که امنیت یا ظرفیت کدام خط را افزایش دهیم تا بتوانیم ارتباط خود را بین آن دو نقطه در بیشترین سطح ممکن حفظ کنیم.

در ادامه مقاله به بیان مبانی نظری و پیشینه پژوهش می‌پردازیم. سپس مسأله را در قالب یک مسأله دوسطحی فرمول‌بندی کرده و به کمک تجزیه بندرز آن را حل می‌کنیم. در نهایت کارایی مسأله را با ارائه یک مثال واقعی ارزیابی می‌کنیم.

---
[1] Steinrauf

۲- مبانی نظری

یک شبکه $G = (V, A)$ ساختاری متشکل از دو مجموعه $V \neq \emptyset$ و A است. به‌عناصر مجموعه V رئوس شبکه می‌گوییم. مجموعه A شامل برخی زوج مرتب‌های $(i, j) \in V \times V$ بوده که آن‌ها را کمان‌های شبکه می‌نامیم. از نظر ساختاری، کمان‌ها تداعی کننده خطوط ارتباطی یک طرفه بین رئوس شبکه هستند. در این مقاله خود را محدود به شبکه‌های جهت‌دار می‌کنیم. این فرض از کلیت مسأله کم نمی‌کند زیرا در صورتی که شبکه دارای یال باشد، می‌توان آن را با دو کمان با نقاط ابتدا و انتهایی یکسان و در خلاف جهت یکدیگر جایگزین کرد [۴]. پارامترهایی از قبیل عرضه، تقاضا، ظرفیت، طول و هزینه برای رئوس و کمان‌های شبکه قابل تعریف هستند. مفهوم شبکه در بسیاری از مسائل زندگی روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، شبکه‌های حمل و نقل، مخابراتی، برق‌رسانی و آب‌رسانی نمونه‌هایی از شبکه‌های پیرامون ما هستند.

یک مسیرجهت‌دار از رأس v_i به رأس v_j دنباله‌ای از رأس‌های متمایز شبکه به صورت $v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_j$ است، به طوری که بین هر دو رأس متوالی v_k و v_{k+1} در این دنباله کمانی از رأس v_k به رأس v_{k+1} در این شبکه وجود داشته باشد. شبکه ها بر اساس نوع داده‌ها به دو دسته ایستا و پویا تقسیم می‌شوند که تعریف بیان شده، مربوط به شبکه ایستا است. در شبکه‌های پویا داده‌های شبکه (مانند ظرفیت کمان، هزینه جریان و . . .) نسبت به زمان تغییر می‌کنند. علاوه بر این پارامتری جدید روی کمان‌ها یا رئوس(بسته به کاربرد) به عنوان زمان پیمایش یا توقف تعریف می‌شود. در شبکه دو رأس مشخص s و s' که راس s مبدا و راس s' مقصد است را درنظر می‌گیریم. علاوه بر این فرض می‌کنیم شبکه حداقل شامل یک مسیر جهت دار از s به s' باشد. هدف ما این است که ارتباط بین این دو راس را در شبکه حفظ کنیم.

یک برش C افرازی از مجموعه رئوس V به دو زیر مجموعه V_s و $V_{s'}$ است به طوری که $s \in V_s$ و $s' \in V_{s'}$. این برش را با نماد $[V_s, V_{s'}]$ نیز نمایش می‌دهیم. یک $s - s'$ برش مجموعه‌ای از کمان‌ها را تعریف می‌کند که یک سر آن‌ها در V_s و سر دیگرشان در $V_{s'}$ است. کمان (i, j) یک کمان پیشرو از این برش نامیده می‌شود هرگاه $i \in V_s$ و $j \in V_{s'}$ و کمان پسرو نامیده می‌شود هرگاه $j \in V_s$ و $i \in V_{s'}$. $(V_s, V_{s'})$ و $(V_{s'}, V_s)$ را به‌ترتیب مجموعه کمان‌های پیشرو و پسرو برش $C = [V_s, V_{s'}]$ می‌نامیم. توجه کنید که حذف کمان‌های پیشرو $(V_s, V_{s'})$ از گراف G باعث قطع همه خطوط ارتباطی از s به s' می‌شوند. پس راهبرد دشمن برای قطع خطوط ارتباطی این است که یکی از این گونه برش‌ها را انتخاب و خطوط ارتباطی پیشروی آن را تخریب کند. برای هر برش می‌توان یک هزینه تخریب تعریف کرد. هزینه تخریب برش $[V_s, V_{s'}]$ را با $c[V_s, V_{s'}]$ نشان می‌دهیم که برابر با مجموع هزینه حذف کمان‌های پیشرو آن است. به عبارت دیگر

$$c[V_s, V_{s'}] = \sum_{(i,j)\in(V_s, V_{s'})} c_{ij}. \qquad (۱)$$

پس چنانچه دشمن قصد تخریب خطوط ارتباطی برش $[V_s, V_{s'}]$ را داشته باشد، ناگزیر به پرداخت هزینه‌ای برابر $c[V_s, V_{s'}]$ است. اگر $c[V_s, V_{s'}]$ کمترین هزینه را بین تمام برش‌ها داشته باشد در این صورت $[V_s, V_{s'}]$ یک برش کمینه نامیده می‌شود.

می‌توان روابط زیر را برای به‌دست آوردن $s - s'$ برش کمینه ارائه داد.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\,\theta_{ij} \\ s.t.\ \ & \pi_i - \pi_j + \theta_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A, \\ & \pi_{s'} - \pi_s \geq 1, \\ & \theta_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A. \end{aligned} \qquad (۲)$$

می‌توان ثابت کرد که در جواب بهینه همه متغیرها مقادیر صفر و یک اختیار می‌کنند. اگر مقدار $\theta_{ij} = ۱$ به معنای حضور آن کمان در کمان‌های پیشروی برش بهینه بوده و مقدار صفر به معنای عدم حضور آن کمان بر کمان‌های پیشروی آن برش است. همچنین $\pi_i = ۱$ اگر $i \in V_{s'}$ و در غیر این‌صورت برابر صفر است.

برای یافتن برش کمینه در یک شبکه روش‌های گوناگونی وجود دارد. مشهورترین این روش‌ها بر پایه ارتباط بین این مسأله و یک مسأله بهینه سازی شبکه به نام مسأله بیشترین جریان استوار است. ثابت می‌شود که این دو مسأله دوگان یکدیگرند. پس می‌توان با حل هر یک از آنها جواب بهینه دیگری را یافت [۵].

۳- مسائل ممانعت شبکه

در مسائل بهینه‌سازی شبکه، کاربر به دنبال بهترین استفاده از شبکه است. اکنون فرض کنید یک تصمیم‌گیرنده دیگر می‌خواهد مانع از رسیدن کاربر به هدفش شود. او می‌تواند این کار را با تغییر ساختار شبکه و یا داده‌های آن انجام دهد. مسائلی از این نوع، مسائل ممانعت از بهینه‌سازی شبکه (یا به طور خلاصه ممانعت شبکه) نامیده می‌شوند و برای اغلب مسائل بهینه‌سازی شبکه نیز قابل تعریف‌اند. علی رغم این که مسائل بهینه‌سازی شبکه دارای

یک تصمیم‌گیرنده واحد می‌باشند، مسائل ممانعت شامل دو تصمیم گیرنده هستند، یک ممانعت‌کننده و یک کاربر. این دو تصمیم‌گیرنده در حال رقابت با یکدیگرند. هدف کاربر این است که از شبکه به طور بهینه استفاده کند. در حالی که ممانعت‌کننده قصد دارد با صرف منابعی محدود کارایی کاربر را در شبکه کاهش دهد و بیشترین خسارت را به عملکرد وی وارد نماید. در مسائل ممانعت با شبکه‌ای سر و کار داریم که در آن به کمان‌ها، علاوه بر پارامترهای معمول مسأله اصلی، پارامترهای دیگری مانند هزینه ممانعت (یا همان هزینه تخریب) تخصیص داده می‌شود که هزینه لازم برای حذف یا تغییر در پارامترهای آن کمان است.

مسائل ممانعت شبکه در قالب یک مسأله دو سطحی فرمول‌بندی می‌شوند. مسائل دو سطحی به دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی گفته می‌شوند که در لابه‌لای محدودیت‌های مسأله یک مسأله بهینه‌سازی دیگر گنجانده شده است. در واقع بهینه‌سازی تابع هدف تحت تأثیر محدودیت‌های ساختاری و همچنین یک مسأله بهینه‌سازی دیگر است. در این مسائل به تصمیم‌گیرنده سطح اول و دوم به ترتیب پیشرو و پیرو گفته می‌شود. ابتدا پیشرو راهبرد بهینه خود را اختیار کرده و سپس پیرو با مشاهده عملکرد رهبر تصمیم‌گیری می‌نماید و هر کدام تنها تعدادی از متغیرها را مشخص می‌کنند. برنامه‌ریزی دو سطحی ابتدا توسط برکن و مکجیل[1]در سال ۱۹۷۳ در یک مقاله که کاربردهایی در زمینه نظامی و همچنین تولید و بازاریابی داشت، مطرح شد [۶]. در آن زمان این مسائل را "برنامه‌های ریاضی با مسائل بهینه‌سازی در محدودیت‌ها" نامیدند. اصطلاح برنامه‌ریزی دوسطحی و چند سطحی توسط کندلر و نورتون[2]در سال ۱۹۷۷ معرفی شد [۷]. توانایی برنامه‌ریزی دو سطحی در نحوه تصمیم‌گیری سلسله مراتبی آن است. بدین معنا که این رویکرد برای مسائلی اختیار می‌شود که در آن تصمیم‌گیرندگان به دو سطح مختلف تقسیم شوند. تا زمانی که تصمیم‌گیرندگان سطح اول (که آن‌ها را پیشرو می‌نامیم) تصمیم‌گیری نکنند، تصمیم‌گیرندگان سطح دوم (که آن‌ها را پیرو می‌نامیم)، قادر به تصمیم‌گیری نخواهند بود. در حالت کلی برای بردارهای تصمیم، $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$، $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$ و توابع هدف $F: X \times Y \to \mathbb{R}$ و $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ می‌باشد.

مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی خطی به‌صورت زیر فرمول بندی می‌شود [۸] (معادله ۳)

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} F(x,y) = c_1 x + d_1 y \\ &A_1 x + B_1 y \le b_1 \\ &\min_{y \in Y} f(x,y) = c_2 x + d_2 y \\ &A_2 x + B_2 y \le b_2 \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}^n$، $d_1,\ d_2 \in \mathbb{R}^m$، $b_1 \in \mathbb{R}^p$، $b_2 \in \mathbb{R}^q$، $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ و $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{q\times m}$ است.

در این مسأله سطح اول بر سطح دوم تسلط دارد و انتخاب پیشرو تأثیر بسزایی در انتخاب راهبرد پیرو دارد. با انتخاب x توسط پیشرو، پیرو یک مسأله پارامتری معمولی را حل می‌کند. در حقیقت در این نوع از مسائل، تصمیم‌گیرنده سطح اول تصمیم خود را بر سطح دوم اعمال می‌کند و واکنش سطح دوم را مشاهده کرده و به دنبال بهینه‌کردن تابع هدف خود است. تصمیم‌گیرنده سطح دوم نیز، تصمیمات سطح بالا را مشاهده کرده و یک تصمیم منطقی برای بهینه‌کردن تابع هدف خویش می‌گیرد.

۴- پیشینه پژوهش

بررسی بر روی نمونه‌های ممانعت شبکه در حوزه تحقیق در عملیات برای اولین بار توسط ولمر[3] در سال ۱۹۶۴ با موضوع "حذف کمان‌ها از یک شبکه"شروع شد [۹]. او این مسأله را بر روی یک گراف مسطح بدون جهت بافرض نبود هزینه‌های ممانعت بررسی کرد. مک مسترز و ماستین[4] با اضافه کردن قید محدودیت بودجه به مسأله، برای نخستین بار از یک الگوی ریاضی برای مسأله ممانعت جریان در شبکه به منظور جلوگیری از انتقال مهمات توسط دشمن استفاده کردند [۱۰].

در سال ۱۹۹۳، وود[5] نشان داد که مسأله ممانعت بیشینه جریان NP- کامل است [۱۱]. هم چنین یک مسأله برنامه‌ریزی خطی صفر و یک برای حل این مسأله ارائه کرد. در طی سال‌های اخیر، محققان زیادی مسأله ممانعت بیشترین جریان را تجزیه و تحلیل کرده‌اند. اما در بیشتر کارهای تحقیقاتی، از مسأله ارائه شده توسط وود برای بررسی این مسأله استفاده شده است. در سال ۲۰۱۱، مسأله ممانعت ماکزیمم جریان شبکه توسط کندی[6] و همکارانش به نحو دیگری بیان شد که در آن هدف حذف زیر مجموعه‌ای از رئوس شبکه (به‌جای کمان‌ها) بود [۱۲].

لاندلی و شرلی[7] مسأله ممانعت پویا را به‌صورت یک بازی دونفره دو مرحله‌ای فرمول‌بندی کردند که راهبردهای ممانعت به

---

[1] Bracken and Mcgill
[2] Candler and Norton
[3] Wollmer
[4] McMastres and Mustin
[5] Wood
[6] Kennedy
[7] Lunday and Sherali

صورت پویا در هر بازه زمانی گسسته بر اساس حرکت مهاجم تغییر می‌کند [۱۳]. افشاری‌راد و تقی‌زاده نیز مسأله ممانعت پویا بیشترین جریان رابررسی کردند [۱۴]. آن‌ها یک مسأله برنامه‌ریزی صحیح آمیخته ارائه نمودند. سپس برای حل مسأله از دو روش استفاده کردند که اولی بر مبنای تجزیه بندرز و روش دوم بر پایه الگوریتم‌های ارائه شده توسط راتلیف[1] و همکارانش برای یافتن حیاتی‌ترین کمان‌ها بود [۱۵]. علاوه بر این مسأله ممانعت شبکه پویای چند کالایی در حالت چند مبدأ و چند مقصد برای زنجیره تأمین فرمول‌بندی شده است [۱۶]. لیم و اسمیت[2] مسأله ممانعت شبکه را در دو حالت، حذف کامل کمان یا کاهش قسمتی از ظرفیت آن بررسی کردند [۱۷]. اخیرا ابومسلم محمدی و جواد طیبی مسأله ممانعت از مسیری با بیشترین ظرفیت را فرمول‌بندی و حل کردند [۱۸]. علاوه بر این ممانعت شبکه در حالت‌های دو هدفه و سه هدفه [۱۹ و ۲۰] و چندکالایی نیز بررسی شده است [۲۱]. اسمیت و سونگ خلاصه جامعی از مسائل ممانعت شبکه و الگوریتم‌های آن را جمع‌آوری کرده‌اند [۲۲]. در سایر رویکردهای مطرح شده نظریه بازی می‌توان به مقالات [۲۳ و ۲۴] اشاره کرد.

۵- بیان مسأله

فرض کنید دشمن می‌خواهد در یک شبکه همه مسیرها بین دو رأس مشخص s و s' را قطع کند و نیروهای خودی با بودجه محدودی که در اختیار دارند تا حد ممکن می‌خواهند جلوی رسیدن دشمن به هدفش را بگیرند. توانایی دشمن می‌تواند مواردی مانند، استفاده از توپخانه‌ها، سیستم‌های موشکی و بمباران هوایی و ... می‌باشد در حالی که توانایی نیروهای خودی می‌تواند شامل ایجاد سیستم پدافندی و مستقر کردن نیرو جهت بالا بردن امنیت خطوط ارتباطی و .... باشد.

در حقیقت دشمن می‌خواهد همه مسیرها از مبدأ به مقصد را قطع کند. فرض کنید هرکمان (i,j) هزینه تخریب c_{ij} را دارد که دشمن از آن مطلع است. کسب این اطلاعات با توجه به اطلاعات ماهواره‌ای تا حدودی میسر است. در این صورت دشمن به دنبال کم هزینه‌ترین روش برای قطع کردن مسیرهای (خطوط ارتباطی) بین مبدأ و مقصد است. بنابراین به‌منظور صرفه جویی در هزینه، اقدام به تخریب برشی با کمترین هزینه می‌کند. در اینجا هزینه تخریب کمان بستگی به امنیت کمان، سازوکار تخریب و پارامترهای دیگر دارد. می‌توان این طور بیان کرد که دشمن با حملات خود هزینه تخریب یک کمان را کاهش می‌دهد به صفر رسیدن هزینه تخریب به معنی حذف کامل کمان است. به بیان دیگر با صرف مقداری هزینه بر یک کمان و تخریب قسمتی از آن، مقدار هزینه اولیه تخریب را کم می‌کند. از طرفی نیروهای خودی با ترمیم استحکامات و پوشش پدافندی هزینه تخریب کمان را برای دشمن افزایش می‌دهند.

در مسائل کاربردی، متغیر زمان جزء جدایی ناپذیر از فرمول‌بندی مسأله است. لذا برای نزدیک شدن به واقعیت، این مطلب را در نظر می‌گیریم که تخریب کمان زمان‌بر است و ممکن است مدتی طول بکشد تا دشمن بتواند همه مسیرها از مبدأ به مقصد را قطع کند. نیروهای خودی اقدام به افزایش امنیت و ترمیم استحکامات کمان‌های واقع بر برش کمینه در جهت افزایش هزینه دشمن برای تخریب کمان‌های واقع بر برش کمینه می‌کنند تا به این روش از رسیدن دشمن به هدفش جلوگیری کنند. در حین این عملیات ممکن است با توجه به تصمیمات نیروهای خودی و دشمن کمان‌های واقع بر برش کمینه تغییر کنند. این کار از طریق عملیات دشمن که سبب کاهش هزینه تخریب کمان‌ها می‌شود و عملیات نیروهای خودی که بالا بردن هزینه تخریب کمان‌هارا سبب می‌شوند، رخ خواهد داد.

در شرایط جنگی ممکن است با گذر زمان راهبردهای مهاجم و نیروهای خودی تغییر کنند. به عنوان مثال، دشمن با اطلاع از راهبرد اخذ شده توسط نیروهای خودی می‌تواند کمانی که در حال تخریب آن است را تغییر دهد. به همین شکل نیروهای خودی با مشاهده عملکرد دشمن، ممکن است کمانی که در حال افزایش هزینه تخریب آن هستند را عوض کرده و به سراغ کمان دیگری بروند. لذا مسأله ما تبدیل به مسأله ممانعت از برش کمینه پویا (وابسته به زمان) می‌شود.

همه این مراحل در یک افق زمانی رخ می‌دهند. در عین حال ممکن است نیروهای خودی یا دشمن پس از مدتی با توجه به عملیات طرف مقابل از رسیدن به هدف خویش ناامید شده و تقاضای نیرو و تجهیزات بیشتر کنند و سپس به ادامه عملیات بپردازند. در این صورت می‌توان افق زمانی مورد نظر را به چند بازه زمانی کوچک‌ترتقسیم‌بندی کرد و با وارد کردن تغییرات جدید، مسأله را در یک بازه زمانی دیگر حل نمود. برای نیروهای خودی می‌توان از این شرط استفاده کرد که اگر هزینه برش کمینه از مقدار مشخصی کمتر شود این بازه زمانی به پایان رسیده است و بایستی با برآورد مجدد رفتار و امکانات دشمن و اضافه کردن تجهیزات و نیروهای جدید مسأله را دریک بازه زمانی دیگر حل نمود.

[1] Ratliff
[2] Lim and Smith

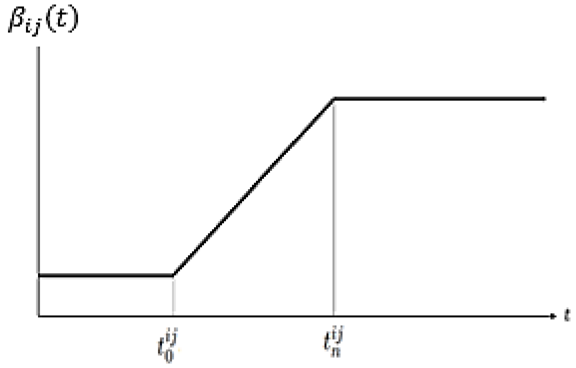
۶- فرمول‌بندی مسأله

مشابه با بخش ۴، فرض کنید $G=(V,A)$ یک شبکه جهت‌دار با مجموعه رئوس V و مجموعه کمان‌های A باشد. همانطور که گفتیم هر کمان با توجه به میزان امنیت، هزینه اولیه‌ای برای تخریب دارد که آن را برای هر کمان (i,j) با c_{ij} نشان می‌دهیم. نیروهای خودی و دشمن به ترتیب تلاش می‌کنند این هزینه را افزایش یا کاهش دهند. با توجه به توانایی نیروهای خودی و دشمن و نوع کمان، هزینه افزایش امنیت کمان و تخریب آن می‌تواند متفاوت باشد. بنابراین m_{ij} را به عنوان توانایی نیروهای خودی برای افزایش c_{ij} در واحد زمان در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر نیروهای خودی بخواهند هزینه کمان (i,j) را افزایش دهند پس از گذشت هر واحد زمان مقدار m_{ij} واحد به c_{ij} اضافه می‌کنند. به طور مشابه، m'_{ij} را به عنوان توانایی دشمن برای کاهش c_{ij} در یک واحد زمانی تعریف می‌کنیم. c_{ij} می‌تواند از صفر (کران پایین) تا c_{ij}^{u} (کران بالا) تغییر کند. مقدار c_{ij}^{u} بستگی به نظر فرماندهان و کارشناسان نظامی دارد و به صفر رسیدن هزینه تخریب توسط دشمن به معنای نابودی کامل آن کمان است. فرض می‌کنیم افزایش m_{ij} واحد به c_{ij} در واحد زمان، هزینه r_{ij} برای نیروهای خودی در بر خواهد داشت. همچنین فرض می‌کنیم مقدار بودجه کل نیروهای خودی برای ممانعت از تخریب شبکه برابر R است. به طور مشابه، فرض می‌کنیم کاهش m'_{ij} واحد از c_{ij} در واحد زمان، هزینه r'_{ij} را برای نیروهای دشمن در بر خواهد داشت. مقدار بودجه کل نیروهای دشمن برای تخریب کمان‌های شبکه برابر R' فرض می‌شود.

فرض کنید T افق زمانی باشدکه تصمیمات اخذ شده توسط نیروهای خودی تا آن زمان معتبر است. با نگاهی بدبینانه فرض می‌کنیم که دشمن قصد دارد همه مسیرها از S به S' را در افق زمانی T تخریب کند. نیروهای خودی از توانمندی و بودجه دشمن برای تخریب شبکه اطلاع داشته و قصد دارند با تحلیل حملات و رفتار دشمن و استفاده از توانایی‌های محدود خود به بهترین وجه و تا حد ممکن از رسیدن دشمن به هدفش جلوگیری کنند.

در تعریف مسأله برای هر کمان هزینه تخریب ثابتی در نظر گرفتیم که بستگی به شرایط آن کمان و مکانیزم لازم برای تخریب آن دارد. اکنون فرض کنید نیروهای خودی تصمیم به افزایش هزینه تخریب کمان (i,j) گرفته‌اند. این افزایش با توجه به تعریف مسأله، یک تابع خطی و با شیب m_{ij} است و پس از پایان کار بر روی کمان (i,j) مقدار هزینه بر روی این کمان، ثابت خواهد ماند (شکل ۱). لذا تابع تغییر هزینه یک تابع قطعه قطعه خطی است که با تعریف دو متغیر صفر و یک $x'_{ij}(t)$ و $x''_{ij}(t)$ می‌توان آن را نوشت. با فرض اینکه t_0^{ij} لحظه شروع استحکام‌سازی توسط نیروهای خودی و t_n^{ij} لحظه پایان استحکام‌سازی بر کمان (i,j) باشد، این تابع را برای این کمان می‌توان به شکل زیر فرمول‌بندی کرد.

$$\beta_{ij}(t)=m_{ij}\left(\sum_{t'=0}^{t}x'_{ij}(t')-\sum_{t'=0}^{t}x''_{ij}(t')\right) \qquad (۴)$$



شکل ۱. تابع افزایش هزینه تخریب.

$x'_{ij}(t)$ یک تابع پله‌ای است که برای مقادیر $(-\infty,t_0^{ij})$ صفر و برای $[t_0^{ij},+\infty)$ یک خواهد بود. به طور مشابه $x''_{ij}(t)$ نیز یک تابع پله‌ای است که برای مقادیر $(-\infty,t_n^{ij})$ صفر و برای $[t_n^{ij},+\infty)$ یک خواهد بود. در لحظه‌ای که نیروهای خودی تصمیم می‌گیرند c_{ij} را افزایش دهند $x'_{ij}(t)$ برابر یک می‌شود و هنگام پایان کار $x''_{ij}(t)=۱$ خواهد شد. تا زمانی که $x'_{ij}(t)$ برابر صفر است، $x''_{ij}(t)$ برابر صفر بوده و در نتیجه $\beta_{ij}(t)$ نیز صفر خواهد ماند. هنگامی که $x'_{ij}(t)$ برابر یک شود و $x''_{ij}(t)=0$، $\beta_{ij}(t)$ به صورت خطی با شیب m_{ij} افزایش می‌یابد و هنگامی که $x'_{ij}(t)=x''_{ij}(t)=۱$، $\beta_{ij}(t)$ ثابت باقی می‌ماند.

اکنون فرض کنید نیروهای دشمن تصمیم به کاهش هزینه تخریب کمان (i,j) بگیرند. این کاهش با توجه به تعریف مسأله، یک تابع خطی و با شیب m'_{ij} است. پس مشابه حالت قبل، با معرفی دو متغیر صفر و یک $y'_{ij}(t)$ و $y''_{ij}(t)$ که زمان آغاز و پایان تخریب بر کمان (i,j) را نشان می‌دهند، می‌توان تابع میزان تخریب قطعه قطعه خطی $\alpha_{ij}(t)$ را مشابه با $\beta_{ij}(t)$ به‌صورت زیر ساخت.

$$\alpha_{ij}(t)=m'_{ij}\left(\sum_{t'=0}^{t}y'_{ij}(t')-\sum_{t'=0}^{t}y''_{ij}(t')\right) \qquad (۵)$$

علاوه بر متغیرهای فوق، برای دشمن متغیرهای صفر و یک $\theta_{ij}(t)$، $\pi_i(t)$ نیز وجود دارند. این متغیرها مشخص کننده برشی هستند که دشمن در هر لحظه اقدام به تخریب کمان‌های آن می‌کند و در مسأله پیدا کردن برش کمینه ظاهر می‌شوند. اگر مقدار $\theta_{ij}(t)$ برابر یک شود به معنای حضور (i,j) به عنوان کمان

پیشروی برش در لحظه t بوده و مقدار صفر به معنای عدم حضور آن کمان بر این برش است. همچنین $\pi_i(t)=1$ است هرگاه $i\in V_{s'}$ در لحظه t باشد و در غیر این صورت برابر صفر است. پس به ازای هر راس i که متعلق به مولفه‌ای از برش باشد که راس مقصد در آن قرار دارد، $\pi_i(t)$ برابر یک و به ازای رئوسی که متعلق به مولفه دیگر حاصل از برش هستند، $\pi_i(t)$ برابر صفر است.

با این توضیحات، این مسأله به شکل زیر فرمول‌بندی می‌شود. برای سادگی ، در فرمول‌بندی مجموعه $\{1,\dots,T\}$ را با نماد Ψ نمایش می‌دهیم.

$$\begin{aligned}&\max z\\ &s.t.\\ &x'_{ij}(t-1)\le x'_{ij}(t)\ \forall(i,j)\in A,\quad \forall t\in\Psi\end{aligned}\tag{۶}$$

$$x''_{ij}(t-1)\le x''_{ij}(t)\ \ \forall(i,j)\in A,\quad \forall t\in\Psi\tag{۷}$$

$$x''_{ij}(t)\le x'_{ij}(t)\qquad \forall(i,j)\in A,\quad \forall t\in\Psi\tag{۸}$$

$$\beta_{ij}(t)=m_{ij}\left(\sum_{t'=0}^{t}x'_{ij}(t')-\sum_{t'=0}^{t}x''_{ij}(t')\right)\tag{۹}$$

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{(i,j)\in A}r_{ij}\beta_{ij}(t)\le R\tag{۱۰}$$

$$z=\min\sum_{t=0}^{T}\sum_{(i,j)\in A}\theta_{ij}(t)\left(c_{ij}-\alpha_{ij}(t)+\beta_{ij}(t)\right)\tag{۱۱}$$

$$\pi_i(t)-\pi_j(t)+\theta_{ij}(t)\ge 0\,\forall t\in T,\forall(i,j)\in A\tag{۱۲}$$

$$\pi_{s'}(t)-\pi_s(t)\ge 1\qquad\qquad \forall t\in\Psi\tag{۱۳}$$

$$y'_{ij}(t-1)\le y'_{ij}(t)\ \ \forall(i,j)\in A,\quad \forall t\in\Psi\tag{۱۴}$$

$$y''_{ij}(t-1)\le y''_{ij}(t)\qquad \forall(i,j)\in A,\forall t\in\Psi\tag{۱۵}$$

$$y''_{ij}(t)\le y'_{ij}(t)\qquad \forall(i,j)\in A,\quad \forall t\in\Psi\tag{۱۶}$$

$$\alpha_{ij}(t)=m'_{ij}\left(\sum_{t'=0}^{t}y'_{ij}(t')-\sum_{t'=0}^{t}y''_{ij}(t')\right)\tag{۱۷}$$

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{(i,j)\in A}r'_{ij}\alpha_{ij}\le R'\tag{۱۸}$$

$$0\le c_{ij}-\alpha_{ij}(t)+\beta_{ij}(t)\le c^{u}_{ij}\ \forall(i,j)\in A\ \forall t\in\Psi\tag{۱۹}$$

$$\theta_{ij}(t),y'_{ij}(t),x'_{ij}(t)\in\{0,1\}\ \forall(i,j)\in A,\forall t\in\Psi\tag{۲۰}$$

$$y''_{ij}(t),x''_{ij}(t)\in\{0,1\}\qquad \forall(i,j)\in A,\forall t\in\Psi\tag{۲۱}$$

در این مسأله محدودیت‌های (۶) و (۷) تضمین می‌کنند که توابع $x'_{ij}(t), x''_{ij}(t)$ پله‌ای هستند یعنی تا یک لحظه t مقدار ثابت صفر داشته و از آنجا به بعد مقدار ثابت یک دارند. به‌طور مشابه محدودیت‌های (۱۴) و (۱۵) پله‌ای بودن توابع $y'_{ij}(t), y''_{ij}(t)$ را تضمین می‌کنند. محدودیت (۸) باعث می‌شود که زمان پایان استحکام‌سازی بر یک کمان قبل از زمان آغاز آن نباشد. به بیان دقیق‌تر تا زمانی که $x'_{ij}(t)$ برابر یک نشده است، $x''_{ij}(t)$ صفر می‌ماند. فاصله زمانی که $x'_{ij}(t)$ برابر یک و $x''_{ij}(t)$ برابر صفر است، همان زمانی است که نیروهای خودی استحکام‌سازی خود را بر کمان (i,j) انجام می‌دهند. محدودیت (۱۶) عملکرد مشابهی برای زمان تخریب دشمن را نشان می‌دهد. محدودیت‌های (۹) و (۱۷) به‌ترتیب تعریف توابع ممانعت و تخریب کمان (i,j) را در لحظه t نشان می‌دهند. محدودیت‌های (۱۰) و (۱۸) به‌ترتیب قید بودجه نیروهای خودی و دشمن هستند. رابطه (۱۱) تابع هدف سطح دوم مسأله است که مجموع ظرفیت برش‌های کمینه پویا بر حسب هزینه تخریب لحظه‌ای است. محدودیت‌های (۱۲) و (۱۳) تضمین می‌کنند که کمان‌های در حال تخریب در هر لحظه توسط دشمن تشکیل یک برش از شبکه را دهند.

مسأله ارائه شده به خاطر تابع هدف سطح دوم یک مسأله غیر خطی است زیرا متغیر صفر و یک $\theta_{ij}(t)$ در متغیرهای $\alpha_{ij}(t)$ و $\beta_{ij}(t)$ ضرب شده است. با توجه به دشواری‌های حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی، با کمک یک تغییر متغیر مسأله را به یک مسأله خطی تبدیل می‌کنیم. فرض کنید $c_{ij}(t)=c_{ij}-\alpha_{ij}(t)+\beta_{ij}(t)$ و $z_{ij}(t)=\theta_{ij}(t)c_{ij}(t)$. با این تعاریف می‌توان مسأله را به شکل زیر بازنویسی کرد که یک مسأله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی آمیخته است.

$$\begin{aligned}&\max z\\ &s.t.\\ &\sum_{t=0}^{T}\sum_{(i,j)\in A}r_{ij}\beta_{ij}\le R\end{aligned}\tag{۲۲}$$

$$x'_{ij}(t-1)\le x'_{ij}(t)\ \ \forall(i,j)\in A,\quad \forall t\in\Psi\tag{۲۳}$$

$$x''_{ij}(t-1)\le x''_{ij}(t)\ \ \forall(i,j)\in A,\quad \forall t\in\Psi\tag{۲۴}$$

$$x''_{ij}(t)\le x'_{ij}(t)\ \ \forall(i,j)\in A,\qquad \forall t\in\Psi\tag{۲۵}$$

$$\beta_{ij}(t)=m_{ij}\left(\sum_{t'=0}^{t}x'_{ij}(t')-\sum_{t'=0}^{t}x''_{ij}(t')\right)\tag{۲۶}$$

$$z=\min\sum_{t=0}^{T}\sum_{(i,j)\in A}z_{ij}(t)\tag{۲۷}$$

$$\pi_i(t)-\pi_j(t)+\theta_{ij}(t)\ge 0\ \forall t\in\Psi,\forall(i,j)\in A\tag{۲۸}$$

$$\pi_{s'}(t)-\pi_s(t)\ge 1\qquad\quad \forall t\in\Psi\tag{۲۹}$$

$$c_{ij}(t)=c_{ij}-\alpha_{ij}(t)+\beta_{ij}(t)\ \forall t\in\Psi,\forall(i,j)\in A\tag{۳۰}$$

$$y'_{ij}(t-1)\le y'_{ij}(t)\ \forall(i,j)\in A,\qquad \forall t\in\Psi\tag{۳۱}$$

$$y''_{ij}(t-1)\le y''_{ij}(t)\ \forall(i,j)\in A,\qquad \forall t\in\Psi\tag{۳۲}$$

$$y''_{ij}(t)\le y'_{ij}(t)\ \forall(i,j)\in A,\qquad \forall t\in\Psi\tag{۳۳}$$

$$\alpha_{ij}(t)=m'_{ij}\left(\sum_{t'=0}^{t}y'_{ij}(t')-\sum_{t'=0}^{t}y''_{ij}(t')\right)\tag{۳۴}$$

$$c_{ij}(t)-\left(1-\theta_{ij}(t)\right)M(t)\le z_{ij}(t)\le c_{ij}(t)+\left(1-\theta_{ij}(t)\right)M,\ \ \forall(i,j)\in A,\forall t\in\Psi\tag{۳۵}$$

$$z_{ij}(t)\le M\theta_{ij}(t)\qquad \forall(i,j)\in A,\qquad \forall t\in\Psi\tag{۳۶}$$

$$0\le c_{ij}(t)\le c^{u}_{ij}\qquad \forall(i,j)\in A,\qquad \forall t\in\Psi\tag{۳۷}$$

$$\theta_{ij}(t),y'_{ij}(t),x'_{ij}(t)\in\{0,1\}\ \ \forall(i,j)\in A,\qquad \forall t\in\Psi\tag{۳۸}$$

$$y''_{ij}(t),x''_{ij}(t)\in\{0,1\}\qquad \forall(i,j)\in A,\quad \forall t\in\Psi\tag{۳۹}$$

با توجه به تعریف، می‌دانیم $z_{ij}(t)$ برابر $c_{ij}(t)$ است اگر $\theta_{ij}(t)$ برابر یک باشد و در غیر این صورت صفر خواهد بود. محدودیت (۳۵) و (۳۶) این شرایط را فراهم می‌کنند. M ظاهر شده در این محدودیت‌ها یک عدد ثابت بسیار بزرگ است.

۷- الگوریتم حل

مسأله ارایه شده در بخش قبل دارای دو ویژگی است که حل آن را سخت می‌کند. اول این که با یک مسأله بهینه‌سازی دو سطحی روبه رو هستیم و دوم این که در این مسأله به جز متغیرهای پیوسته، متغیرهای صفر و یک نیز حضور دارند. ثابت شده است که مسائل بهینه‌سازی دوسطحی در حالت خطی و حتی با متغیرهای پیوسته NP- سخت هستند [۲۵]. از طرفی بر اساس ویژگی دوم نمی‌توان از رویکردهایی مانند شرایط بهینگی کاروش- کان- تاکر استفاده کرده و مسأله را تبدیل به یک مسأله تک سطحی کرد. پس ناگزیر به حفظ دو سطحی بودن مسأله و رویکردی مبتنی بر آن هستیم. از این رو از روش تجزیه بندرز برای حل این مسأله استفاده می‌کنیم.

در این روش مسأله سطح اول را به عنوان مسأله اصلی و مسأله سطح دوم را به عنوان زیر مسأله در نظر می‌گیریم. ابتدا برای مسأله سطح اول یک جواب اولیه را در نظر می‌گیریم. این جواب می‌تواند از خبرگان و فرماندهان جنگی اخذ شود. کیفیت جواب اولیه باعث می‌گردد که روش سریعتر به جواب بهینه همگرا شود. به‌هر حال اگر این گونه جواب در دسترس نبود، می‌توان از هر جواب اولیه (به‌عنوان مثال جواب صفر) استفاده کرد. یعنی فرض می‌کنیم که همه متغیرهای تصمیم سطح اول برابر صفرند. به بیان دیگر هیچ استحکام‌سازی توسط نیروهای خودی انجام نشده است. مقدار تابع هدف سطح اول را برای این جواب $+\infty$ در نظر می‌گیریم زیرا هیچ محدودیتی در مسأله سطح اول وجود ندارد که موجب محدود شدن مقدار تابع هدف گردد. فرض کنید جواب اولیه مسأله اصلی برابر (x'^{*},x''^{*},z^U) باشد. مسأله سطح دوم را بر اساس این جواب تعریف و حل می‌کنیم. یعنی در سطح دوم متغیرهای x' و x'' را با مقادیر مذکور جایگزین می‌کنیم. فرض کنید جواب بهینه حاصل از حل مسأله سطح دوم به‌صورت $(y'^{*},y''^{*},\theta^*,\pi^*,z^L)$ باشد. مقادیر بهینه $\theta^*(t)$ و $\pi^*(t)$ یک برش مانند $C(t)$ را در هر لحظه t نتیجه می‌دهند. بر حسب این برش‌ها، محدودیت برشی را به سطح اول می‌افزاییم.

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(i,j)\in C(t)} c_{ij}+\beta_{ij}(t)-\alpha^*_{ij}(t)\geq z \qquad (۴۰)$$

این محدودیت برشی تضمین می‌کند که علی‌رغم پاسخ بهینه مهاجم، راهبرد نیروهای خودی به گونه‌ای اخذ شود که مقدار بهینه از مجموع ظرفیت این برش‌ها کمتر نگردد. پس از اضافه کردن محدودیت برشی به سطح اول، مسأله سطح اول را مجددا حل کرده و جواب بهینه به سطح دوم ارسال می‌گردد. سپس یک محدودیت برشی جدید به مسأله سطح اول اضافه می‌گردد. قابل ذکر است که با ادامه این فرآیند مقادیر بهینه دو سطح در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$z_1^L\leq\cdots\leq z_k^L\leq z^*\leq z_k^U\leq\cdots\leq z_1^U=+\infty \qquad (۴۱)$$

که منظور از z_i^U و z_i^L به‌ترتیب مقادیر بهینه مسائل سطح اول و دوم در تکرار iام بوده و منظور از z^* مقدار بهینه مسأله است. دلیل برقراری نامساوی $z_i^U\leq z_{i-1}^U$، این است که در هر تکرار یک محدودیت به مسأله سطح اول اضافه شده و در نتیجه مقدار بهینه بدتر می‌گردد. دلیل برقراری نامساوی $z_i^L\geq z_{i-1}^L$ این است که جواب بهینه اخذ شده در هر مرحله از سطح اول به مطلوبیت جواب بهینه قبلی نیست و در نتیجه دشمن عملکرد آزادانه‌تری نسبت به مراحل قبلی دارد. توجه کنید که مقادیر z_i^U و z_i^L به ترتیب کران بالا و پایینی برای تابع هدف مسأله به حساب می‌آیند. پس می‌توان از آن‌ها برای تعیین شرط توقف مسأله استفاده کرد. شرط توقف الگوریتم مورد نظر بدین شرح است که به ازای یک عدد $\epsilon>0$ داده شده مراحل را تا زمانی که نامساوی $z_i^U-z_i^L<\epsilon$ برقرار شود، ادامه می‌دهیم. اکنون اجازه دهید به طور دقیق به شرح گام‌های الگوریتم بپردازیم.

الگوریتم ۱. جهت حل مسأله برش کمینه پویا.

ورودی: یک نمونه از مسأله ممانعت از برش کمینه پویا به همراه عدد کوچک و مثبت ϵ.

خروجی: یک جواب بهینه از مسأله

گام اولیه: یک جواب اولیه (مثلا جواب $(0,0,+\infty)$ = (x'^{*},x''^{*},z^U)) را در نظر بگیرد.

گام تکراری: مراحل ۱ تا ۳ زیر را تا زمانی ادامه دهید که نامساوی $z^U-z^L\leq\epsilon$ برقرار شود.

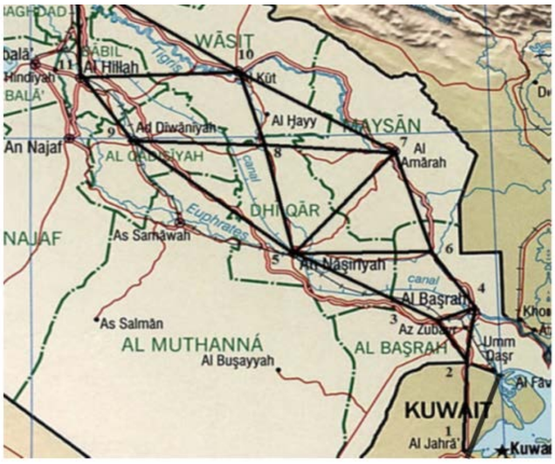
1. با استفاده از یک حل‌کننده، زیر مسأله را به ازای جواب (x'^{*},x''^{*},z^U) حل کنید. فرض کنید جواب بهینه آن $(y'^{*},y''^{*},\theta^*,\pi^*,z^L)$ است.
2. با کمک جواب بهینه زیر مسأله(حاصل از گام قبل)، محدودیت برشی
$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(i,j)\in C(t)} c_{ij}+\beta_{ij}(t)-\alpha^*_{ij}(t)\geq z$
را به مسأله بیافزایید.
3. جواب بهینه (x'^{*},x''^{*},z^U) از مسأله اصلی را به دست آورید.

۸- مثال کاربردی

در سال ۱۹۹۰ عراق به کمک زبده‌ترین نیروهای گارد ریاست جمهوری خود شامل لشکرهای پیاده، مکانیزه و موتوریزه به همراه

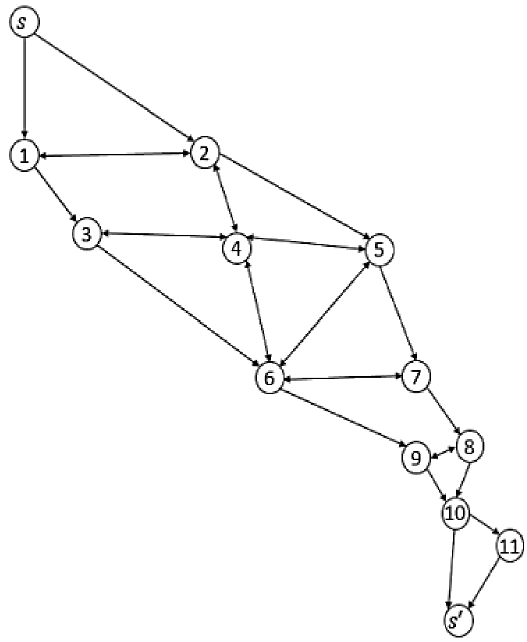
نیروهای ویژه ارتش هجوم به خاک کشور پادشاهی کویت را آغاز کرد. این جنگ فقط چند روز طول کشید و عراق پایتخت و کل کشور کویت را به اشغال خود درآورد. نیروهای عراقی برای ورود به این کشور، تصرف پایتخت، فرودگاه‌ها و دوپایگاه هوایی کویت از مسیرهای شکل (۲) استفاده کردند. اکنون پرسش اینجاست با توجه به مشخص بودن تقریبی مسیرهای جابجایی نیروها برای ورود به کویت و زمان محدود بهترین راهبرد کویت برای قطع این مسیرها یا به حداقل رساندن جابجایی نیروها چه بوده است؟ نیروهای کویتی می‌توانستند بعضی مسیرها را با حملات هوایی، موشکی یا توپخانه و همچنین تخریب پل‌ها از بین ببرند و بعضی مسیرهای دیگر را با استقرار نیرو و پدافند برای دشمن نا امن کنند و تا حد ممکن مانع از رسیدن نیروهای عراقی به نقاط حساس کشورشان شوند. از طرفی نیروهای عراقی نیز قبل از شروع حمله می‌بایست امنیت مسیرهای نیروهای خود را با اتخاذ تدابیر و پوشش توپخانه‌ای و هوایی بالا ببرند. دو نیروی متخاصم در اینجا دوهدف کاملا متضاد دارند نیروهای عراقی افزایش امنیت و استحکامات مسیرهای حمله و نیروهای کویتی ناامن کردن مسیر و از بین بردن آن‌ها. در این مثال، مسأله از دید نیروهای عراقی دیده شده و بهترین راهبرد عراق برای رساندن هرچه بیشتر و امن‌تر نیروهایش با توجه به عملیات کویتی‌ها برای ناامن کردن مسیرها بیان می‌شود.

در شکل (۳) مسیرهای حمله را به‌صورت یک شبکه نمایش داده‌ایم، اما به‌علت نبود اطلاعات دقیق از داده‌های تصادفی برای داده‌های مسیرها استفاده کرده‌ایم. همه این داده‌ها در جدول (۱) آمده است. همچنین در مسأله مقادیر بودجه برای نیروهای خودی و دشمن به‌ترتیب برابر $R = ۳۵۰۰$ و $R' = ۱۰۰۰۰$ در نظر گرفته شده است. دلیل این که بودجه دشمن را بیشتر در نظر گرفته‌ایم، این است که در شرایط واقعی مقدار بودجه دقیق دشمن در دست نیست و فقط می‌توان یک برآورد و تخمین از آن را ارایه کرد. پس با اختیار یک مقدار بزرگ برای آن می‌توان محتاطانه‌تر عمل کرد.



شکل ۲. نقشه مسیرهای زمینی بین دو کشور عراق و کویت [۲۶].

برای حل مسأله از زبان برنامه‌نویسی پایتون [1] نسخه ۲,۷,۱۵ استفاده شده است. به‌خصوص در این زبان برنامه‌نویسی دو کتابخانه نتورک ایکس [2] و گروبی [3] به‌کار رفته‌اند. اولین کتابخانه برای پیاده‌سازی نقشه بر گراف و تعریف مسأله بر گراف مورد استفاده قرار گرفته است و دومین کتابخانه یک حل‌کننده بسیار قوی برای مسائل بهینه‌سازی است که برای حل مسائل اصلی و زیر مسائل حاصل از الگوریتم (۱) مورد استفاده قرار گرفته است. این حل‌کننده برای حل مسائل بهینه‌سازی عدد صحیح آمیخته معمولا از روش صفحه و برش استفاده می‌کند.



شکل ۳. شبکه حاصل از مسیرهای زمینی بین عراق و کویت.

در این مثال مسأله اصلی شامل ۶۹۷ متغیر و ۸۷۲ محدودیت بوده و در هر تکرار یک محدودیت به مسأله اضافه می‌گردد. از طرف دیگر، زیر مسأله شامل ۱۴۹۶ متغیر و ۲۰۳۹ محدودیت است. الگوریتم (۱) پیاده‌سازی شده در زبان پایتون را بر یک لپ تاپ با پردازنده ۷ هسته‌ای با مقدار کش ۸ MB، حافظه تصادفی ۸ GB و سیستم عامل ویندوز ۱۰ اجرا کردیم و روند حل الگوریتم در حدود ۰/۷۵ s به‌طول انجامید. الگوریتم پس از سه تکرار به پایان رسید که مقادیر z_L, z_U در این تکرارها به شرح جدول (۱) است.

- تکرار اول: $z^U = +\infty, z^L = -\infty$
- تکرار دوم: $z^U = 706, z^L = 634$
- تکرار سوم: $z^U = 670, z^L = 670$

[1] Python
[2] Networkx
[3] Gurobi

همین‌طور که ملاحظه می‌کنید در تکرار سوم مقدار تابع هدف مسأله اصلی و زیر مسأله کاملا یکسان شده‌اند. پس می‌توان برای اجرای الگوریتم برای این مسأله از هر مقدار کوچک ϵ استفاده کرد.

جدول ۱. داده‌های مسأله.

(i,j)	c_{ij}	c_{ij}^{u}	r_{ij}	r'_{ij}	m_{ij}	m'_{ij}
(۱،۰)	۱۰۸	۱۱۸	۱۱	۱۲	۱	**۹**
(۲،۰)	۴۱	۵۴	۱۳	۱۱	۱	**۹**
(۲،۱)	۱۹	۲۹	۱۲	۷	۱۱	**۶**
(۳،۱)	۱۶۶	۱۷۱	۱۲	۱۰	۶	**۱۲**
(۱،۲)	۱۱۱	۱۱۷	۸	۹	۷	**۲**
(۴،۲)	۱۲۶	۱۳۶	۴	۱۳	۲	**۱۱**
(۵،۲)	۹۳	۱۰۶	۱۲	۲	۱۰	**۸**
(۴،۳)	۵۱	۵۹	۱۱	۴	۲	**۴**
(۶،۳)	۱۱۰	۱۱۳	۱	۴	۴	**۱۰**
(۲،۴)	۱۲۹	۱۳۲	۴	۱۳	۲	**۱۱**
(۳،۴)	۱۳۸	۱۳۹	۱۱	۸	۵	**۱۲**
(۵،۴)	۱۳۳	۱۴۳	۱۰	۸	۷	**۱۱**
(۶،۴)	۱۳۹	۱۴۷	۱۲	۳	۱	**۳**
(۴،۵)	۱۶	۲۸	۶	۱۰	۳	**۱۰**
(۶،۵)	۱۳۴	۱۴۱	۱۰	۴	۴	**۶**
(۷،۵)	۱۵۸	۱۷۱	۹	۳	۶	**۵**
(۹،۶)	۵۹	۷۱	۳	۲	۹	**۳**
(۴،۶)	۴۰	۵۲	۴	۱	۱	**۹**
(۵،۶)	۲۸	۴۰	۲	۳	۱۰	**۱۰**
(۷،۶)	۷۱	۸۲	۱	۱۰	۲	**۱۳**
(۸،۷)	۱۳۲	۱۴۳	۸	۴	۳	**۲**
(۶،۷)	۶۸	۶۹	۱۲	۴	۱۳	**۱۳**
(۹،۸)	۸۸	۹۷	۱۳	۸	۱۱	**۱۲**
(۱۰،۸)	۱۳۱	۱۴۱	۱۲	۹	۴	**۵**
(۸،۹)	۱۶۵	۱۷۴	۱۰	۱۳	۶	**۸**
(۱۰،۹)	۲۴	۳۴	۲	۱۰	۱۲	**۸**
(۱۱،۱۰)	۸۰	۸۳	۱۲	۶	۶	**۳**
(۱۰،۱۲)	۱۱۱	۱۱۵	۷	۱۱	۱۱	**۲**
(۱۲،۱۱)	۵۷	۶۳	۱۲	۸	۲	**۸**

جواب بهینه حاصل از حل مسأله را با جزییات کامل در جدول (۲) گزارش کرده‌ایم. این جدول تغییرات هزینه هر یال را در هر لحظه از زمان نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال یال (۰/۲) با تغییر هزینه نزولی از لحظه صفر تا ۵ روبه رو شده است و پس از آن تغییرات صعودی شده‌اند. این بدان معناست که در ابتدا تا زمان $t = ۶$ فقط نیروهای دشمن دست به تخریب این مسیر زده و در نتیجه هزینه تخریب را کاهش داده‌اند. سپس از لحظه $t = ۶$ نیروهای مدافع در پشتیبانی بر این مسیر، هزینه تخریب را افزایش داده‌اند. توجه کنید که برخی از یال‌ها بدون تغییر باقی مانده‌اند. این بدان معناست که آن یال‌ها بر هیچ برش کمینه‌ای واقع نشده و در نتیجه مورد توجه نیروهای مدافع و مهاجم قرار نگرفته‌اند.

جدول ۲. جواب بهینه (۱،۰).

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
(۱،۰)	۱۰۰	۹۲	۸۴	۷۶	۶۸	۶۰	۵۲	۴۴
(۲،۰)	۳۳	۲۵	۱۷	۹	۱	۰	۳	۴
(۲،۱)	۱۹	۱۹	۱۹	۱۹	۱۹	۱۹	۱۳	۱۸
(۳،۱)	۱۶۶	۱۵۴	۱۴۲	۱۳۰	۱۳۰	۱۳۰	۱۳۰	۱۳۶
(۱،۲)	۱۱۱	۱۱۱	۱۱۱	۱۱۱	۱۱۱	۱۱۱	۱۱۱	۱۱۶
(۴،۲)	۱۲۶	۱۲۶	۱۲۶	۱۲۶	۱۲۶	۱۲۶	۱۲۶	۱۲۸
(۵،۲)	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۱۰۳
(۴،۳)	۵۱	۵۱	۵۱	۵۱	۵۱	۵۱	۵۱	۵۳
(۶،۳)	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۰۴
(۲،۴)	۱۲۹	۱۲۹	۱۲۹	۱۲۹	۱۲۹	۱۲۹	۱۲۹	۱۳۱
(۳،۴)	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۱
(۵،۴)	۱۳۳	۱۳۳	۱۳۳	۱۳۳	۱۳۳	۱۳۳	۱۳۳	۱۴۰
(۶،۴)	۱۳۹	۱۳۹	۱۳۹	۱۳۹	۱۳۹	۱۳۹	۱۳۹	۱۴۰
(۴،۵)	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۹
(۶،۵)	۱۳۴	۱۳۴	۱۳۴	۱۳۴	۱۳۴	۱۳۴	۱۳۴	۱۳۸
(۷،۵)	۱۵۸	۱۵۸	۱۵۸	۱۵۸	۱۵۸	۱۵۸	۱۵۸	۱۶۴
(۹،۶)	۵۹	۵۹	۵۹	۵۹	۵۹	۵۹	۵۹	۶۸
(۴،۶)	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۱
(۵،۶)	۲۸	۲۸	۲۸	۲۸	۲۸	۲۸	۲۸	۳۸
(۷،۶)	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۳
(۸،۷)	۱۳۲	۱۳۲	۱۳۲	۱۳۲	۱۳۲	۱۳۲	۱۳۲	۱۳۵
(۶،۷)	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸	۶۸
(۹،۸)	۸۸	۸۸	۸۸	۸۸	۸۸	۸۸	۸۸	۸۷
(۱۰،۸)	۱۳۱	۱۳۱	۱۳۱	۱۳۱	۱۳۱	۱۳۱	۱۳۱	۱۳۵
(۸،۹)	**۱۶۵**	۱۶۵	۱۶۵	۱۶۵	۱۶۵	۱۶۵	۱۶۵	۱۷۱
(۱۰،۹)	۲۴	۲۴	۲۴	۲۴	۲۴	۲۴	۲۴	۲۸
(۱۱،۱۰)	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰	۸۳
(۱۰،۱۲)	۱۱۱	۱۱۱	۱۱۱	۱۱۱	۱۰۹	۱۰۷	۱۰۵	۱۱۴
(۱۲،۱۱)	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۹

۹- نتیجه‌گیری

جنگ‌ها معمولا با حملات موشکی و هوایی آغاز می‌شوند که با هدف نابودسازی مراکز حساس نظامی یا اقتصادی و قطع خطوط ارتباطی و تدارکاتی است. پس از این مرحله معمولا لشکرهای پیاده و زرهی وارد میدان جنگ شده و شروع به پیشروی می‌کنند. حفاظت از خطوط ارتباطی و تامین امنیت این مسیرها در برابر حملات دشمن تأثیر مهمی در نتایج نهایی جنگ خواهد داشت. در این مقاله مسأله حفظ خطوط ارتباطی و بازسازی آن‌ها به

صورت یک مسأله دوسطحی وابسته به زمـان فرمـول‌بنـدی شـده است که در آن نیروهای دشمن امکانات و بودجه‌ای بـرای تخریـب مسیرها و همچنین نیروهـای خـودی امکانـاتی بـرای بازسـازی و افزایش امنیت مسیرها دارند. هدف از ایـن مسـأله یـافتن بهتـرین عملکرد نیروهای خودی با توجه به حملات دشمن است به‌طـوری کـه تـا حـد ممکـن خطـوط ارتبـاطی حفـظ شـود. بـرای حـل این مسأله از رویکـرد تجزیـه بنـدرز اسـتفاده شـده اسـت و یـک الگوریتم در این راستا ارایه شـده اسـت. در نهایـت بـرای ارزیـابی کـارایی روش حـل یـک مثـال واقعـی ارایـه شـده اسـت کـه البته به علت نبود اطلاعـات دقیـق پارامترهـا بـه‌صـورت تصـادفی انتخاب شده‌اند. به عنوان تحقیقات آتـی در ایـن زمینـه پیشـنهاد می‌شود که این مسأله برای محافظت از مراکـز حسـاس گسـترش یابد. همچنـین کـارایی روش‌هـای دیگـر موجـود در حـل مسـائل برنامه‌ریزی دو سطحی برای این مسأله نیز بررسی شود. این مسأله از دید مهاجم نیز می‌توانـد فرمـول‌بنـدی شـود و منجـر بـه ارایـه بهترین راهبرد تهاجمی گردد. علاوه بر این می‌توان از این رویکـرد برای طراحی سامانه‌های پدافندی در جهت حفاظـت از مسـیرهای حیاتی استفاده کرد.

۱۰- مرجع‌ها

[1] Bigdeli, H.; Tayyebi, J.; Partovi, M. T. “War Game and Mathematical Models”; First Edition, Dafous Publications (In Persian).

[2] Afshari Rad, M. “Maximum Flow Interdiction Problem In Network: New Solutions and Generalization to Dynamic Networks”; Doctoral Dissertation, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University, 2012, (In Persian).

[3] Steinrauf, R. L. “Network Interdiction Model, Master Thesis”, Monterey, California, 1991.

[4] Ahuja, R. K.; Magnanti, T. L.; Orlin, J. B. “Network Flows, Theory, Algorithms, and Applications”; 1st ed. Prentice Hall, New Jersey, 1993.

[5] Ford, L. R.; Fulkerson, D. R. “Flows in Networks”; Princeton University Press, New Jersey, 1962.

[6] Bracken, J.; McGill, J. T. “Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints”; Oper. Res. 1973, 21, 37-44.

[7] Candler, W.; Norton, R. “Multi-level Programming and Development Policy”; The World Bank, 1977.

[8] Bard, J. “Practical Bi-level Optimization: Algorithms and Applications”; Kluwer Academic Publishers, USA, 1998.

[9] Wollmer, R. D. “Removing arcs from a Network”; J. Oper. Res. 1964, 12, 934-940.

[10] McMastres, A.W.; Mustin, T. M. “Optimal Interdiction of a Supply Network”; Nav. Res. Log. Quar. 1970, 17(3), 261-268.

[11] Wood, R. K. “Deterministic Network Interdiction Problem”; Math. Comput. Modell. 1993, 17, 1-18.

[12] Kennedy, K. T.; Deckro, R. F.; Moore, J. T.; Hopkinson, K. M. “Nodal Interdiction”; Math. Comput. Model 2011, 54 (11-12), 3116–3125.

[13] Lunday, B. J.; Sherali, H. D. “A Dynamic Network Interdiction Problem”; Inf. 2010, 21, 553-574.

[14] Rad, M. A.; Kakhki, H. T. “Maximum Dynamic Network Flow Interdiction Problem: New Formulation and Solution Procedures”; Comput. Ind. Eng. 2013, 65, 531-536.

[15] Ratliff, H. D.; Sicilia, G. T.; Lubore, S. H. “ Finding the N Most Vital Links in Flow Networks”; Manage. Sci. 1975, 21, 531-539.

[16] Akgün, İ.; Tansel, B. Ç.; Wood, R. K. “The Multi-Terminal Maximum-Flow Network-Interdiction Problem”; Eur. J. Oper. Res. 2011, 211, 241–251.

[17] Lim, C.; Smith, J. C. “Algorithms for Discrete and Continuous Multicommodity Flow Network Interdiction Problems”; IIE Trans. 2007, 39, 15-26.

[18] Mohammadi, A.; Tayyebi, J. “Maximum Capacity Path Interdiction Problem with Fixed Costs”; Asia-Pac. J. Oper. Res. 2019, 36, 1950018.

[19] Ramirez-marquez, E.; Daniel, E.; Salazar, A.; Claudio, M.; Rocco, S. “Bi and Tri Objective Optimization in the Deterministic Network Interdiction Problem”; Rel. Eng. Syst. Saf. 2010, 95, 887–96.

[20] Chen, Y.; Cheng, G.; Shenghan, Yu. “Bi-Objective Optimization Models for Network Interdiction”; RAIRO Oper. Res. 2019, 53, 461–472.

[21] Lim, C.; Smith, J. “Algorithms for Discrete and Continuous Multicommodity Flow Network Interdiction Problems”; IIE Trans. 2007, 39,15–26.

[22] Smith, J. C.; Yongjia, S. “A Survey of Network Interdiction Models and Algorithms”; Eur. J. Oper. Res. 2020, 283, 797-811.

[23] Bigdeli, H.; Hassanpour, H.; Tayyebi, J. “The Optimistic and Pessimistic Solutions of Single and Multiobjective Matrix Games with Fuzzy Payoffs and Analysis of some of Military Problems”; Adv. Defence Sci. & Technol. 2016, 2, 133-145 (In Persian).

[24] Bigdeli, H. “Quadratic Programming Method for Choosing Optimal Decision in Fuzzy and Complex Environment of Battle Scenario”; Adv. Defence Sci. & Technol. 2020, 11, 238-231.

[25] Ben-Ayed, O.; Boyce, D. E.; Blair, C. E. “A General Bilevel Linear Programming Formulation of the Network Design Problem”; Trans. Res. Part B 1988, 22, 311-318.

[26] Washburn, A. R. “Two-Person Zero-Sum Games”; Springer Edition 4, 2014.