

The Error Analysis of Euler Angles in the LEO Single-Satellite LOS Geolocation Metho

A. Noroozi^{*}, G. Saadati Moghadam, A. Setayesh, M. M. Nayebi

^{*} Sharif University of Technology

(Received: 04/04/2021, Accepted: 30/11/2021)

Abstract

In this paper, the effect of errors in the Euler angles on the performance of the LEO single-satellite LOS geolocation method is analyzed. In the LEO single-satellite LOS geolocation method, the aim is the estimation of the terrestrial target location by finding the intersection of the two direction vectors and the ground. In the presence of errors in the measured values, the target position estimate deviates from its true value and it is required to analyze the effects of this deviation. To this end, first, by expressing the problem in the ECEF coordinate system and transferring the origin to the satellite position by using the latitude and longitude of the satellite and the state vector, it is tried to determine the intersection of the LOS from the satellite to the target and the earth's surface as the target location. Then, the effect of the error in Euler angles on the performance of the LOS method is theoretically analyzed and its covariance matrix is derived by the perturbation method. In addition, the CRLB for the LOS method due to the error in Euler angles is presented. According to the simulation results, in order to achieve an RMSE of less than 1500 meters in the considered scenario, the angle errors in the attitude vector should be less than 0.1 degrees.

Keywords: Single-Satellite LOS Geolocation Method, Euler Angles, Attitude Vector, Cramer-Rao lower Bound (CRLB), Error Analysis

^{*} Corresponding author E-mail: ali_noroozi@sharif.edu

تحلیل خطای زوایای اوپلر در روش مکان‌یابی LOS با یک ماهواره LEO

علی نوروزی^{۱*}، گودرز سعادت‌ی مقدم^۲، امیر ستایش^۳، محمد مهدی نایی^۴

۱- پژوهشگر پسادکتری، دانشگاه صنعتی شریف، ۲- دانشجو دکتری، دانشگاه علم و صنعت ایران

۳- دانشجو دکتری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۴- استاد، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۱۵، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۰۹)

چکیده

در این مقاله، اثر خطا در زوایای اوپلر بر عملکرد روش مکان‌یابی LOS با یک ماهواره LEO مورد تحلیل قرار گرفته است. در روش مکان‌یابی LOS با یک ماهواره LEO، تخمین موقعیت هدف زمینی براساس یافتن محل تقاطع دو بردار جهت با سطح زمین، مطلوب مسئله می‌باشد. در صورت وجود نویز در مقادیر اندازه‌گیری شده، مقدار تخمین موقعیت هدف از مقدار واقعی آن فاصله می‌گیرد و نیازمند آن است که اثرات آن مورد تحلیل قرار گیرد. به همین منظور، در این مطالعه ابتدا با بیان مسئله در دستگاه مختصات ECEF و انتقال مبدأ مختصات به مختصات موقعیت ماهواره با بهره‌گیری از مقادیر طول و عرض جغرافیایی ماهواره و بردار وضعیت، سعی شده است مکان تقاطع خطوط LOS از سمت ماهواره به سوی هدف با سطح زمین به عنوان موقعیت هدف تعیین می‌شود. سپس، اثر خطا در زوایای اوپلر بر عملکرد الگوریتم LOS به صورت تئوری مورد تحلیل قرار گرفته است و ماتریس کواریانس خطای آن با روش موسوم به آشفتگی به دست آمده است. همچنین، کران پایین کرامر- رانو الگوریتم LOS ناشی از خطای زوایای اوپلر ارائه شده است. براساس نتایج شبیه‌سازی، به منظور دستیابی به خطای RMSE کمتر از ۱۵۰۰ متر در سناریو در نظر گرفته شده، خطای زوایا در بردار وضعیت باید کمتر از ۰/۱ درجه باشد.

کلید واژه‌ها: روش مکان‌یابی LOS تک ماهواره، زوایا اوپلر، بردار وضعیت، کران پایین کرامر- رانو، تحلیل خطا

۱- مقدمه

ورود^۶ سیگنال با به کارگیری مثلثات کروی و روش تجزیه مقادیر ویژه^۷ در فضای دوبعدی ارائه شده است.

مکان‌یابی با استفاده از روش جهت‌یابی یکی از مرسوم‌ترین و ساده‌ترین روش‌های مکان‌یابی است که کاربردهای فراوانی در حوزه رادار، شبکه حسگرهای بی‌سیم^۸ و جنگ الکترونیک دارد [۱۸-۱۴]. در این روش از اطلاعات جهت ورود^۹، زاویه ورود سیگنال یا خط دید^{۱۰} (LOS) استفاده می‌شود تا موقعیت هدف تخمین زده شود. مهم‌ترین ضعف روش جهت‌یابی این است که این روش به تجهیزات سخت‌افزاری نسبتاً پیچیده‌ای احتیاج دارد تا بتواند تخمین زوایای سمت و ارتفاع را با دقت قابل قبولی به دست آورد [۱۹]. همچنین، مسئله کالیبره کردن آرایه‌های آن نیز از جمله مشکلات دیگر این روش است [۱۹]. با وجود این مشکلات، روش مکان‌یابی جهت‌یابی به تعداد حسگر کمتری برای مکان‌یابی نیاز دارد. در روش مکان‌یابی LOS ماهواره‌ای، با توجه

مکان‌یابی غیرفعال با استفاده از یک ماهواره مدار پایین زمین^۱ (LEO) دارای کاربردهای فراوانی در حوزه‌های مختلف به خصوص حوزه نظامی است. از مزایای آن می‌توان به برد زیاد و امکان مکان‌یابی تحت شرایط مختلف آب و هوایی اشاره کرد [۱].

تاکنون روش‌های مختلفی برای مکان‌یابی غیرفعال با استفاده از یک ماهواره LEO معرفی شده است که از جمله می‌توان به روش جهت‌یابی^۲ دوبعدی [۶-۲]، روش مبتنی بر فرکانس داپلر^۳ [۹-۷]، روش مبتنی بر تغییر نرخ فرکانس داپلر^۴ [۱۰، ۱۱]، روش مبتنی بر زمان ورود^۵ پالس‌ها [۱۲] و روش ترکیبی مبتنی بر مبتنی بر جهت‌یابی یک‌بعدی و تغییرات نرخ فرکانس داپلر [۱] اشاره کرد. همچنین، در [۱۳] روش جدیدی با استفاده از زاویه

* رایانامه نویسنده مسئول: ali_noroozi@sharif.edu

^۶ Angle of Arrival (AOA)

^۷ Singular Value Decomposition (SVD)

^۸ Wireless Sensor Network (WSN)

^۹ Direction of Arrival (DOA)

^{۱۰} Line of Sight

^۱ Low Earth Orbit

^۲ Direction Finding (DF)

^۳ Doppler Frequency

^۴ Doppler Frequency Rate-of-Change

^۵ Time of Arrival (TOA)

(۷) به نتیجه‌گیری پرداخته‌ایم.

۲- تشریح مسئله مکان‌یابی LOS

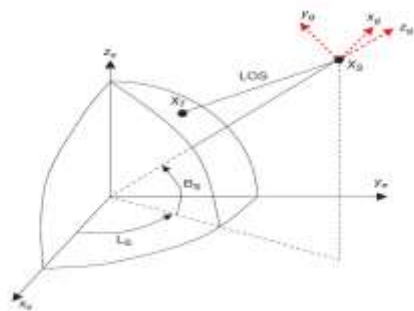
در روش مکان‌یابی LOS، ابتدا باید زوایای کسینوس جهت توسط تکنیک‌های جهت‌یابی تعیین شوند. سپس، مکان هدف براساس موقعیت ماهواره (عرض جغرافیایی^۴، طول جغرافیایی^۵ و ارتفاع^۶) و بردار زوایای وضعیت (زوایای یاو^۷، پیچ^۸ و رول^۹) ماهواره در هر لحظه تعیین می‌شود.

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده‌است، فرض شده‌است که موقعیت ماهواره در دستگاه مختصات ECEF^{۱۰} برابر با $x_{s,e}$ باشد. همچنین، فرض شده‌است که طول و عرض جغرافیایی ماهواره بر روی زمین به ترتیب برابر با B_s و L_s باشد. با فرض اینکه موقعیت هدف برابر با $x_{t,e}$ باشد، بردار فاصله بین هدف و ماهواره در دستگاه مختصات ECEF برابر است با:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{x}_{t,e} - \mathbf{x}_{s,e} \quad (۱)$$

از آنجا که زوایای کسینوس جهت هدف در دستگاه مختصات بدنه ماهواره اندازه‌گیری می‌شوند، لازم است دستگاه مختصات را به موقعیت ماهواره انتقال دهیم تا زوایا را در دستگاه مختصات ماهواره اندازه‌گیری نمائیم. این انتقال را در دو مرحله انجام می‌دهیم. ابتدا دستگاه مختصات ECEF را به دستگاه مختصات NED^{۱۱} در موقعیت ماهواره انتقال داده و سپس، به کمک بردار زوایای وضعیت، دستگاه مختصات NED را به دستگاه مختصات بدنه ماهواره انتقال می‌دهیم.

با توجه به شکل (۱) برای انتقال از دستگاه مختصات ECEF به دستگاه مختصات NED در موقعیت ماهواره، کافی است مراحل زیر انجام شود:



شکل (۱): مکان‌یابی روش LOS [۲].

به اینکه هدف (تشنع‌کننده^۱) بر روی سطح زمین قرار دارد، می‌توان تنها با یک ماهواره موقعیت هدف را بدون ابهام تعیین کرد. اصول این روش مکان‌یابی بر پایه تعیین نقطه تقاطع خط LOS (از ماهواره به سمت هدف بر روی سطح زمین) و سطح زمین به‌عنوان موقعیت هدف است. لازم به ذکر است که خط LOS به کمک سامانه‌های جهت‌یابی بر روی ماهواره به‌دست می‌آید.

در صورت وجود خطا، تخمین موقعیت هدف از مقدار واقعی آن فاصله می‌گیرد به نحوی که هرچه مقدار خطا بیشتر باشد انتظار می‌رود که تخمین موقعیت هدف دارای خطای بیشتری شود. از جمله منابع خطا در روش مکان‌یابی LOS می‌توان به خطای زوایای کسینوس جهت، ارتفاع هدف زمینی و زوایای اویلر اشاره کرد. تاکنون، اثر خطای زوایای کسینوس جهت و ارتفاع هدف بر عملکرد روش مکان‌یابی LOS مورد بررسی قرار گرفته و کران پایین کران-رئو (CRLB) آن نیز به‌دست آمده است [۲، ۳]. اثر جبران‌سازی بایاس ناشی از خطای کسینوس جهت نیز مورد بررسی قرار گرفته و یک الگوریتم مناسب برای مکان‌یابی ارائه شده‌است [۴]. موضوع مکان‌یابی ماهواره‌ای اشیا با سرعت زیاد و در نظر گرفتن خطای ناشی از تاخیر انتشار نیز به آن پرداخته شده‌است [۵]. همچنین، به منظور ردگیری هدف زمینی با استفاده از مشاهدات یک ماهواره، از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته^۲ مبتنی بر روش جهت‌گیری استفاده شده‌است [۶].

متأسفانه، تاکنون، اثر خطای زوایای اویلر در روش مکان‌یابی LOS مورد مطالعه قرار نگرفته است. به‌همین خاطر، در این مقاله، ما قصد داریم اثر خطای زوایای اویلر را بر عملکرد مکان‌یابی روش LOS به‌صورت تئوری مورد تحلیل قرار دهیم و ماتریس کواریانس خطا ناشی از زوایای اویلر و ماتریس CRLB متناظر با آن را ارائه نمائیم.

ساختار ادامه مقاله به این صورت می‌باشد. در بخش (۲)، به تشریح مسئله مکان‌یابی با یک ماهواره LEO با الگوریتم LOS پرداخته می‌شود. در بخش (۳)، پاسخ الگوریتم LOS به مسئله مکان‌یابی با یک ماهواره LEO مطرح شده‌است. در بخش (۴)، به آنالیز خطای روش LOS ناشی از زوایای اویلر پرداخته‌ایم و ماتریس کواریانس خطا را با روش آشفتگی^۳ به‌دست آورده‌ایم. در بخش (۵)، CRLB ناشی از زوایای اویلر برای الگوریتم LOS ارائه شده‌است. در بخش (۶)، با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی، اثر خطای زوایای اویلر بر عملکرد الگوریتم LOS مورد بررسی قرار گرفته و با مقدار CRLB نیز مقایسه شده و در نهایت، در بخش

⁴ Latitude

⁵ Longitude

⁶ Altitude

⁷ Yaw

⁸ Pitch

⁹ Roll

¹⁰ Earth-Center Earth-Fixed

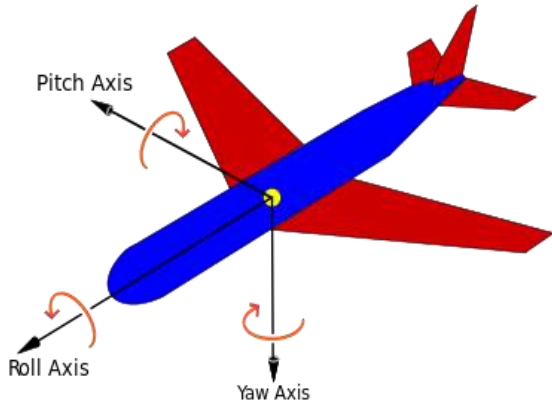
¹¹ North-East-Down

¹ Emitter

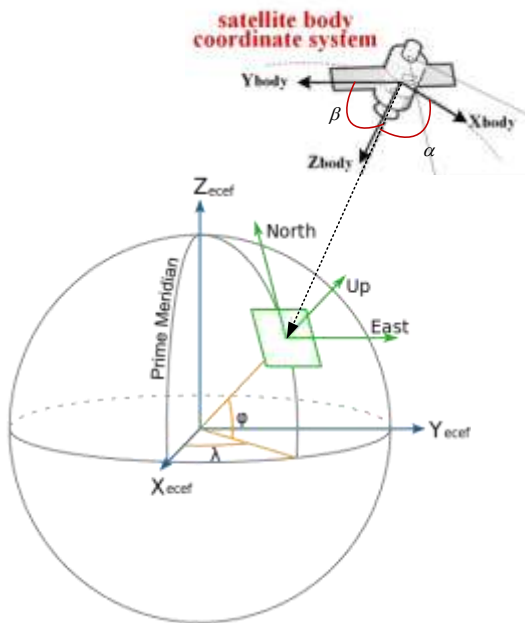
² Extended Kalman Filter (EKF)

³ Perturbation

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arccos \frac{x_{t,b}}{\|\mathbf{x}_{t,b}\|} \\ \arccos \frac{y_{t,b}}{\|\mathbf{x}_{t,b}\|} \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}_{t,e}) \quad (۴)$$



شکل (۲): زوایای وضعیت و جهت مثبت زاویه آنها.



شکل (۳): نحوه تعریف زوایای کسینوس جهت α و β .

برای درک بهتر، زوایای کسینوس جهت α و β در شکل (۳) نشان داده شده‌است. در صورتی که از مدل بیضوی زمین WGS-۸۴ و اطلاعات پیشین که هدف بر روی سطح زمین است استفاده شود، فرم معادل برای طول و عرض جغرافیایی هدف (L_t و B_t) بر روی سطح زمین و ارتفاع بر روی سطح زمین (H_t) و مختصات آن $\mathbf{x}_{t,e} = [x_{t,e} \ y_{t,e} \ z_{t,e}]^T$ در دستگاه مختصات

۱- ابتدا دستگاه مختصات ECEF به مقدار زاویه L_s نسبت به محور Z چرخانده شود.

۲- در مرحله دوم دستگاه مختصات ECEF تغییر یافته به مقدار زاویه B_s نسبت به محور Y چرخانده شود.

۳- در نهایت با معکوس کردن دستگاه مختصات حاصل طبق ماتریس‌های بیان شده در رابطه (۱)، بردار LOS در دستگاه مختصات NED در مکان ماهواره به دست می‌آید.

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_{rg} \mathbf{R}_y(-B_s) \mathbf{R}_z(L_s) \mathbf{r}_e$$

$$\mathbf{R}_{rg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(B_s) = \begin{bmatrix} \cos(B_s) & 0 & -\sin(B_s) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(B_s) & 0 & \cos(B_s) \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\mathbf{R}_z(L_s) = \begin{bmatrix} \cos(L_s) & \sin(L_s) & 0 \\ -\sin(L_s) & \cos(L_s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض شده‌است که خروجی‌های حسگر وضعیت سه مقدار را در هر لحظه فراهم می‌کنند.

۱- زاویه یاو Y: زاویه بین سر ماهواره و شمال مغناطیسی که از سمت شمال به شرق، این زاویه مثبت است.

۲- زاویه پیچ P: زاویه بین سر ماهواره و شمال مغناطیسی که اگر سر ماهواره در جهت بالا بیاید، این زاویه مثبت است.

۳- زاویه رول R: زاویه بین عمود بر بدنه ماهواره به سمت پایین و جهت پایین مرکز زمین که اگر بال راست ماهواره به سمت پایین بیاید، این زاویه مثبت است.

برای درک بهتر زوایای وضعیت و جهت مثبت زاویه آنها، این زوایا را در شکل (۲) نشان داده‌ایم. حال برای انتقال از دستگاه مختصات NED به دستگاه مختصات بدنه ماهواره، به ترتیب چرخش زاویه یاو در جهت محور Z، چرخش زاویه پیچ در جهت محور Y و چرخش زاویه رول به صورت افقی در جهت محور X را اعمال می‌کنیم. پس از این انتقال، داریم:

$$\mathbf{x}_{t,b} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_{t,e} - \mathbf{x}_{s,e})$$

$$\mathbf{x}_{t,b} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_{t,e} - \mathbf{x}_{s,e}) \quad (۳)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_x(R) \mathbf{R}_y(P) \mathbf{R}_z(Y) \mathbf{R}_{rg} \mathbf{R}_y(-B_s) \mathbf{R}_z(L_s)$$

در مسئله مکان‌یابی LOS زوایای کسینوس جهت α و β به صورت زیر تعریف می‌شوند که تابعی از مختصات هدف هستند.

$$\begin{cases} \hat{r}_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \hat{r}_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \quad (10)$$

در صورتی که \hat{r}_1 و \hat{r}_2 بیانگر دو ریشه برای مسئله مورد نظر باشند، مقدار کمتر r قابل قبول خواهد بود و به‌عنوان فاصله صحیح پذیرفته می‌شود [۲]. با جایگذاری فاصله صحیح در رابطه (۸)، مکان هدف به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\hat{\mathbf{x}}_{t,e} = \mathbf{x}_{s,e} + \hat{r} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u} \quad (11)$$

باید توجه شود که در رابطه (۶)، مقدار N_t مجهول است. بنابراین، از طریق روش بازگشتی می‌توان مقدار آن را تعیین نمود. با توجه به اینکه مقدار N_s (شعاع محلی زمین در زاویه عرض جغرافیایی ماهواره) نزدیک به مقدار N_t هدف است، بنابراین، در ابتدا مقدار $\hat{N}_t = N_s$ در رابطه (۶) جایگزین می‌شود تا فاصله r_i در لحظه i ام به‌صورت بازگشتی محاسبه شود و سپس مکان هدف با استفاده از رابطه (۸) تعیین می‌شود. در نتیجه، مقدار $N_{t,i}$ در مرحله i ام تخمین زده می‌شود و این کار تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که فاصله مورد نظر همگرا شود به نحوی که داشته باشیم:

$$|r_i - r_{i-1}| \leq \varepsilon_r \quad (12)$$

که ε_r برابر با آستانه تنظیم شده خطای فاصله است [۲].

۴- تحلیل تئوری خطای مکان‌یابی روش LOS

در این قسمت قصد داریم با روش آشفستگی، ماتریس کواریانس خطا مکان‌یابی ناشی از خطای موجود در زوایای یابو، پیچ و رول را به‌دست آوریم. در حضور نویز در زوایای بردار وضعیت، ماتریس \mathbf{M} به‌صورت $\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}$ قابل بیان است. در نتیجه، بردار مکان هدف $\mathbf{x}_{t,e}$ به‌صورت $\mathbf{x}_{t,e} + \Delta\mathbf{x}_{t,e}$ قابل بیان خواهد بود. در این حالت، رابطه (۸) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{x}_{t,e} + \Delta\mathbf{x}_{t,e} = \mathbf{x}_{s,e} + (\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})^{-1} \mathbf{x}_{t,b} \quad (13)$$

با بهره‌گیری از فرمول وودبری^۱، رابطه (۱۲) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t,e} + \Delta\mathbf{x}_{t,e} &= \mathbf{x}_{s,e} \\ + \left(\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M}^{-1} + \Delta\mathbf{M}^{-1})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \right) \mathbf{x}_{t,b} \end{aligned} \quad (14)$$

ECEF برابر است با:

$$\begin{cases} x_{t,e} = (N_t + H_t) \cos(B_t) \cos(L_t) \\ y_{t,e} = (N_t + H_t) \cos(B_t) \sin(L_t) \\ z_{t,e} = (N_t (1 - e^2) + H_t) \sin(B_t) \end{cases} \quad (5)$$

که $N_t = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2(B_t)}$ بیانگر شعاع زمین در عرض جغرافیایی هدف (B_t) ، $a = 63778137 \text{ m}$ برابر با شعاع زمین (در عرض جغرافیایی صفر درجه) و $e^2 = 0.00669437999013$ برابر با مربع گریز از مرکز اول است. لازم به ذکر است که رابطه (۵) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

$$\frac{x_{t,e}^2 + y_{t,e}^2}{(N_t + H_t)^2} + \frac{z_{t,e}^2}{(N_t (1 - e^2) + H_t)^2} = 1 \quad (6)$$

با ترکیب روابط (۴) و (۶)، سه مقدار مجهول در سه عبارت وجود خواهد داشت که با حذف یک نتیجه با فاصله بیشتر از سایر نقاط بر روی زمین، مکان هدف قابل محاسبه است.

۳- پاسخ مکان‌یابی LOS

در صورتی که فاصله بین هدف و ماهواره برابر با r باشد، بعد از اندازه‌گیری زوایای کسینوس جهت α و β که در دستگانه مختصات ماهواره اندازه‌گیری می‌شوند، خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}_{t,b} = r \mathbf{u} \quad (7)$$

که $\mathbf{u} = [\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}]^T$ با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۳)، داریم:

$$\mathbf{x}_{t,e} = \mathbf{x}_{s,e} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_{t,b} = \mathbf{x}_{s,e} + r \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۶) یک معادله درجه دو بر حسب پارامتر مجهول r به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} ar^2 + br + c &= 0, \\ a &= \frac{x_m^2 + y_m^2}{(N_t + H_t)^2} + \frac{z_m^2}{(N_t (1 - e^2) + H_t)^2}, \\ b &= 2 \frac{x_m x_{s,e} + y_m y_{s,e}}{(N_t + H_t)^2} + 2 \frac{z_m z_{s,e}}{(N_t (1 - e^2) + H_t)^2}, \\ c &= \frac{x_{s,e}^2 + y_{s,e}^2}{(N_t + H_t)^2} + \frac{z_{s,e}^2}{(N_t (1 - e^2) + H_t)^2} - 1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_m = [x_m \quad y_m \quad z_m]^T = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u},$$

پاسخ مسئله درجه دو بیان شده به‌صورت زیر است:

¹ Woodbury Formula

که در آن:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial B} & \frac{\partial Y}{\partial L} & \frac{\partial Y}{\partial H} \\ \frac{\partial P}{\partial B} & \frac{\partial P}{\partial L} & \frac{\partial P}{\partial H} \\ \frac{\partial R}{\partial B} & \frac{\partial R}{\partial L} & \frac{\partial R}{\partial H} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{b}_{YPR}}{\partial \mathbf{x}_{BLH}} \quad (20)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{b}_{YPR}}{\partial \mathbf{x}_{t,e}} \times \frac{\partial \mathbf{x}_{t,e}}{\partial \mathbf{x}_{BLH}} = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2$$

ماتریس \mathbf{J}_1 و \mathbf{J}_2 بیانگر ماتریس‌های ژاکوبین هستند. ماتریس‌های ژاکوبین \mathbf{J}_1 و \mathbf{J}_2 در بخش پیوست الف به‌دست آورده شده‌اند. در نهایت، با به‌دست آوردن ماتریس \mathbf{J} و جایگزین کردن آن در رابطه (۱۸)، می‌توان مقدار CRLB روش مکان‌یابی LOS ناشی از خطای موجود در بردار زوایای وضعیت (یاو، پیچ و رول) را برای دستگاه مختصات جغرافیایی به‌دست آورد.

$$\text{CRLB}_{BLH} = (\mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{YPR}^{-1} \mathbf{J})^{-1} \quad (21)$$

که \mathbf{Q}_{YPR} ماتریس کواریانس بردار زوایای وضعیت است.

۶- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، چندین شبیه‌سازی به منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم جهت‌یابی در حضور خطای بردار وضعیت و مقایسه آن با مقدار CRLB انجام شده‌است. ما با استفاده از مقادیر اندازه‌گیری شده، مقدار تخمین زده شده در لحظه m -ام برای $\mathbf{x}_{t,e}$ در دستگاه مختصات ECEF را به‌دست می‌آوریم که این مقدار قابل تبدیل به مقدار تخمین زده شده برای مکان هدف در دستگاه مختصات $(\hat{B}_{t,m}, \hat{L}_{t,m}, \hat{H}_{t,m})$ است. به منظور کاهش اثرات خطاهای تصادفی، RMSE مکان‌یابی هدف را باید به‌صورت مونت کارلو انجام دهیم و بنابراین، برای محاسبه مقدار RMSE، هر آزمایش را به تعداد $M = 100$ بار تکرار می‌کنیم. مقدار RMSE در دستگاه مختصات طول و عرض جغرافیایی به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{B}_{t,m} - B_t)^2 \hat{N}_t^2 + (\hat{L}_{t,m} - L_t)^2 \hat{N}_t^2 + (\hat{H}_{t,m} - H_t)^2} \quad (22)$$

که \hat{N}_t تخمین شعاع محلی زمین در مکان هدف است. همچنین، جذر مقدار CRLB (RCRLB) روش مکان‌یابی LOS در دستگاه مختصات طول و عرض جغرافیایی از طریق رابطه زیر تعیین می‌شود.

با کم کردن رابطه (۸) از دو طرف (۱۳)، عبارت خطای تخمین مکان هدف $\Delta \mathbf{x}_{t,e}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\Delta \mathbf{x}_{t,e} = -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M}^{-1} + \Delta \mathbf{M}^{-1})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_{t,b} \quad (15)$$

با ضرب رابطه (۱۴) در مقدار ترانزفاده آن و سپس محاسبه میانگین آماری از دو طرف رابطه حاصل شده، مقدار کواریانس خطای مکان‌یابی هدف در دستگاه ECEF به‌صورت زیر قابل دست‌یابی است.

$$\text{Cov}(\mathbf{x}_{t,e}) = E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} \quad (16)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M}^{-1} + \Delta \mathbf{M}^{-1})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_{t,b}$$

۵- ماتریس CRLB خطای مکان‌یابی LOS

ماتریس CRLB یک حدپایین برای کواریانس هر تخمین‌گر بدون بایاس مشخص می‌کند. روش LOS ارائه شده در بخش (۳)، در سطح نویز کم تخمین‌گرهایی تقریباً بدون بایاس هستند. در نتیجه، مقدار CRLB را می‌توان به‌عنوان یک معیار عملکردی برای بررسی عملکرد آن در نظر گرفت.

برای به‌دست آوردن مقدار CRLB روش مکان‌یابی LOS، فرض شده‌است که تمام خطاها دارای توزیع گوسی مشترک با میانگین صفر هستند. ما قصد داریم مقدار CRLB را برای حالت ناشی از خطای موجود در بردار زوایای وضعیت (یاو، پیچ و رول) به‌دست آوریم.

بردار \mathbf{b}_{YPR}^m بیانگر مقادیر اندازه‌گیری شده زوایای یاو، پیچ و رول است. بنابراین، داریم:

$$\mathbf{b}_{YPR}^m = \mathbf{b}_{YPR} + \mathbf{n}_{YPR} \quad (17)$$

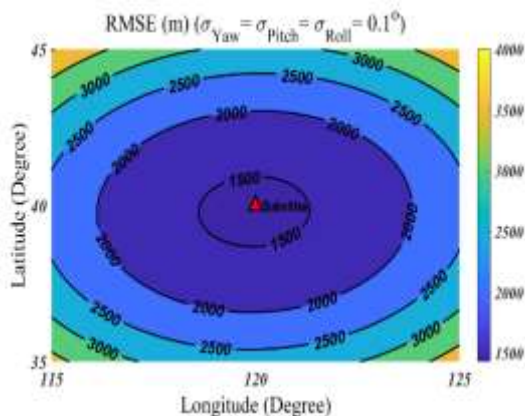
که مقادیر بدون خطا $\mathbf{b}_{YPR} = [Y \ P \ R]^T$ تابعی از مکان هدف \mathbf{x}_{BLH} است و \mathbf{n}_{YPR} بردار خطای مقادیر اندازه‌گیری شده زوایای یاو (Y)، پیچ (P) و رول (R) است. با فرض این که داشته باشیم $E[\mathbf{n}_{YPR}] = \mathbf{0}$ و $E[\mathbf{n}_{YPR} \mathbf{n}_{YPR}^T] = \mathbf{Q}_{YPR}$ ، تابع چگالی احتمال (pdf) خطای اندازه‌گیری برابر است با:

$$f(\mathbf{b}_{YPR} | \mathbf{x}_{BLH}) = \frac{1}{|2\pi \mathbf{Q}_{YPR}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{b}_{YPR}^m - \mathbf{b}_{YPR}(\mathbf{x}_{BLH}))^T \mathbf{Q}_{YPR}^{-1} (\mathbf{b}_{YPR}^m - \mathbf{b}_{YPR}(\mathbf{x}_{BLH}))\right) \quad (18)$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا در فرم ماتریسی، ما می‌توانیم ماتریس اطلاعات فیشر را به‌صورت زیر به‌دست آوریم [۲۰]:

$$\mathbf{F} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{b}_{YPR} | \mathbf{x}_{BLH})}{\partial \mathbf{x}_{BLH}^2}\right] = \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{YPR}^{-1} \mathbf{J} \quad (19)$$

یک ناحیه مشخصی به ازای سطح نویز مشخص ترسیم نمائیم. مطابق شبیه‌سازی پیشین، فرض شده‌است که ارتفاع ماهواره برابر با $H_S = 500 \text{ Km}$ ، طول و عرض جغرافیایی ماهواره برابر با $(L_S, B_S) = [120^\circ, 40^\circ]$ است. همچنین، زوایای بردار وضعیت ماهواره برابر با $[\text{Yaw Pitch Roll}] = [45^\circ \ 1^\circ \ 2^\circ]$ است. 2500 نقطه (50×50) به‌عنوان هدف در ناحیه $35^\circ \leq B_t \leq 45^\circ$ و $115^\circ \leq L_t \leq 125^\circ$ در نظر گرفته شده‌است. نویز موجود در مقادیر اندازه‌گیری شده در زوایای بردار وضعیت به‌صورت نویز سفید گوسی جمع شوند با میانگین صفر و انحراف معیار مساوی در نظر گرفته شده‌است. کانتور RMSE و RCRLB به ازای $\sigma_Y = \sigma_P = \sigma_R = 0.1^\circ$ به ترتیب در شکل (۵) و شکل (۶) به تصویر کشیده شده‌است. همچنین، در شکل (۷) و شکل (۸) به ترتیب کانتور RMSE و RCRLB به ازای $\sigma_Y = \sigma_P = \sigma_R = 1^\circ$ ترسیم شده‌است. نتایج نشان می‌دهند که برای اهداف نزدیک‌تر نتایج RMSE و RCRLB شباهت بیشتری به هم دارند و برای اهداف دورتر مقدار RMSE از مقدار RCRLB فاصله می‌گیرد. در این شبیه‌سازی نیز می‌توان ادعا کرد که روش LOS از نقطه نظر خطای بردار وضعیت شبه بهینه است چرا که کمی با مقدار RCRLB فاصله دارد. همچنین، نتایج نشان می‌دهند که کمینه خطای مکان‌یابی LOS متعلق به هدف واقع شده در زیر ماهواره (با طول و عرض جغرافیایی مشابه ماهواره) در روی سطح زمین است. هرچه از این نقطه فاصله بگیریم و دور شویم خطا مکان‌یابی بیشتر خواهد شد. همان‌طور که در این شکل‌ها مشخص است، کانتور RMSE و RCRLB به شکل دایره‌هایی به مرکز نقطه زیر ماهواره هستند. علت این امر ناشی از ماهیت خطی زوایای بردار وضعیت و تبدیل‌های موجود در ماتریس M است. همچنین، از مقایسه نتایج به ازای انحراف معیار 0.1 درجه با 1 درجه می‌توان فهمید که خطای تخمین موقعیت هدف رابطه تقریباً خطی با انحراف معیار نویز زوایا اندازه‌گیری دارد.



شکل (۵): کانتور RMSE روش مکان‌یابی LOS ناشی از خطا بردار وضعیت.

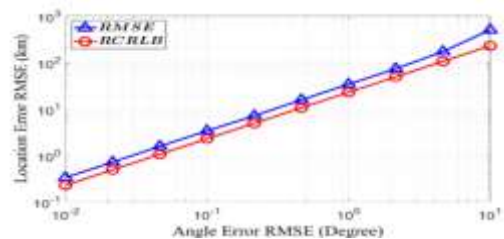
$$\sigma_{p_{\min}} = \sqrt{N_t^2 (\text{CRLB}_{BLH}(1,1) + \text{CRLB}_{BLH}(2,2)) + \text{CRLB}_{BLH}(3,3)} \quad (23)$$

که N_t شعاع محلی زمین در مکان هدف است.

۱-۶ اثر خطای بردار وضعیت بر عملکرد الگوریتم LOS

در این شبیه‌سازی، فرض شده‌است که ارتفاع ماهواره برابر با $H_S = 500 \text{ Km}$ ، طول و عرض جغرافیایی ماهواره برابر با $(L_S, B_S) = [120^\circ, 40^\circ]$ ، طول و عرض جغرافیایی هدف برابر با $(L_t, B_t) = [120^\circ, 40^\circ]$ است. در این حالت، زوایای بردار وضعیت ماهواره برابر با $[\text{Yaw Pitch Roll}] = [45^\circ \ 1^\circ \ 2^\circ]$ است و خطاهای اندازه‌گیری موجود در زوایای بردار وضعیت ماهواره به صورت نویز سفید گوسی با میانگین صفر مدل شده‌است. همچنین، فرض شده‌است که نویز موجود در زوایای بردار وضعیت از هم مستقل هستند و مقدار انحراف معیار آنها با هم برابر است.

منحنی خطای RMSE روش مکان‌یابی LOS براساس رابطه (۲۲) و منحنی جذر مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس CRLB براساس رابطه (۲۲) به ازای مقادیر انحراف معیار نویز از $\sigma_Y = 0.1^\circ$ تا 10° $\sigma_Y = \sigma_P = \sigma_R$ در شکل (۴) ترسیم شده‌است. نتایج نشان می‌دهند که مطابق انتظار با افزایش خطا در مقادیر اندازه‌گیری، خطای مکان‌یابی نیز افزایش می‌یابد. همچنین، براساس نتایج می‌توان ادعا کرد که روش LOS از نقطه نظر خطای بردار وضعیت شبه بهینه است چرا که کمی با مقدار RCRLB فاصله دارد. در شکل (۴)، خطای مکان‌یابی (به دلیل کوچک بودن مقادیر نویز) تقریباً به صورت خطی با افزایش خطای اندازه‌گیری افزایش می‌یابد. بنابراین، خطا برای زاویه اندازه‌گیری شده باید به اندازه کافی کوچک باشد تا خطای مکان‌یابی کمینه شود.



شکل (۴): خطای مکان‌یابی LOS بر حسب خطای زوایای بردار وضعیت.

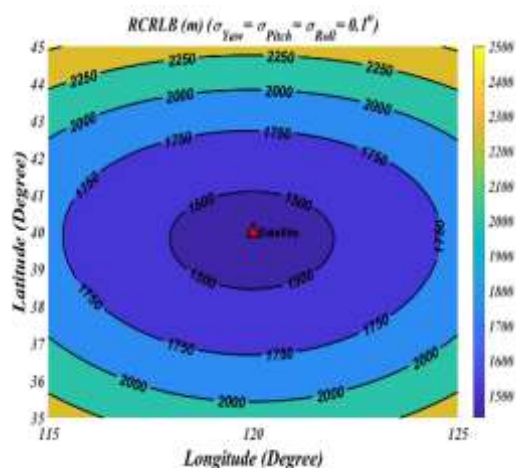
۲-۶ کانتور خطای مکان‌یابی ناشی از خطای بردار وضعیت

در این شبیه‌سازی قصد داریم کانتور RMSE و RCRLB را در

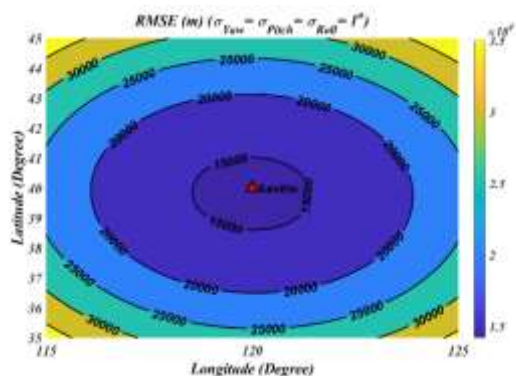
سپس پاسخ آن را نیز به‌دست آوردیم. بیان شد که تخمین موقعیت هدف در صورت وجود نویز در مقادیر اندازه‌گیری از مقدار واقعی آن فاصله می‌گیرد و بنابراین، در این حالت به تحلیل اثر نویز بر روی عملکرد الگوریتم LOS پرداخته‌ایم. ماتریس کواریانس خطا ناشی از خطای زوایای اوپلر به‌دست آمد و مقدار CRLB آن برای الگوریتم LOS ارائه شد. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که برای رسیدن به خطای مکان‌یابی کمتر از ۱۵۰۰ متر تحت سناریو در نظر گرفته شده باید خطای زوایای اوپلر همگی کمتر از ۰/۱ درجه باشند. همچنین، مشاهده کردیم که کمینه خطا و عرض جغرافیایی مشابه ماهواره) در روی سطح زمین است. هرچه از این نقطه فاصله بگیریم و دور شویم خطای مکان‌یابی بیشتر می‌شود.

۸- مراجع

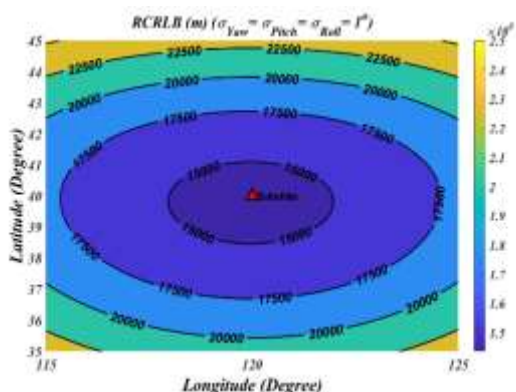
- [1] H. Li, M. Zhang, and F. Guo, "A Novel Single Satellite Passive Location Method Based on One-Dimensional Cosine Angle and Doppler Rate of Changing," IEEE Inter. Conf. Sig. Proc., Comm. Computing (ICSPCC), Qingdao, pp. 1-6, 2018.
- [2] F. Guo, F. Yun, Z. Yiyu, X. Caigen, and L. Qiang, "Space Electronic Reconnaissance: Localization Theories and Methods," John Wiley and Sons, 2014.
- [3] W. B. Gong, K. Xie, D. W. Feng, et al., "Method and Precision Analysis of Direction-Finding and Position Based on Satellites Passive Location System," J. Changsha Univ. Electric Power, vol. 19, no. 2, pp. 64-71, 2004.
- [4] C. He, M. Zhang, and F. Guo, "Bias Compensation for AOA-Geolocation of Known Altitude Target Using Single Satellite," IEEE Access, vol. 7, pp. 54295-54304, 2019.
- [5] S. Hartzell, L. Burchett, R. Martin, C. Taylor, and A. Terzuoli, "Geolocation of Fast-Moving Objects from Satellite-Based Angle-of-Arrival Measurements," IEEE J. Sel. Topics Appl. Earth Observ. Remote Sens., vol. 8, no. 7, pp. 3396-3403, 2015.
- [6] C. Wang, W. Wang, and Z. Chen, "Single-Satellite Positioning Algorithm Based on Direction-Finding," 2017 Prog. In Electromagn. Res. Symp. Spring (PIERS), St. Petersburg, pp. 2533-2538, 2017.
- [7] N. H. Nguyen and K. Doğançay, "Algebraic Solution for Stationary Emitter Geolocation by a LEO Satellite Using Doppler Frequency Measurements," 2016 IEEE Inter. Conf. Acous., Speech and Sig. Proc. (ICASSP), Shanghai, pp. 3341-3345, 2016.
- [8] Y. Zhu and S. Zhang, "Passive Location Based on an Accurate Doppler Measurement by Single Satellite," 2017 IEEE Radar Conf. (RadarConf), Seattle, WA, pp. 1424-1427, 2017.
- [9] L. Pan and H. Li, "Single Satellite Doppler Frequency Measurement and Location Technology Based on WGS-84 Ellipsoid Earth Model," Shipboard electron. countermeasure,



شکل (۶): کانتور RCRLB روش مکان‌یابی LOS ناشی از خطا بردار وضعی



شکل (۷): کانتور RMSE روش مکان‌یابی LOS ناشی از خطا بردار وضعیت.



شکل (۸): کانتور RCRLB روش مکان‌یابی LOS ناشی از خطا بردار وضعیت.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما به بررسی اثر خطای زوایای اوپلر بر عملکرد روش مکان‌یابی LOS با یک ماهواره LEO پرداختیم. ابتدا، روش مکان‌یابی LOS را با یک ماهواره LEO با جزئیات بیان کردیم و

- Mobile Tracking with Nonlinear Filtering Algorithms in Wireless Sensor Networks," *IEEE Syst.*, vol. 8, no. 1, pp. 160-170, Mar. 2014.
- [16] L. Badriasl and K. Dogancay, "Three-Dimensional Target Motion Analysis Using Azimuth/Elevation Angles," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 50, no. 4, pp. 3178-3194, Oct. 2014.
- [17] Z. Wang, J. A. Luo, and X. P. Zhang, "A Novel Location-Penalized Maximum Likelihood Estimator for Bearing-Only Target Localization," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 12, pp. 6166-6181, 2012.
- [18] Z. Duan and Q. Zhou, "CRLB-Weighted Intersection Method for Target Localization Using AOA Measurements," in *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Intell. Virtual Environ. Meas. Syst. Appl. (CIVEMSA)*, pp. 1-6, 2015.
- [19] A. Dersan and Y. Tanik, "Passive Radar Localization by Time Difference of Arrival," *MILCOM 2002. Proc.*, Anaheim, CA, USA, vol. 2, pp. 1251-1257, 2002.
- [20] S. M. Kay, "Fundamentals of Statistical Signal Processing. Prentice Hall PTR," 1993.
- vol. 36, pp. 17-21, 2013.
- [10] M. Zhang, D. Feng, and F. Guo, "Passive Localization by a Single Satellite Based on Doppler Rate-of-Change," *Space electron. countermeasures*, vol. 25, pp. 11-13, 2009.
- [11] Y. Xu, "New Techniques for Single Satellite Passive Localization Based on Doppler Information," *National Univ. of defense tech. thesis of the degree of master*, vol. 100, pp. 105-110, 2009.
- [12] K. Liang, Z. Huang, and J. He, "A Passive Localization Method of Single Satellite Using TOA Sequence," *2016 2nd IEEE Inter. Conf. Comp. and Commun. (ICCC)*, Chengdu, 2016, pp. 1795-1798.
- [13] Y. Norouzi, E. S. Kashani, A. Ajorloo, "Angle of arrival-based target localisation with low Earth orbit satellite observer", *IET Radar Sonar and Navig.*, vol. 10, no. 7, pp. 1186-1190, Aug. 2016.
- [14] Y. Wang and K. C. Ho, "An Asymptotically Efficient Estimator in Closed-Form for 3-D AOA Localization Using a Sensor Network," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 14, no. 12, pp. 6524-6535, 2015.
- [15] D. C. Chang and M. W. Fang, "Bearing-Only Maneuvering

پیوست الف: تعیین ماتریس‌های ژاکوبین J_1 و J_2

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial P} = \mathbf{R}_x(R) \frac{\partial \mathbf{R}_y(P)}{\partial P} \mathbf{R}_z(Y) \mathbf{R}_{rg} \mathbf{R}_y(-B_s) \mathbf{R}_z(L_s) \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_y(P)}{\partial P} = \begin{bmatrix} -\sin(P) & 0 & -\cos(P) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(P) & 0 & -\sin(P) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial R} = \frac{\partial \mathbf{R}_x(R)}{\partial R} \mathbf{R}_y(P) \mathbf{R}_z(Y) \mathbf{R}_{rg} \mathbf{R}_y(-B_s) \mathbf{R}_z(L_s) \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_x(R)}{\partial R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(P) & \cos(P) \\ 0 & -\cos(P) & -\sin(P) \end{bmatrix}$$

برای به‌دست آوردن ماتریس ژاکوبین J_2 داریم:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{t,e}}{\partial B} & \frac{\partial x_{t,e}}{\partial L} & \frac{\partial x_{t,e}}{\partial H} \\ \frac{\partial y_{t,e}}{\partial B} & \frac{\partial y_{t,e}}{\partial L} & \frac{\partial y_{t,e}}{\partial H} \\ \frac{\partial z_{t,e}}{\partial B} & \frac{\partial z_{t,e}}{\partial L} & \frac{\partial z_{t,e}}{\partial H} \end{bmatrix} \quad (29)$$

که در آن

$$\frac{\partial x_{t,e}}{\partial B} = -(N_t + H_t) \sin(B_t) \cos(L_t) + \frac{\partial N_t}{\partial B} \cos(B_t) \cos(L_t)$$

$$\frac{\partial y_{t,e}}{\partial B} = -(N_t + H_t) \sin(B_t) \sin(L_t) + \frac{\partial N_t}{\partial B} \cos(B_t) \sin(L_t)$$

$$\frac{\partial z_{t,e}}{\partial B} = (N_t(1 - e^2) + H_t) \cos(B_t) + \frac{\partial N_t}{\partial B} (1 - e^2) \sin(L_t)$$

$$\frac{\partial N_t}{\partial B} = \frac{ae^2 \sin(B_t) \cos(B_t)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2(B_t))^3}}$$

$$\frac{\partial x_{t,e}}{\partial L} = -(N_t + H_t) \cos(B_t) \sin(L_t)$$

$$\frac{\partial y_{t,e}}{\partial L} = (N_t + H_t) \cos(B_t) \cos(L_t)$$

$$\frac{\partial z_{t,e}}{\partial L} = 0$$

برای به‌دست آوردن ماتریس ژاکوبین J_1 ، از تئوری تابع معکوس^۱

بهره می‌گیریم. براساس این تئوری داریم، $\mathbf{J}_1 = \frac{\partial \mathbf{b}_{YPR}}{\partial \mathbf{x}_{t,e}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}_{t,e}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}} \right)^{-1}$

با توجه به این که تعیین مستقیم ماتریس ژاکوبین J_1 کار مشکلی

است، ما ابتدا ماتریس $\frac{\partial \mathbf{x}_{t,e}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}}$ را به‌دست می‌آوریم و سپس از آن

معکوس می‌گیریم تا ماتریس ژاکوبین J_1 تعیین شود. برای

به‌دست آوردن ماتریس $\frac{\partial \mathbf{x}_{t,e}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}}$ ، از رابطه (۸) مشتق می‌گیریم که

داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{t,e}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}} = \frac{\partial (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_{t,b})}{\partial \mathbf{b}_{YPR}} \quad (24)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}} \mathbf{x}_{t,b} = -\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_{t,b}$$

لازم به ذکر است که در رابطه بالا از عبارت:

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}} = -\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}} \mathbf{M}^{-1}$$

استفاده شده‌است. در نتیجه، داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{t,e}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}} = \begin{bmatrix} \underbrace{-\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial Y} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_{t,b}}_{3 \times 1} & \underbrace{-\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial P} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_{t,b}}_{3 \times 1} & \underbrace{-\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial R} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_{t,b}}_{3 \times 1} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (25)$$

علت بیان به فرم بالا و عدم محاسبه مستقیم $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}}$ ، این است

که مشتق گرفتن برداری از ماتریس \mathbf{M} باعث می‌شود که یک بعد

به نتیجه حاصله افزوده شود؛ یعنی حاصل عبارت $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}_{YPR}}$ یک

ماتریس سه بعدی $3 \times 3 \times 3$ است که نمایش آن سخت است.

بنابراین، حال باید مقادیر $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial Y}$ ، $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial P}$ و $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial R}$ را محاسبه نماییم.

با بهره‌گیری از رابطه (۳)، داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial Y} = \mathbf{R}_x(R) \mathbf{R}_y(P) \frac{\partial \mathbf{R}_z(Y)}{\partial Y} \mathbf{R}_{rg} \mathbf{R}_y(-B_s) \mathbf{R}_z(L_s) \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_z(Y)}{\partial Y} = \begin{bmatrix} -\sin(Y) & \cos(Y) & 0 \\ -\cos(Y) & -\sin(Y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¹ Inverse Function Theorem