

علمی - پژوهشی

## تحلیل پارامتریک خیز تیرهای بتن مسلح تحت بار انفجار

سید احمد حسینی<sup>۱\*</sup>، محمدحسن نجفی الموتی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، ۲- کارشناس، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

(دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۲۸، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۱/۲۰)

### چکیده

جهت رفع طولانی شدن فرایند تحلیل و طراحی سازه‌های بتنی در برابر بار انفجار و ارائه یک روش سهل الوصول و مستقیم برای محاسبه پاسخ تیرهای بتنی در برابر این بارها، از روش تحلیل دینامیکی یک درجه آزادی برای تحلیل این نوع سازه و محاسبه خیز آن استفاده شده است. بارگذاری انفجار به صورت نمایی و رفتار سازه بتنی به صورت کشسان خمیری معادل به کاررفته است. سپس با استفاده از دو پارامتر مدت زمان تداوم بارگذاری و زمان رسیدن به انتهای ناحیه کشسان جهت تعیین محدوده پاسخها، حالت‌های مختلفی برای محاسبه معادله پاسخ و تعیین خیز حداکثر تیر بتنی در نظر گرفته شده است. با تحلیل تئوریک SDOF معادلات حرکت محدوده‌های مشخص شده، در نهایت پاسخ‌های پارامتریک تیرهای بتنی در برابر بار انفجار به دست آمد. با مقایسه خروجی این روابط با نتایج تست‌های آزمایشگاهی، مدل اجزا محدود و روابط دستورالعمل UFC 3-340-02، از دقت روش پیشنهادی اطمینان حاصل شده است. با انجام تحلیل‌های مختلف در شرایط مختلف بارگذاری و خصوصیات مختلف سازه‌ای، مشخص شد که دقت روش پیشنهادی در محاسبه خیز تیرها، بالای ۹۰٪ است.

**کلیدواژه‌ها:** تیر، بتن مسلح، انفجار، خیز، تحلیل یک درجه آزادی، UFC 3-340-02

## Parametric Analysis of Reinforced Concrete Beams Under Blast Load

S. A. Hosseini\*, M. H. Najafi Almoti

Malek Ashtar University of Technology- Iran

(Received: 2022/12/19; Accepted: 2023/04/09)

### Abstract

In order to resolve long analysis and designing process and providing an easy and accessible method for calculating the response of concrete beams to explosion load, the dynamic analysis method for one degree of freedom system has been used to analyze this type of structure and its deflection. The explosive load is used exponentially and the behavior of the concrete structure is considered as elasto-plastic equivalent. Then, using two parameters of load duration and time to reach the end of the elastic region to determine the range of responses, different modes have been considered to calculate the response equation and determine the maximum deflection of the concrete beam by theoretical analysis of SDOF equations of motion for the specified ranges, and finally the parametric responses of concrete beams to the explosion load were obtained. By comparing the output of these relationships with the results of laboratory tests, the finite element model and the relationships of the UFC 3-340-02, the accuracy of the proposed method is ensured. By performing different analysis under different loading condition and different structural properties, it was found that the accuracy of the proposed method is above 90%.

**Keywords:** Beam, Reinforced Concrete, Blast, Deflection, Single Degree of Freedom, UFC 3-340-02.

## ۱. مقدمه

یک سیستم یک درجه آزادی که جزء ذاتی این روش هستند جواب‌های رضایت‌بخشی می‌دهند.

در دهه پنجاه، اطلاعات در این حوزه گسترش پیدا کرد و مدل کشسان - خمیری، مدنظر قرار گرفت. در یکی از اولین کارها سیلر و همکاران [۷] یک تیر با تکیه‌گاه ساده تحت بارگذاری آبی را به‌وسیله سیستم یک درجه آزادی مدل کردند. آن‌ها سرعت ابتدایی را به‌صورت نصف یک موج سینوسی در نظر گرفتند.

در ادامه بروک و نیو مارک [۸] مسائل سازه‌ای، دینامیکی زیادی را مورد تحقیق قرار دادند. نیو مارک یکی از حامیان سرسخت روش مودال بود که توانست چندین رابطه را در حوزه مقاومت و سختی ارائه کند. یانگ و لاک [۹] بر روی اعضای بتنی پژوهش‌هایی را انجام دادند و توانستند با روش یک درجه آزادی مقاومت دینامیکی اعضای بتنی را که شامل اثرات نرخ کرنش بود را به دست آورند. رانگ و لی [۱۰] یک مطالعه آماری روی تیرهای بتن مسلح تحت بار انفجار انجام دادند؛ در این مطالعه پاسخ‌ها با روش یک درجه آزادی غیرخطی و روش المان محدود مقایسه شد که نتایج تقارب خوبی را با هم‌نشان داد.

سیمونز [۱۱] با مطالعه بر روی خیز تیرهای تحت ضربه شدید این نکته را دریافتند که پاسخ‌های حداکثر وابسته به ضربه کل و حداکثر فشار است. کارتا و استچینو [۱۲] در پژوهشی روش‌های نظری برای پیش‌بینی شکست خمشی تیرهای بتن مسلح تحت بارگذاری انفجاری اقدام کردند. ایشان در این مقاله دو روش برای مطالعه تیرهای بتن مسلح تحت بار انفجار ارائه کردند. در روش اول تیر از طریق نظریه اولر - برنولی مدل می‌شود و در روش دوم، تیر به‌صورت سیستم یک درجه آزادی معادل‌سازی شده است. آن‌ها در این مقاله روش‌های تعیین‌شده را با نتایج آزمایشگاهی دیگر مقاله‌ها و نیز نرم‌افزار اجزای محدود مقایسه کردند که نتایج حاکی از آن بود که روش اول به‌خوبی قادر است میزان خیز حداکثر در زمان خرابی تیر را پیش‌بینی کند؛ از طرفی روش دوم دارای محاسبات ساده‌تر و کاربردی‌تر است.

استچینو [۱۳] با استفاده از نتایج آزمایشگاهی دیگر محققان، تیرهای بتن مسلح را با روش المان محدود مدل‌سازی و تحلیل حساسیت نموده و تأکید کردند لاغری، حداکثر بار و طول عضو مهم‌ترین پارامترهای تأثیرگذار بر رفتار تیرها بوده و مقاومت بتن و نسبت آرماتور تأثیر چندانی بر این رفتار ندارد. مطالعات زیادی در حوزه آزمایشگاهی [۱۴-۱۷] و شبیه‌سازی [۱۸-۲۰] انجام شده است. باوجود کارهای زیادی که در این حوزه انجام شده به‌خصوص در دستورالعمل UFC-3-340-02 [۲۱] برای خیز تیرهای بتنی رابطه مشخصی وجود ندارد و تنها خیز حداکثر آن را می‌توان از نمودارهای مربوطه به دست آورد. در این مقاله سعی شده است که با استفاده از روش تحلیل دینامیکی یک درجه آزادی غیرخطی روندی برای معادله خیز تیر در هر زمان تعیین شود.

بعضی از سازه‌ها نیاز به طراحی تحت بار انفجار دارند که در صورت عدم طراحی تحت این بارها دچار خسارت زیادی خواهند شد که از آن جمله می‌توان به ساختمان‌های مهم دولتی، تأسیسات حساس پتروشیمی و نظامی اشاره کرد. به همین علت برای چنین سازه‌هایی مطلوب است روش‌های طراحی ارائه گردد تا سازه‌ها به مقاومت لازم برای مقابله با چنین بارهایی برسند. با درنظرگرفتن مطالب اخیر می‌توان به اهمیت طراحی سازه در برابر انفجار پی برد. سازه‌های بتن مسلح از پرکاربردترین سازه‌های مقاوم در برابر انفجار می‌باشند. رفتار بتن مسلح در بارگذاری انفجاری، پیچیده و غیرخطی است.

اگرچه رفتار تیر بتن مسلح در بارهای بسیار کم، خطی و کشسان است؛ اما با افزایش بار، ترک‌های خمشی در محل لنگر خمشی حداکثر و در وجه کششی ظاهر شده و باعث کاهش سختی تیر می‌شود. سرانجام میل‌گردهای کششی تسلیم و منحنی بار - تغییر مکان تیر تقریباً افقی خواهد شد. این نوع گسیختگی به گسیختگی خمشی معروف است و معمولاً گسیختگی نرمی بوده و با تغییر شکل نسبتاً زیاد همراه است. برحسب مقدار ماده منفجره و فاصله آن، نوع سازه بتنی، وضعیت تکیه‌گاه‌ها، چگونگی، نسبت تسلیم و... پاسخ این سازه‌ها در برابر انفجار متفاوت خواهد بود. باتوجه‌به موارد فوق و روند طولانی تحلیل و طراحی سازه‌های بتنی در برابر بار انفجار، تعیین و تخمین میزان تأثیر هر یک از پارامترهای مؤثر در برآورد پاسخ انفجاری این سازه‌ها امری دشوار و ناملموس است. جهت رفع این مشکل و ارائه یک روش سهل-الوصول و مستقیم برای محاسبه پاسخ تیرهای بتنی در برابر بار انفجار، از روش تحلیل دینامیکی یک درجه آزادی برای تحلیل این سازه و محاسبه خیز آن استفاده شده است.

روش تحلیل دینامیکی یک درجه آزادی ابتدا در سال ۱۹۴۶ در دستورالعمل US EM 1110-345-405 ارائه شد و سپس در سال ۱۹۶۵ در دستورالعمل TM5-855-1 بازنگری شد [۱]. این روش برای تمام اعضای ساختمانی مانند شیشه‌ها [۲]، سازه‌های بنایی [۳] و دال‌ها [۴] وجود دارد. این روش در کتاب بیگ که یک نقطه عطف برای حل این نوع مسائل است، مطرح شده است. بیگ [۵] با استفاده از روش عددی «شتاب متوسط» طیفی از پاسخ‌ها را با درنظرگرفتن نمودار فشار - زمان به‌صورت مثلثی به دست آورد. واتسون [۶] در کتابش با تأیید روش بیگ بیان کرد که پاسخ صحیح با دانستن شکل صحیح نمودار فشار - زمان رابطه مستقیم دارد. بااین‌حال او همچون بیگ از شکل مثلثی و رفتار کشسان خمیری مواد استفاده کرد. این روش و این فرض با تمام عدم‌قطعیت‌ها مانند مدل‌سازی مواد جایگزینی سازه واقعی با

### ○ روش‌های عددی

در این روش، انتگرال‌گیری از زمان صفر اعمال می‌گردد؛ بدین صورت که زمان به چند بازه مجزا تقسیم می‌شود و در هر بازه با برون‌یابی، پاسخ محاسبه می‌گردد.

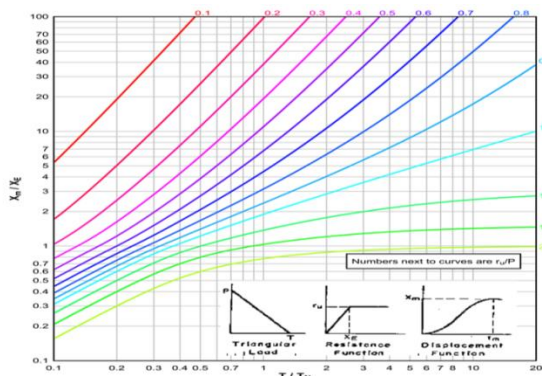
### ○ روش‌های مبتنی بر تکانش (ضربه)

در این روش بنا به تکانش پاسخ‌ها محاسبه می‌شود و خیز برای اعضای یک‌طرفه که فاقد ناحیه مقاومت پس از نهایی هستند از رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$\frac{i_b^2}{2m_u} = r_u X_m \quad (1)$$

### ○ نمودارهای طراحی برای بارگذاری ایدئال

مطابق دستورالعمل طراحی سازه‌ها تحت انفجارات تصادفی، UFC 3-340-02، پاسخ خمیری حداکثر یک سیستم کشسان خمیری تحت بار انفجار با میزان تغییر شکل حداکثر  $x_m$  و زمان رسیدن به این تغییرشکل یعنی  $t_m$  بیان می‌شود. بار انفجار با مقدار حداکثر آن  $P$  و مدت تداوم  $T$  تعریف می‌گردد. یک سیستم یک‌درجه آزادی معادل نیز با مقاومت نهایی  $r_u$  خیز الاستیک  $x_E$  و پیروید طبیعی  $T_N$  معرفی می‌شود. نمودارهای پاسخ بی‌بعد با ترسیم نسبت شکل‌پذیری  $\frac{x_m}{x_E}$  به‌عنوان تابعی از  $\frac{T}{T_N}$  و  $\frac{r_u}{P}$  تشکیل می‌شود. نمودار پاسخ برای بار مثلی انفجاری، در شکل (۲) ارائه شده است (نمودار ۳-۵۴ دستورالعمل UFC 3-340-02) [۲۱].



شکل ۲. پاسخ حداکثر سیستم کشسان خمیری یک درجه آزادی تحت بار مثلی [۲۱]

### ۲. روش تحقیق

منحنی نیرو - تغییر مکان برای تسریع در انجام محاسبات معمولاً به‌صورت ایدئال فرض می‌شود که اجازه می‌دهد تعیین پاسخ سیستم یک درجه آزادی غیر خطی به روش‌های کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل امکان‌پذیر باشد و با به دست آوردن تابع مناسب بار انفجار، رفتار سازه و حل معادلات دیفرانسیل متناظر آن‌ها، می‌توان پاسخ مناسبی برای تغییر شکل سازه در نظر گرفت.

### تحلیل دینامیکی غیرخطی: در تحلیل دینامیکی سیستم‌های

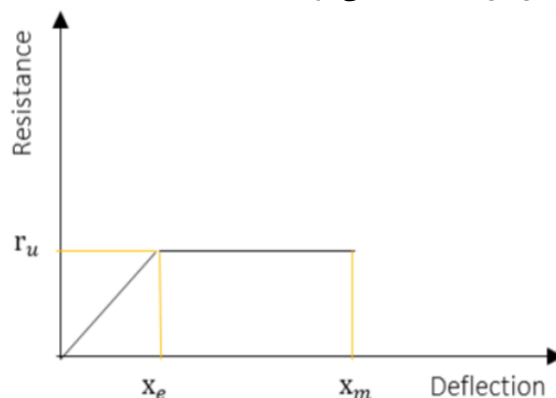
یک درجه آزادی خطی فرض بر این است که:

- دامنه تغییر مکان در مقایسه با ابعاد سازه بسیار کوچک است.
- رابطه بین تغییر مکان و نیروی ارتجاعی (نیروی فنری) خطی است.
- رابطه بین میرایی و سرعت خطی است.
- جرم سیستم نسبت به زمان تغییر نمی‌کند (ثابت می‌ماند).

هرگاه برای یک سیستم یک درجه آزادی یکی از فرضیات فوق صدق نکند، رفتار سیستم را غیرخطی می‌گویند؛ بنابراین غیرخطی بودن رفتار سیستم می‌تواند به دلایل مختلفی صورت گیرد. در این تحقیق، رفتار غیرخطی از بعد مصالح [۲۲] مورد توجه قرار گرفته است.

### تحلیل دینامیکی غیرخطی از بعد مصالح: هرگاه تنش

ایجادشده در مصالح از تنش تسلیم بیشتر شود؛ در تحلیل دینامیکی سیستم باید رفتار غیرخطی را برای مصالح در نظر گرفت. در تحلیل دینامیکی سیستم‌های یک درجه آزادی غیرخطی مصالح، برای سهولت در انجام محاسبات، اغلب منحنی نیرو - تغییر مکان به‌صورت ایدئال فرض می‌شود و به آن رفتار کشسان - خمیری کامل گفته می‌شود. در شکل (۱) نمودار ایده‌آل‌سازی شده دیده می‌شود.



شکل ۱. رفتار کشسان خمیری کامل تیر بتنی

که در آن  $r_u$  مقاومت نهایی عضو،  $x_E$  خیز قسمت الاستیک معادل و  $x_m$  خیز حداکثر است.

### روش‌های تحلیل دینامیکی: تحلیل دینامیکی را می‌توان با سه

روش زیر حل نمود [۲۳]:

- روش‌های عددی
- روش‌های مبتنی بر ضربه
- نمودارهای طراحی برای بارگذاری‌های ایدئال

## ۱-۲. معادله موج انفجار

هنگام وقوع انفجار و با در نظر گرفتن شرایط ایدئال فشار یک نقطه در چند میلی‌ثانیه به حداکثر مقدار خود می‌رسد و سپس با یک نرخ نمایی کاهش می‌یابد تا به فشار محیط و گاهی اوقات به فشار کمتر از محیط (مکش) برسد [۲۴].

کاهش نمایی نمودار فشار - زمان معمولاً با معادله فریدلندر نمایش داده می‌شود. این معادله را می‌توان به صورت رابطه (۲) ارائه نمود.

$$p = p_r \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{b \cdot t}{t_d}} \quad (2)$$

این موج انفجار گاهی اوقات با تکانش مثبت شناخته می‌شود که مربوط به سطح زیر نمودار فشار - زمان است.

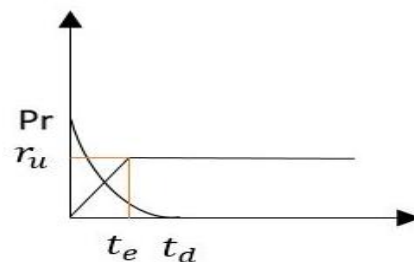
$$ir = \int_0^{t_d} p_r(t) dt = p_r t_d \left[ \frac{1}{b} - \frac{(1 - e^{-b})}{b^2} \right] \quad (3)$$

ضریب  $b$  یک پارامتر بدون بعد است و نرخ کاهشی فشار را بیان می‌کند. مقدار این ضریب بر اساس فشار رویداد یا فشار بازتابی متفاوت است.

## ۲-۲. به‌دست آوردن معادلات

با به‌دست آوردن تابع انفجار، می‌توان معادلات خیز مربوط به تیر بتن مسلح را به دست آورد. رفتار سازه به‌صورت کشسان خمیری و تابع بارگذاری به‌صورت نمایی خواهد بود. مرز این دو حالت، زمان  $t_d$  و  $t_e$  است؛ بنابراین برای به دست آوردن معادلات، این دو پارامتر مقایسه خواهند شد؛ لذا دو حالت وجود دارد:

الف) حالت  $t_e < t_d$ : مدت‌زمان بارگذاری، بیشتر از مدت‌زمان رسیدن به انتهای محدوده کشسان است (شکل ۳).

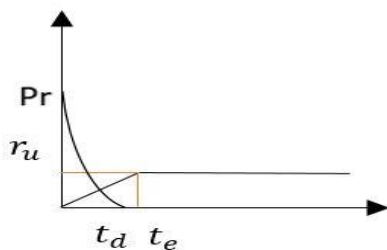
شکل ۳. رفتار سازه وقتی  $t_e < t_d$ 

در حالت  $t_e < t_d$  با توجه به شکل (۳)، پاسخ تیر در یکی از حالت‌های زیر اتفاق خواهد افتاد:

$$\begin{cases} 1) M\ddot{U} + KU = P_r \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-b \cdot t/t_d} \rightarrow t_m < t_e < t_d & (4) \\ 2) M\ddot{U} + R = P_r \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-b \cdot t/t_d} \rightarrow t_e < t_m < t_d & (5) \\ 3) M\ddot{U} + R = 0 \rightarrow t_e < t_d < t_m & (6) \end{cases}$$

در معادله (۴)، سازه تحت بارگذاری و رفتار آن در محدوده کشسان قرار دارد؛ در معادله (۵)، همچنان تحت بارگذاری قرار دارد و رفتار سازه از محدوده کشسان خارج شده و وارد مرحله خمیری شده است؛ در معادله (۶)، بارگذاری تمام‌شده و سازه وارد مرحله ارتعاش آزاد می‌شود و در مرحله خمیری قرار دارد.

ب) حالت  $t_d < t_e$ : مدت‌زمان بارگذاری، کمتر از مدت‌زمان رسیدن به انتهای محدوده کشسان است (شکل ۴).

شکل ۴. رفتار سازه وقتی  $t_d < t_e$ 

در حالت  $t_d < t_e$  با توجه به شکل (۴)، پاسخ تیر در یکی از حالت‌های زیر اتفاق خواهد افتاد:

$$\begin{cases} 1) M\ddot{U} + KU = P_r \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-b \cdot t/t_d} \rightarrow t_m < t_d < t_e & (7) \\ 2) M\ddot{U} + KU = 0 \rightarrow t_d < t_m < t_e & (8) \\ 3) M\ddot{U} + R = 0 \rightarrow t_d < t_e < t_m & (9) \end{cases}$$

در معادله (۷)، سازه تحت بارگذاری و رفتار آن در محدوده کشسان قرار دارد؛ در معادله (۸)، سازه تحت بارگذاری قرار ندارد (وارد مرحله ارتعاش آزاد شده است) و رفتار سازه در محدوده کشسان است؛ در معادله (۹)، مشابه معادله (۸)، سازه در مرحله ارتعاش آزاد بوده و رفتار سازه در مرحله خمیری است.

## ۲-۲-۱. حل معادلات به‌دست آمده

شرایط مرزی برای حل معادلات دیفرانسیل حرکت مذکور در بخش قبلی، در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱. جدول اعمال شرایط مرزی برای هر معادله

حالت $t_d < t_e$		حالت $t_e < t_d$	
شرایط مرزی	معادله	شرایط مرزی	معادله
$y_1(0) = 0$ $\dot{y}_1(0) = 0$	۷	$y_1(0) = 0$ $\dot{y}_1(0) = 0$	۴
$y_2(t_d) = y_1(t_d)$ $\dot{y}_2(t_d) = \dot{y}_1(t_d)$	۸	$y_2(t_e) = y_1(t_e)$ $\dot{y}_2(t_e) = \dot{y}_1(t_e)$	۵
$y_2(t_e) = y_3(t_e)$ $\dot{y}_2(t_e) = \dot{y}_3(t_e)$	۹	$y_2(t_d) = y_3(t_d)$ $\dot{y}_2(t_d) = \dot{y}_3(t_d)$	۶

پاسخ معادلات (۴) و (۷) به‌صورت زیر است:

الف) جواب عمومی

$$y_{c1} = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (10)$$

$$\rightarrow \dot{U}=0 \Rightarrow \frac{I}{m} - \frac{R}{m}t = 0 \Rightarrow t_m = I/R$$

$$X_m = \frac{I^2}{mR} - \frac{I^2}{2mR} \Rightarrow X_m = \frac{I^2}{2mR_u} \quad (25)$$

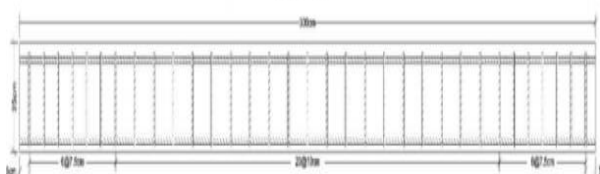
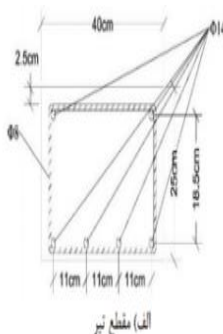
همان گونه که مشخص است تغییر مکان حداکثر رابطه (۲۴)، همان رابطه (۱) خواهد شد.

### ۳-۲. صحت‌سنجی

صحت‌سنجی روابط در دو بخش صحت‌سنجی با تحقیقات تجربی و مدل اجزای محدود بررسی شده است.

#### ۲-۳-۱. صحت‌سنجی با مطالعات تجربی

**الف) مطالعات ایزدی فرد و همکاران [۲۵]:** در این تحقیق، نتایج حاصل از آزمایش انفجار بر روی تعدادی از تیرهای بتن مسلح ارائه شده است. در این آزمایش‌ها، تمامی شرایط سازه‌ای (هندسه، مصالح و...) و فاصله از ماده منفجره یکی بوده و تنها متغیر، میزان وزن ماده منفجره بوده است. برای بررسی رفتار تیر-های بتن مسلح در برابر موج انفجار، تعداد ۱۰ عدد تیر به ترتیب با طول، عرض و ارتفاع ۳۰، ۴۸ و ۲۵ سانتی‌متر از بتن با مقاومت فشاری ۳۵ مگاپاسکال ساخته شده است. برای تسلیح این تیرها، از ۴ عدد میل‌گرد در وجه زیرین و ۲ عدد میل‌گرد در وجه بالایی با قطر ۱۴ میلی‌متر و تنش تسلیم ۴۱۷ مگاپاسکال استفاده شده است. مشخصات مربوطه در شکل (۵) آورده شده است.



**شکل ۵.** نمای طولی و برش تیر بتنی دکتر ایزدی فرد و همکاران [۲۵] با به‌کارگیری روابط پیشنهادی (تابع‌نمایی)، نمودار پاسخ UFC (شکل ۲) و رابطه تکانشی (رابطه ۲)، خیزهای تیر طبق جدول (۲) به دست می‌آید. همان‌طور که از جدول (۲) مشخص است، پاسخ‌های رابطه پیشنهادی به پاسخ نتایج تست آزمایشگاهی نزدیک است و نشان از دقت قابل قبول روابط استخراجی دارد.

(ب) جواب خصوصی:

$$y_p = (At + B)e^{(-b \frac{t}{td})} \quad (11)$$

که در آن

$$A = \frac{-(p_r * td)}{(Mb^2 + Ktd^2)} \quad (12)$$

$$B = \frac{P_r td^2 (Mb^2 - 2Mb + Ktd^2)}{(Mb^2 + Ktd^2)^2} \quad (13)$$

بنابراین، جواب کلی به صورت زیر است.

$$y_1 = y_c + y_p \quad (14)$$

حل معادله (۵) به صورت زیر است:

الف) جواب عمومی

$$y_c = c_1' + c_2't \quad (15)$$

ب) جواب خصوصی اول

$$y_{p1} = (A't + B')e^{(-b \frac{t}{td})} \quad (16)$$

که در آن

$$A' = \frac{-t_d \times P_r}{M \times b^2} \quad (17)$$

$$B' = \frac{(b-2) \times P_r \times t_d^2}{M \times b^3} \quad (18)$$

ج) جواب خصوصی دوم:

$$y_{p2} = \frac{-R_u}{2m} t^2 \quad (19)$$

بنابراین رابطه (۲۰)، پاسخ معادله (۵) خواهد بود:

$$y_2 = y_{p1} + y_{p2} + y_c \quad (20)$$

حل معادله (۶) و (۹) به صورت زیر است:

$$y_3 = c_1'' + c_2''t - \frac{Ru}{2M} t^2 \quad (21)$$

حل معادله (۸) به صورت زیر است:

$$y = c_1' \cos \alpha t + c_2' \sin \alpha t \quad (22)$$

همان‌طور که اشاره شد برای به‌دست‌آوردن ضرایب ثابت از جدول (۱) استفاده می‌شود. در رابطه (۲۱) که مربوط به حالت تکانه‌ای است، می‌توان شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر گرفت [۵]:

$$\dot{U} = \frac{I}{m} \quad (23)$$

چون در زمان بارگذاری سیستم نمی‌تواند تغییر شکل زیادی داشته باشد به همین علت تغییر مکان اولیه صفر خواهد بود؛ بنابراین با اعمال این شرایط مرزی پاسخ رابطه (۲۱) به صورت زیر خواهد شد:

$$y = \frac{I}{m} t - \frac{R_u}{2m} t^2 \quad (24)$$

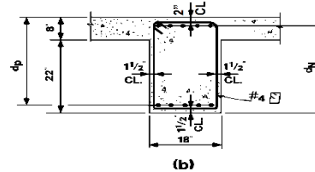
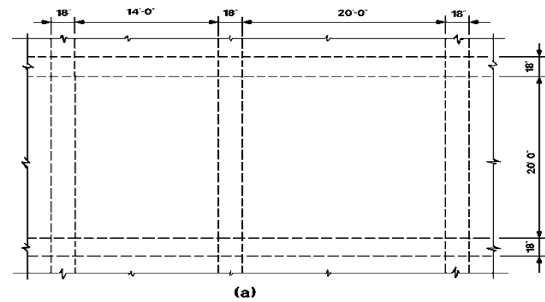
تغییر مکان حداکثر رابطه (۲۴) به صورت زیر خواهد بود:

جدول ۲. مقایسه خیزهای به‌دست‌آمده از روابط مختلف در مقاله ایزدی فرد و همکاران

وزن (kg)	رابطه پیشنهادی	رابطه تکانشی	UFC	مقاله ایزدی فرد و همکاران [۲۵]
۸	۱۹/۴۹	۱۶/۵۱	۱۸/۶۳	۱۶ ۱۹
۱۲	۲۶/۸	۳۰/۷۸	۲۴/۸۴	۳۰ ۳۲
۲۰	۷۰/۵	۶۸/۹	۶۸/۳۱	۶۸ ۷۰
۲۴	۸۱/۵۲	۹۱	۹۳/۱۵	۷۱ ۷۶/۵
۳۴	۱۳۵	۱۴۵/۳	۱۸۶/۳	۱۲۷ ۱۱۸

- اعداد به‌دست‌آمده برحسب میلی‌متر است.  
- در مقاله خیزها برای دو تیر مشابه به‌دست‌آمده است.

ب) مثال ۴-۶ دستورالعمل (UFC3-340-02) [۲۱]: این مثال از دستورالعمل UFC 3-340-02، یک تیر بتنی با مشخصات شکل (۶) را بررسی می‌کند.



شکل ۶. مشخصات تیر بتنی [۲۱]

مشخصات بارگذاری تیر نیز به‌صورت شکل (۷) است.



شکل ۷. مشخصات بارگذاری تیر بتنی [۲۱]

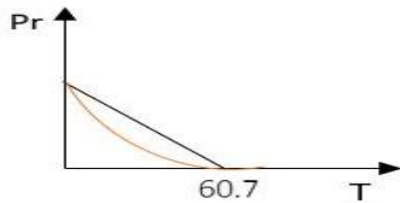
روش دستورالعمل UFC، بر اساس بار مثلثی است و روش پیشنهادی در این تحقیق، بر اساس بار نمایی است. طبق روش UFC و حل انجام شده در این دستورالعمل، میزان خیز حداکثر برابر ۳/۲۸ cm به دست آمده است؛ با تحلیل این تیر به روش پیشنهاد شده در این مقاله داریم:

برای استفاده از رابطه پیشنهادی (تابع‌نمایی) باید مشخصات بارگذاری تغییر کند، به همین علت با برابر قراردادن تکانه حالت مثلثی و نمایی، مدت تداوم حالت نمایی به دست خواهد آمد (شکل ۸):

$$i_{r,exp} = i_{r,tri}$$

$$\frac{p_r * 60.7}{2} = \int_0^{td} p_0 \left(1 - \frac{t}{td}\right) e^{-t/td} dt \quad (26)$$

$$\Rightarrow \frac{60.7}{2} = \int_0^{td} \left(1 - \frac{t}{td}\right) e^{-t/td} dt$$



شکل ۸. مقایسه بارگذاری روش پیشنهادی (تابع‌نمایی) و مثلثی (روش UFC)

معادله فشار - زمان به‌صورت زیر است:

$$p(t) = 1598.4 \left(1 - \frac{t}{82.51}\right) e^{-t/82.51}$$

\*گام اول: حل قسمت کشسان

$$\begin{cases} y_{c1} = c_1 \cos(0.211t) + c_2 \sin(0.211t) \\ y_{p1} = (At + B) e^{-t/td} \end{cases}$$

$$A = \frac{P_0 * td}{M + Ktd^2} = -0.0023$$

$$B = \frac{td^2 (-MP_0 + KP_0td^2)}{(M + Ktd^2)^2} = 0.184$$

جواب خصوصی  $y_p$  و جواب کلی به‌صورت زیر است:

$$y_p = (-0.0023t + 0.184) e^{-t/82.051}$$

$$y_1 = y_p + y_h$$

\*گام دوم: به دست آوردن ضرایب ثابت جواب عمومی

$$y = c_1 \cos(0.211t) + c_2 \sin(0.211t) +$$

$$(-0.0023t + 0.184) e^{-t/82.051}$$

$$\Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -0.184$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0.021$$

معادله حرکت قسمت کشسان به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\Rightarrow y = -0.184 \cos(0.211t) + 0.021 \sin(0.211t) +$$

$$(-0.0023t + 0.184) e^{-t/82.051}$$

\*گام سوم: به دست آوردن زمان خیز کشسان با استفاده از

$x_e$  و معادله بالا

$$x_e = 0.1433 \Rightarrow$$

در این مثال

همان‌طور که ملاحظه شد نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی تطابق قابل قبولی با روش UFC دارد و علت کم‌بودن خیز در روش پیشنهادی، به علت دقت بالای نتایج روش پیشنهادی (به علت استفاده از بارگذاری نمایی بجای بارگذاری مثلثی) نسبت به روش UFC دارد.

### ۲-۲-۳. صحت‌سنجی با استفاده از مدل اجزای محدود

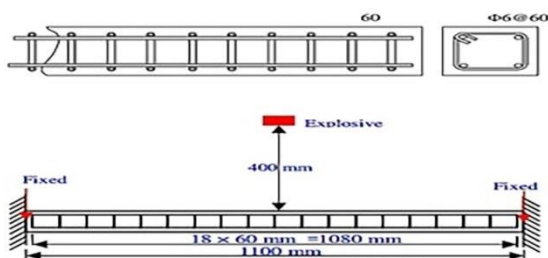
برای اینکه بتوان صحت روابط به‌دست‌آمده را با مدل اجزای محدود بررسی کرد ابتدا لازم است که مدل پیشنهادی اجزای محدود را با مطالعات آزمایشگاهی صحت‌سنجی کرد. برای این منظور، از مطالعات ژانگ و همکاران استفاده شده است [۱۵]. در این تحقیق، با انجام آزمایش بر روی تیرهای کوچک‌مقیاس زیر بار انفجار نزدیک، مود آسیب و میزان آن بررسی شده است. مشخصات تیر بتنی و ماده منفجره مورد مطالعه که تحت مدل‌سازی عددی قرار گرفته است مطابق شکل (۹) و به‌صورت زیر است:

- تیر بتنی به ابعاد  $100 \times 100 \times 1100$  میلی‌متر با مقاومت فشاری  $40 \text{ Mpa}$

- تمامی میل‌گردها D6، با تنش تسلیم  $395 \text{ Mpa}$  و تنش نهایی  $501 \text{ Mpa}$

- وزن ماده منفجره TNT،  $0.51 \text{ kg}$  با شکل کروی و فاصله از تیر  $400 \text{ mm}$

برای شبیه‌سازی این آزمایش، بارگذاری انفجاری به‌صورت کانوپ و رفتار دینامیکی مصالح تیر بتنی تحت مدل CDP انجام شد. برای تحلیل پاسخ تیر بتنی از حلگر دینامیکی صریح استفاده شد. مدل‌سازی بتن با المان شش‌وجهی C3D8R و میل‌گرد فولادی با المان T3D2 انجام شد.



شکل ۹. مشخصات تیر مطالعات ژانگ و همکاران [۱۵]

در شکل (۱۰)، کانتور تغییر شکل تیر مدل‌سازی شده در بحرانی‌ترین زمان نشان داده شده است.

$$0.1433 = -0.184 \cos(0.211t) + 0.021 \sin(0.211t) + (-0.0023t + 0.184)e^{-t/82.051}$$

$$\Rightarrow t_E = 6.59, 6.60$$

چون  $t_e < t_d$  است بنابراین داریم:

**\*گام چهارم: به دست آوردن زمان رسیدن به حداکثر پاسخ در معادله کشسان**

$$y'(t) = 0 \rightarrow t_m = 13.92 \text{ (ms)}$$

چون  $t_e < t_m < t_d$  در نتیجه وارد فاز خمیری می‌شود.

**\*گام پنجم: به دست آوردن سرعت در زمان خیز کشسان**

$$y'(t_E) = ? \quad t_E = 6.60 \quad y'(t_E) \Rightarrow 0.049 \text{ (ms)}$$

**\*گام ششم: قسمت خمیری**

معادله حرکت به‌صورت زیر است:

$$M\ddot{U} + R_u = P_r \left(1 - \frac{t}{td}\right) e^{-t/td}$$

$$M\ddot{U} = P_r \left(1 - \frac{t}{td}\right) e^{-t/td} - R$$

جواب عمومی معادله:

$$y_{e2} = c_1 + c_2 t$$

جواب خصوصی اول

$$y_{p1} = (At + B)e^{-t/td}$$

$$A = \frac{-td * p_r}{M} = \frac{-82.051 * 1598.4}{194638.5} = -0.674$$

$$B = \frac{-P_r * ta^2}{M} = \frac{-1598.4 * (82.05)^2}{194638.5} = -55.29$$

$$y_{p1} = -(0.674t + 55.29)e^{-t/82.051}$$

جواب خصوصی دوم

$$y_{p2} = M\ddot{U} = Ru$$

$$\rightarrow y_{p2} = At^2 \rightarrow A = \frac{-Ru}{2M} = \frac{-1236.79}{2 * 194638.5} = -0.0032$$

**\*گام هفتم: به دست آوردن ضرایب ثابت جواب عمومی**

$$y = c_1 + c_2 t - (0.674t + 55.29)e^{-t/82.051} - (0.0032t^2)$$

$$y' = c_2 - 0.674e^{-t/82.051} +$$

$$\frac{1}{82.051} (0.674t + 55.29)e^{-t/82.051} - 0.0064t$$

$$y'(t_E) = 0.039 \rightarrow t_E = 6.6 \Rightarrow c_2 = 0.0312$$

$$y(t_E) = X_E \rightarrow c_1 = 55.198$$

**\*گام هشتم: معادله حرکت و حداکثر آن**

$$y' = 0 \Rightarrow t = 33.4$$

با بررسی  $t_m$  خواهیم داشت:

$$t_e < t_m < t_d$$

که در بازه فرض شده قرار می‌گیرد. در نتیجه خواهیم داشت:

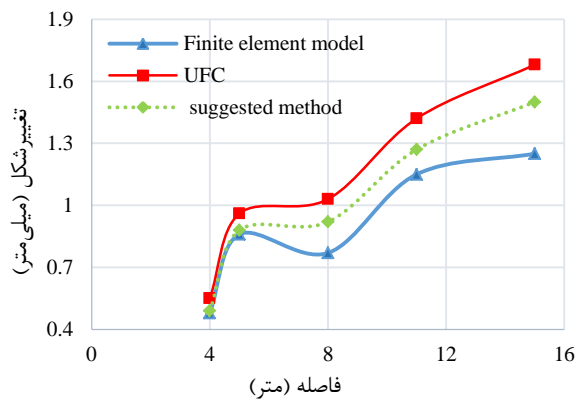
$$t_m = 32.4 \text{ (ms)} \Rightarrow y_{\max} = 2.85 \text{ (Cm)}$$



برای بررسی تأثیرات بارگذاری باید پارامترهایی که در فاصله مقیاس شده ( $Z = \frac{R}{W^{\frac{1}{3}}}$ ) تأثیر دارند را تغییر داد؛ به همین علت فاصله و وزن ماده منفجره در این قسمت تغییر داده می‌شود و مشخصات سازه‌ای ثابت در نظر گرفته خواهد شد. در جدول (۳)، شکل (۱۲) و شکل (۱۳)، خیز حداکثر تیر در فاصله مقیاس شده  $4.78 \frac{m}{kg^{\frac{1}{3}}}$  و  $1.6 \frac{m}{kg^{\frac{1}{3}}}$  برای مقادیر مختلف وزن و فاصله ماده منفجره داده شده است. در این جدول  $R$ ، فاصله به متر و  $W$ ، وزن به کیلوگرم و خیز به دست‌آمده برحسب میلی‌متر است؛ و فاصله مقیاس شده برحسب  $\frac{m}{kg^{\frac{1}{3}}}$  است.

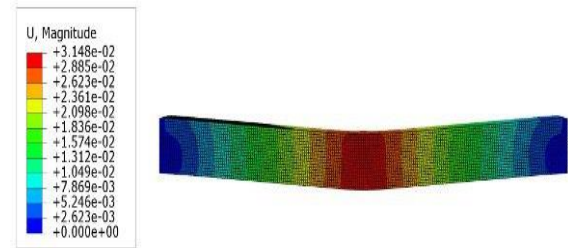
**جدول ۳.** مقایسه خیز حداکثر تیر مورد مطالعه در فاصله‌های مختلف در  $Z = 4.78 \frac{m}{kg^{\frac{1}{3}}}$

خیز تیر (mm)				
R (m)	W (kg)	مدل اجزای محدود	دستورالعمل UFC	روش پیشنهادی (نمایی)
۴	۰/۵۸	۰/۴۸	۰/۵۵	۰/۴۹
۵	۱/۱۴	۰/۸۶	۰/۹۶	۰/۸۸
۸	۴/۶۸	۰/۷۷	۱/۰۳	۰/۹۱
۱۱	۱۲/۱۵	۱/۱۵	۱/۴۲	۱/۲۷
۱۵	۳۰/۸۵	۱/۲۵	۱/۶۸	۱/۵



**شکل ۱۲.** مقایسه خیز حداکثر تیر مورد مطالعه در فاصله‌های مختلف ماده منفجره در  $Z = 4.78 \frac{m}{kg^{\frac{1}{3}}}$

همان‌طور که از شکل‌های (۱۲) و (۱۳) مشخص است، روش پیشنهادی بادقت مناسبی قادر به محاسبه خیز تیر در بارگذاری‌های مختلف است و در اغلب حالات، نتایج روش پیشنهادی دقیق‌تر از نتایج روش UFC و نزدیک به نتایج مدل دقیق اجزای محدود است.



**شکل ۱۰.** کانتور تغییر شکل حداکثر تیر ۳-۳ مقاله ژانگ و همکاران با استفاده از مدل اجزای محدود پیشنهادی

باتوجه به شکل (۱۰)، می‌توان نتیجه گرفت که بیشینه خیز تیر B2-3 در شبیه‌سازی (۳/۱ میلی‌متر) و آزمایش ژانگ و همکاران (که مقدار ۳۵ میلی‌متر گزارش شده است) تطابق قابل قبولی دارد.

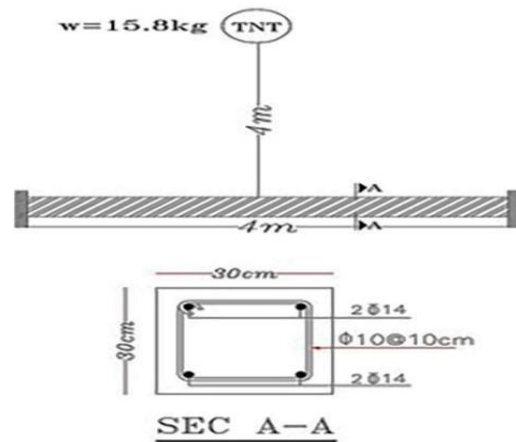
### ۳. نتایج و بحث

برای بررسی بیشتر روابط، ابتدا یک تیر به‌عنوان تیر مینا در نظر گرفته می‌شود و سپس مشخصات سازه‌ای و بارگذاری آن تغییر داده می‌شود. در ادامه، تغییر شکل تیرها با روش‌های مختلف به دست آورده شده و باهم مقایسه خواهند شد.

ابعاد و مشخصات سازه‌ای و بارگذاری تیر مینا در شکل (۱۱) آورده شده است. مقاومت فشاری بتن ۳۸ مگاپاسکال و تنش تسلیم فولاد ۴۰۰ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. تیر بتنی همان‌طور که در شکل (۱۱) مشخص است، دو طرف گیردار است.

تأثیر پارامترهای مختلف روی پاسخ تیر در برابر انفجار، به دو شکل در نظر گرفته شده است:

- تأثیر بارگذاری
- تأثیر مشخصات سازه‌ای



**شکل ۱۱.** ابعاد و مشخصات سازه‌ای و بارگذاری تیر مینا

### ۳-۱. تأثیر بارگذاری‌های مختلف

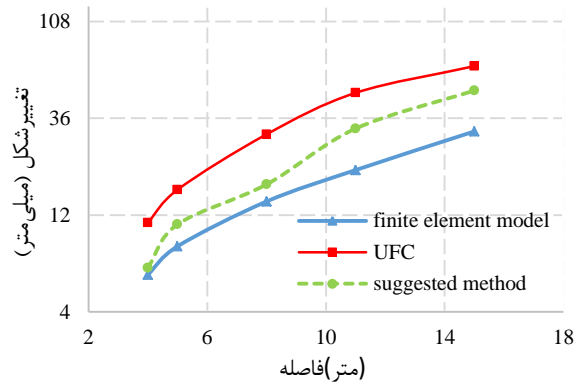


هستند منتها در همه تحلیل‌ها، پاسخ روش پیشنهادی و روش UFC نسبت به روش دقیق محافظه‌کارانه است و می‌توان با اطمینان از هر دو روش برای تحلیل و طراحی استفاده کرد؛ مزیت بعدی این روش نسبت به UFC، جامع بودن آن است؛ این دستورالعمل برای یک محدوده خاص بارگذاری و پاسخ سازه‌ای جوابگو است در صورتی که روش پیشنهادی، برای تمام حالات بارگذاری و پاسخ سازه‌ای امکان ارائه جواب دارد.

#### ۴. نتیجه‌گیری

باتوجه به روند طولانی تحلیل و طراحی سازه‌های بتنی در برابر بار انفجار، تعیین و تخمین میزان تأثیر هر یک از پارامترهای مؤثر در برآورد پاسخ انفجاری این سازه‌ها امری دشوار و ناملموس است. جهت رفع این مشکل و ارائه یک روش سهل‌الوصول و مستقیم برای محاسبه پاسخ تیرهای بتنی به‌عنوان اعضای یک‌طرفه در برابر بار انفجار، در این تحقیق از روش تحلیل دینامیکی یک درجه آزادی برای تحلیل این سازه و محاسبه خیز آن استفاده شد. برای دستیابی به پاسخ‌ها بارگذاری انفجار به‌صورت نمایی و رفتار سازه بتنی به‌صورت کشسان خمیری معادل بکار رفت. سپس با استفاده از دو پارامتر مهم  $t_d$  (مدت‌زمان تداوم بارگذاری) و  $t_e$  (زمان رسیدن به انتهای ناحیه کشسان) جهت تعیین محدوده پاسخ‌ها، ۶ حالت برای محاسبه معادله پاسخ و تعیین خیز حداکثر تیر بتنی در نظر گرفته شد. با تحلیل تئوریک SDOF معادلات حرکت محدوده‌های مشخص‌شده، پاسخ‌های پارامتریک تیرهای بتنی در برابر بار انفجار به دست آمد. به‌منظور اطمینان از صحت این نتایج، با استفاده از تحقیقات آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی و روابط دستورالعمل UFC 3-340-02 صحت‌سنجی انجام شد. صحت‌سنجی عددی با تغییر پارامترهای مؤثر بر خیز تیر در حالت تغییر در بارگذاری و تغییر در مشخصات سازه‌ای بررسی شد. مزیت روش پیشنهادی در این تحقیق نسبت به روش ارائه‌شده در دستورالعمل UFC 3-340-02 شامل موارد ذیل است:

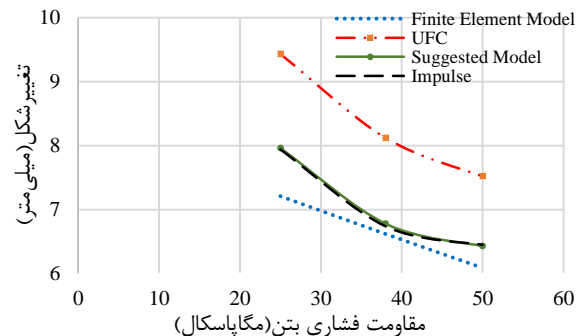
- ۱- معادله حرکت و محدوده پاسخ حداکثر در این روش قابل محاسبه است درحالی‌که در UFC فقط به ارائه گراف‌ها و محاسبه پاسخ حداکثر پرداخته است.
- ۲- این روش برای تمامی محدوده‌های بارگذاری جوابگوست درحالی‌که UFC در محدوده‌های کمتری قابل استفاده است.
- ۳- دقت این روش، به علت استفاده از بار واقعی انفجار و روش حل دقیق‌تر نسبت به UFC، در اغلب حالات بیشتر از UFC است.



شکل ۱۳: مقایسه خیز حداکثر تیر مورد مطالعه در فاصله‌های مختلف ماده منفجره در  $Z = 1.6 \frac{m}{kg^{\frac{1}{3}}}$

#### ۳-۲. تأثیر مشخصات سازه‌ای

برای بررسی تأثیرات مشخصات سازه‌ای، تأثیر مقاومت فشاری بتن در میزان پاسخ‌ها در نظر گرفته شده است. خیز حداکثر تیر بتنی تحت انفجار یکسان و تحت تأثیر مقاومت‌های فشاری مختلف بتن، در شکل (۱۴) ارائه شده است.



شکل ۱۴: مقایسه خیز حداکثر تیر مورد مطالعه در مقادیر مختلف  $f_c$

باتوجه به نمودارهای ارائه‌شده می‌توان نتیجه گرفت روش ارائه‌شده در این تحقیق، در شرایط مختلف بارگذاری و همچنین خصوصیات مختلف سازه‌ای، تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی، پاسخ‌های مربوط به مدل اجزای محدود و دستورالعمل UFC 3-340-02 دارد و از جمله مزیت‌های این روش نسبت به دستورالعمل UFC، دقت بالای آن نسبت به UFC است؛ دقت این روش در اغلب حالات مورد بررسی، بالای ۹۰٪ است در صورتی‌که این عدد برای UFC، حدود ۸۰٪ است.

البته لازم به ذکر است که با توجه به ساده‌سازی انجام‌گرفته (استفاده از نمودار دوخطی برای رفتار کشسان خمیری بتن مسلح بجای استفاده از رفتار دقیق) در حل معادله دینامیکی پاسخ تیر هم در این روش و هم در روش UFC، پاسخ‌ها نسبت به پاسخ دقیق تیر (روش اجزای محدود و آزمایش‌ها)، دارای اختلاف

- [15] Zhang, D.; Yao, S.; Lu, F.; Chen, X.; Lin, G.; Wang, W.; Lin, Y. "Experimental Study on Scaling of RC Beams under Close-in Blast Loading"; *Eng. Failure Anal.* 2013, 33, 497-504. <http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.06.020>.
- [16] Fujikake, K.; Li, B. "Impact Response of Reinforced Concrete Beam and its Analytical Evaluation"; *J. Struct. Eng.* 2009, 135, 938-950. [http://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000039](http://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000039).
- [17] Niklasson, G. "Shear Failure in Reinforced Concrete Beams – An Experimental Investigation"; Swedish National Defense Research, (FOA), 1994.
- [18] Shi, Y.; Hao, H.; Li, Z-X. "Numerical Derivation of Pressure-Impulse Diagrams for Prediction of RC Column Damage to Blast Loads"; *Int. J. Impact. Eng.* 2008, 35, 2-15. <http://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2007.09.001>.
- [19] Zhang, X. H.; Wu, Y. Y.; Wang, J. "Numerical Simulation for Failure Modes of Reinforced Concrete Beams under Blast Loading"; *Adv. Mater. Res.* 2011, 163, 1359-1363. <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.163-167.1359>.
- [20] Park, G. K.; Kwak, H. G. "Numerical Analysis of RC Beam Subjected to Blast Load"; *Int. J. Struct. Civil Eng. Res.* 2016, 5, 26-30.
- [21] "Structures to Resist the Effects of Accidental Explosions"; (UFC 3-340-02); Unified Facilities Criteria UFC 3-340-02, Department of Defense, USA, 2014.
- [22] Asghari, A. "Dynamics of Structures"; Amir Kabir University of Technology, Tehran, 2013.
- [23] "Structures to Resist the Effects of Accidental Explosions"; Unified Facilities Criteria UFC 3-340-02, Technical Deputy of Passive defense Organization Country, Tehran, 2013.
- [24] Karlos, V.; Solomosand, G.; Larcher, M. "Analysis of the Blast Wave Decay Coefficient Using the Kingery-Bulmash Data"; *Int. J. Protective Struct.* 2016, 7, 409-429. <http://doi.org/10.1177/2041419616659572>.
- [25] Izadifard, R. A.; Gholipour, R.; Hajikarimian, H. "Damage Assessment of RC Beams under Blast Loading (Experimental and Numerical Studies)"; *J. Energ. Mater.* 2017, 12, 33-43.

- ۴- روند حل در این روش، یک‌روند کاملاً علمی و مستقیم است؛ در صورتی‌که در UFC، با وجود راحتی حل، روند حل یک‌روند طولانی و بدون امکان نظارت صحیح علمی بر نتایج است.
- ۵- در تمام محدوده‌های بارگذاری و شرایط مختلف سازه‌ای، دقت روش پیشنهادی حدوداً بالای ۹۰٪ است در حالی‌که این دقت برای UFC، ۸۰٪ است.

## ۵. مراجع‌ها

- [1] "Fundamentals of Protective Design"; TM 5-855-1, Department of the Army, USA, 1965.
- [2] Wei, J.; Dharani, L. R. "Fracture Mechanics of Laminated Glass Subjected to Blast Loading"; *Theor Appl Fract Mech.* 2005, 44, 156-157. <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2005.06.004>.
- [3] Mayrhofer, C. "Reinforced Masonry Walls under Blast Loading"; *Int. J. Mech. Sci.* 2002, 44, 67-80. [http://doi.org/10.1016/S0020-7403\(02\)00014-0](http://doi.org/10.1016/S0020-7403(02)00014-0).
- [4] Li, Q. M.; Ye, Z. Q.; Ma, G. W.; Reid, S. R. "Influence of Overall Structural Response on Perforation of Concrete Targets"; *Int. J. Impact. Eng.* 2006, 34, 926-941. <http://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2006.03.005>.
- [5] Biggs, J. M. "Introduction to Structural Dynamics"; McGraw-Hill Book Compan, New York, 1964.
- [6] Watson, A. J. "Dynamic Loading and Design of Structures"; Spon Press, London, New York, 2002.
- [7] Seiler, J. A.; Cotter, B. A.; Symonds, P. S. "Impulsive Loading of Elastic Plastic Beams"; *J. Appl. Mech.* 1956, 23, 515-521. <http://doi.org/10.1115/1.4011393>.
- [8] Brooks, N. B.; Newmark, N. M. "The Response of Simple Structures to Dynamic Load"; Technical Report to ONR Contract N6ori-071(06), Task Order VI Project NR-064-183, University of Illinois Urbana, Illinois, 1953.
- [9] Yang, G.; Lok, T. S. "Analysis of RC Structures Subjected to Air-Blast Loading Accounting for Strain Rate Effect of Steel Reinforcement"; *Int. J. Impact. Eng.* 2007, 34, 1924-1935. <http://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2006.11.009>.
- [10] Rong, H. C.; Li, E. B. "Probabilistic Response Evaluation for RC Flexural Members Subjected to Blast Loadings"; *Struct. Safty* 2007, 29, 146-163. <http://doi.org/10.1016/j.strusafe.2006.03.004>.
- [11] Symonds, P. S. "Dynamic Load Characteristics in plastic Bending of Beams"; *J. Appl. Mech.* 1953, 20, 475-481.
- [12] Carta, G.; Stochino, F. "Theoretical Models to Predict the Flexural Failure of Reinforced Concrete Beams under Blast Loads"; *Eng. Struct.* 2013, 49, 306-315. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.11.008>.
- [13] Stochino, F. "RC Beams under Blast Load: Reliability and Sensitivity Analysis"; *Eng. Failure Anal.* 2016, 66, 544-565. <http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2016.05.003>.
- [14] Magnusson, J.; Hallgren, M.; Ansell, A. "Air Blast-Loaded, High-Strength Concrete Beams. Part I: Experimental Investigation"; *Mag. Concrete Res.* 2010, 62, 127-136. <http://doi.org/10.1680/macr.2008.62.2.127>.