



Thermal Buckling and Postbuckling Analysis of Plates Reinforced with Graphene Platelets Using Differential Quadrature Method

Bahareh Yakhchian¹, Alireza Shaterzadeh^{2*}

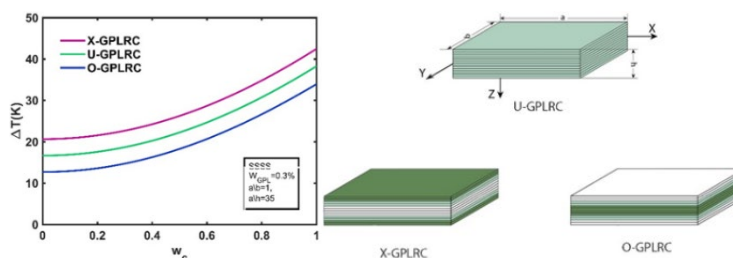
¹ M.Sc., Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

² Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

HIGHLIGHTS

- Analysis of thermal post-buckling of functionally graded plates reinforced with graphene platelets.
- Investigation of buckling behavior of plates with differential quadrature method.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 16 March 2023

Received in revised form: 19 March 2023

Accepted: 15 April 2023

Available online: 19 September 2023

*Correspondence:

a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

How to cite this article:

B. Yakhchian, A. Shaterzadeh. Thermal buckling and postbuckling analysis of plates reinforced with graphene platelets using differential quadrature method. Journal of Aerospace Mechanics. 2023; 19(4):104-117.

Keywords:

Thermal buckling
Differential quadrature method
Graphene platelets
Post buckling
First-order shear deformation theory

ABSTRACT

In this article, the thermal buckling and post-buckling of functionally graded plates with a matrix of isotropic polymer reinforced with graphene platelets (GPLs) have been investigated. In these multilayer plates, the thickness of all layers is the same, and by changing the weight fraction of reinforcing graphene platelets in each layer, the type of layer arrangement of nanocomposite plates changes. The plates are reinforced with three functional graded distributions: X and O and a uniform U distribution. The governing equations of the plate are obtained with the help of the first-order shear deformation theory (FSDT). The thermal buckling behavior of plates has been studied by the differential quadrature method. To find the effective Young's modulus, the Halpin-Tsai modified micromechanical model is used, and the law of mixing is used to obtain the equivalent properties of composites. The results show that the distribution of graphene platelets with an X arrangement improves the resistance of the plate against buckling. Also, the effect of parameters such as the weight fraction of graphene platelets, aspect ratio, and length-to-thickness ratio has been investigated.



تحلیل کمانش و پس‌کمانش حرارتی ورق‌های مستطیلی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی

بهاره یخچیان^۱، علیرضا شاطرزاده^{۲*}

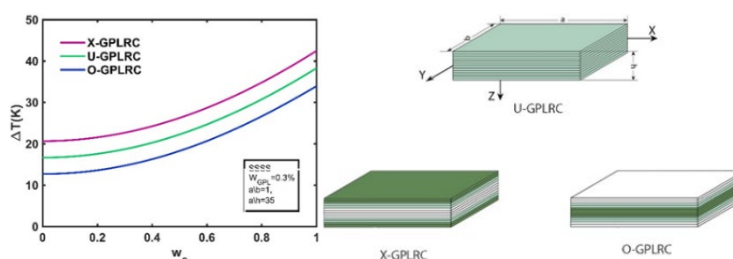
^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

برجسته‌ها

- تحلیل پس‌کمانش حرارتی ورق‌های مدرج تابعی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن
- بررسی رفتار کمانش حرارتی ورق‌ها با روش تربیع دیفرانسیلی

چکیده گرافیکی



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۰۹

بازنگری: ۱۴۰۲/۰۳/۲۲

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۴/۱۹

ارائه برخط: ۱۴۰۲/۰۶/۲۸

*نویسنده مسئول:

a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

کمانش حرارتی

روش تربیع دیفرانسیلی

نانوپلاکت‌های گرافن

پس‌کمانش

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول

چکیده

در این مقاله، کمانش و پس‌کمانش حرارتی ورق‌های مدرج تابعی با ماتریسی از جنس پلیمر ایزوتروپیک و تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن بررسی شده است. در این ورق‌های چندلایه ضخامت تمام لایه‌ها یکسان است و با تغییر کسر وزنی نانوپلاکت‌های گرافن تقویت‌کننده در هر لایه، نوع آرایش لایه‌ای ورق‌های نانوکامپوزیتی تغییر می‌کند. ورق‌ها با سه آرایش مدرج تابعی X و O و آرایش یکنواخت U تقویت شده است. معادلات حاکم بر ورق به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به دست آمده است. رفتار کمانش حرارتی ورق‌ها با روش تربیع دیفرانسیلی مطالعه شده است. به منظور یافتن مدول یانگ مؤثر از مدل میکرومکانیک اصلاح شده هالپین-تسای و برای به دست آوردن خواص معادل کامپوزیت‌ها از قانون اختلاط استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد، توزیع نانوپلاکت‌های گرافن با آرایش به صورت X مقاومت ورق در برابر کمانش را بهبود می‌بخشد. همچنین، تأثیر پارامترهای همچون کسر وزنی نانوپلاکت‌های گرافن، نسبت ابعادی، نسبت طول به ضخامت بررسی شده است.

۱- مقدمه

حرارتی و پس کمانش این نوع سازه‌ها برای کاربردهای مهندسی از اهمیت بالایی برخوردار است.

برای مدل‌سازی کمانش حرارتی این ورق‌ها از معادلات با مشتقات جزئی استفاده می‌شود، با توجه به پیچیدگی این معادلات روش‌های تحلیلی محدودی برای حل آن‌ها وجود دارد، به همین دلیل روش‌های عددی به اصلی‌ترین ابزار در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل شده‌اند. یکی از این روش‌ها، روش تریب دیفرانسیلی^۱ است و با توجه به ویژگی‌هایی مثل سرعت همگرایی بالا، درستی و دقت زیاد جایگزین مناسبی برای روش‌های حل عددی مرسوم است.

در دهه‌های اخیر مطالعات گسترده‌ای روی رفتار حرارتی ورق‌های کامپوزیت مدرج تابعی و بررسی پایداری حرارتی آن‌ها به صورت دویبعی انجام شده است، با این وجود مطالعات محدودی برای بررسی پایداری حرارتی ورق‌ها به صورت سه‌بعی انجام شده است. بابیان ایده اولیه پخش تابعی تقویت‌کننده‌ها در پلیمرها توسط شن^۲ و بور^۳ در سال ۱۹۷۲ [۱]، پژوهش‌ها بر روی کامپوزیت‌های مدرج تابعی آغاز شد و به دنبال آن در سال ۱۹۸۴ [۲]، اولین کامپوزیت مدرج تابعی در آزمایشگاه ملی هوافضا ژاپن ساخته شد. نا^۴ و کیم^۵ [۳] در سال ۲۰۰۴ به بررسی کمانش حرارتی سه‌بعی ورق‌های کامپوزیت مدرج تابعی پرداختند و پایداری حرارتی این ورق‌ها را با خواص مکانیکی وابسته به دما و تحت شرایط مرزی گیردار، به کمک روش مدل المان محدود با ۱۸ گره، تحت تغییرات دما به صورت یکنواخت، خطی و سینوسی در راستای ضخامت مورد بررسی قرار دادند. گاناپاتی^۶ و پراکاش^۷ [۴] کمانش حرارتی ورق‌های مورب مدرج تابعی را به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روش المان محدود با شرایط مرزی ساده مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق خواص مکانیکی به کمک قانون توانی تعیین شده است و تغییرات دما به صورت

نانوپلاکت‌های گرافن به دلیل فراوانی ماده اصلی تشکیل‌دهنده آن‌ها یعنی گرافیت در طبیعت، جایگزین مناسبی برای نانولوله‌های کربنی به منظور تولید نانوکامپوزیت‌های پلیمری محسوب می‌شوند. گرافن، صفحه‌ای از جنس کربن با ضخامت یک اتم است که علاوه داشتن استحکام و مدول برشی بالا، هزینه ساخت پایینی دارد.

در نانوکامپوزیت‌های مرسوم توزیع تقویت‌کننده‌ها به صورت پخش همگن و یا تصادفی صورت می‌گیرد در این مدل خواص مکانیکی تا حدودی بهبود می‌یابند اما مشکلاتی مانند لایه‌لایه شدن و ترک خوردگی اتفاق می‌افتد، پژوهش‌ها نشان می‌دهد استفاده از کامپوزیت‌های مدرج تابعی این مشکلات را تا حدودی کاهش می‌دهد. مواد مدرج تابعی نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی هستند که خواص مواد از یک سطح به سطح دیگر به طور پیوسته، طبق تابعی تعریف شده، تغییر می‌کند. امروزه با توجه به ویژگی‌های مطلوب کامپوزیت‌های مدرج تابعی از قبیل مقاومت در مقابل خوردگی، سایدگی، شکست و همچنین قدرت تحمل درجه حرارت‌های بسیار بالا و اختلاف درجه حرارت شدید، باعث شده کامپوزیت‌های مدرج تابعی در بسیاری از ماشین‌ها و سازه‌هایی که با دمای بالا مواجه هستند مورد استفاده قرار بگیرند.

با توجه به خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی برتر، پلیمرهای تقویت شده با نانوپلاکت‌های گرافنی در مقایسه با پلیمرهای معمولی، از آن‌ها به طور گسترده در صنایع پیشرفته مانند تجهیزات الکترونیکی، دستگاه‌های ذخیره انرژی، حسگرها و کاربردهای زیست پزشکی استفاده می‌شود. علاوه بر این، این مواد پتانسیل‌های زیادی را به عنوان عناصر ساختاری سبک و مقاوم در برابر کمانش در هوانوردی و صنایع فضایی نشان می‌دهد. چنین ساختارهای تقویت شده با نانوپلاکت‌های گرافنی به شکل تیر، صفحه و پوسته، اغلب در طول عمر خود در معرض محیط‌های حرارتی شدید قرار می‌گیرند؛ بنابراین، تحلیل کمانش

1 Differential quadrature

2 Shen

3 Bever

4 Na

5 Kim

6 Ganapathi

7 Prakash

ضخامت ورق، نسبت ابعادی، شرایط مرزی بر دمای کمانش بحرانی بررسی شده است. جیانو^۶ و همکارانش [۱۲] به کمک روش تربیع دیفرانسیلی رفتار کمانشی ورق‌های نازک مستطیلی مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت نیروهای فشاری جزئی در لبه‌ها را با در نظر گرفتن سه الگوی توزیع تقویت‌کننده بررسی کرده‌اند. غلامی و همکاران [۱۳-۱۷] به‌طور گسترده در خصوص تحلیل ارتعاشات، کمانش و پس‌کمانش صفحات کامپوزیتی پلیمری تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی با خواص مواد وابسته به دما با روش تربیع دیفرانسیل متغیر و تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا مطالعه نمودند. وو و همکاران [۱۸] به بررسی کمانش حرارتی و پس‌کمانش صفحات نانوکامپوزیتی چندلایه تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافنی و خواص ماده مستقل از دما پرداخته‌اند.

با توجه به ماهیت غیرخطی مسئله پس‌کمانش همواره حل مسئله پس‌کمانش برای محققان با چالش‌هایی مواجه بوده است. روش‌های حل تحلیلی علی‌رغم کیفیت و دقت بالا دارای محدودیت‌های جدی می‌باشند. از طرفی روش‌های حل عددی مانند اجزاء محدود برای حل مسئله نیازمند استفاده از الگوریتم‌های پیچیده ترکیبی مانند نیوتن-رافسون و طول کمان می‌باشند؛ بنابراین علی‌رغم توانمندی بالای این روش در حل مسئله اما در اجرا سختی‌های زیادی وجود دارد. در این پژوهش با روش تربیع دیفرانسیلی به حل مسئله کمانش و پس‌کمانش پرداخته خواهد شد.

۲- فرمول‌بندی

در این پژوهش، ورق مستطیلی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن^۷، با طول a ، عرض b و ضخامت h مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. در این ورق‌ها ضخامت تمام لایه‌ها یکسان است و هر لایه ترکیبی از نانوپلاکت‌های گرافن و زمینه پلیمری همسانگرد از جنس دی‌گلیسیدیل اتر بیسفنول ای^۸ است. نانوپلاکت‌های گرافن در زمینه پلیمری

خطی و غیرخطی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است، تأثیر نسبت ابعادی، ثابت ناهمگنی و زاویه انحراف ورق بر دما بحرانی کمانش بررسی شده است. شاطرزاده [۵] کمانش ورق‌های مدرج تابعی با گشودگی دایروی در مرکز تحت اثر هم‌زمان بارهای مکانیکی و حرارتی با روش اجزا محدود بررسی کرده است. بشارت فردوسی و همکاران [۶] کمانش و پس‌کمانش نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تحت بار فشاری محوری در شرایط دمایی مختلف را با استفاده از شبیه‌سازی عددی بررسی کرده‌اند. خورشیدی و همکاران [۷] به مطالعه رفتار کمانشی میکروصفحه‌های مستطیلی مدرج تابعی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده پرداخته‌اند. ملک‌زاده [۸] به بررسی کمانش حرارتی ورق‌های چهارضلعی‌های دلخواه مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف به کمک تئوری الاستیک سه‌بعدی پرداخته است. در این مقاله خواص مواد وابسته به دما در نظر گرفته شده و در راستای ضخامت تغییر می‌کند، همچنین برای حل معادلات حاکم بر ورق از روش تربیع دیفرانسیلی استفاده شده است. وو^۱ و همکاران [۹] به بررسی ناپایداری پارامتریک ورق‌های کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن تحت نیروی درون صفحه‌ای تک‌محوره متناوب و افزایش یکنواخت حرارت پرداختند. یانگ^۲ و همکاران [۱۰] کمانش و ارتعاشات آزاد ورق‌های متخلخل تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها دریافتند کسر حجمی و پارامترهای هندسی نانوپلاکت‌های گرافن و همچنین ضریب تخلخل نقش مؤثری در کمانش و ارتعاشات آزاد ورق دارند. دو^۳ و لی^۴ [۱۱] به مطالعه کمانش حرارتی ورق‌های ساندویچی مدرج تابعی با استفاده از روش اصلاح‌شده درون‌یابی نقطه محوری بدون مش^۵ پرداخته‌اند. در این پژوهش ورق‌ها با دو آرایش، لایه میانی مدرج تابعی و لایه‌های بالا و پایین همگن و بالعکس در نظر گرفته شده است. اثر کسر حجمی، نسبت طول به

¹ Wu

² Yang

³ Do

⁴ Lee

⁵ The improved radial point interpolation mesh-free method

⁶ Jiao

⁷ Graphene platelet reinforced composite (GPLRC)

⁸ Diglycidyl ether of bisphenol A (DGEBA)

$$V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + (\rho_{GPL} / \rho_m)(1 - W_{GPL})} \quad (۲)$$

W_{GPL} کسر وزنی تقویت‌کننده‌ها، ρ_m و ρ_{GPL} به ترتیب چگالی زمینه و چگالی نانوپلاکت‌های گرافن است. با توجه به اینکه در مدل میکرومکانیک اصلاح‌شده هالپین-تسای، اثر هندسه و اندازه را در نظر گرفته می‌شود، مدول یانگ مؤثر به کمک رابطه زیر محاسبه شده است.

$$E = \frac{3}{8} \frac{1 + \zeta_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} \times E_m + \frac{5}{8} \frac{1 + \zeta_T \eta_T V_{GPL}}{1 - \eta_T V_{GPL}} \times E_m \quad (۳)$$

مقادیر η_L و η_T به صورت زیر محاسبه می‌گردند.

$$\eta_L = \frac{(E_{GPL} / E_m) - 1}{(E_{GPL} / E_m) + \zeta_L} \quad (۴)$$

$$\eta_T = \frac{(E_{GPL} / E_m) - 1}{(E_{GPL} / E_m) + \zeta_T}$$

E_m و E_{GPL} به ترتیب مقادیر مدول یانگ ماتریس و نانوپلاکت‌های گرافن است. مشخصه‌های هندسی ζ_L و ζ_T به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\zeta_L = 2(a_{GPL} / t_{GPL}) \quad (۵)$$

$$\zeta_T = 2(b_{GPL} / t_{GPL})$$

a_{GPL} ، b_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب طول، عرض و ضخامت نانوپلاکت‌گرافن است و مقادیر آن به ترتیب ۱/۵، ۲/۵، ۱/۵ میکرومتر و ۱/۵ نانومتر است. همچنین، از قانون اختلاط برای محاسبه ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون معادل کامپوزیت‌های مدرج تابعی موردنظر استفاده شده است و به صورت زیر محاسبه شده است.

$$v = v_m V_m + v_{GPL} V_{GPL} \quad (۶)$$

$$\alpha = \alpha_m V_m + \alpha_{GPL} V_{GPL}$$

v_m و v_{GPL} ضرایب پواسون، α_m و α_{GPL} ضرایب انبساط حرارتی به ترتیب نانوپلاکت‌های گرافن و زمینه است. بدیهی است، V_m کسر حجمی ماتریس است و به صورت زیر تعریف می‌گردد [۹].

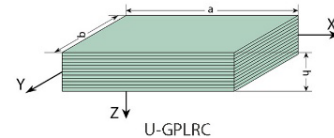
$$V_m = 1 - V_{GPL} \quad (۷)$$

خواص مکانیکی نانوپلاکت‌های گرافن و پلیمر زمینه مطابق با جدول ۱ در نظر گرفته شده است.

جدول (۱): خواص مواد موردبررسی.

ماده	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	v	$\alpha \times 10^{-6}$ K ⁻¹
			-	

ρ_{GPL} به صورت یکنواخت و با جهت‌گیری تصادفی پراکنده شده است، با تغییر کسر وزنی نانوپلاکت‌های گرافن در هر لایه در راستای ضخامت با سه توزیع مدرج تابعی X و O و توزیع یکنواخت U در نظر گرفته شده است. لایه‌های بالا و پایین در توزیع X و لایه‌های میانی در توزیع O بیشترین مقدار گرافن را دارا هستند. لازم به ذکر است که در تحلیل پیش رو مطابق بسیاری از مراجع از جمله مرجع [۱۸] خواص مواد مستقل از دما فرض شده است که این فرض تأثیری چندانی بر رفتار کلی کمانش سازه ندارد ولی باین حال فرض وابستگی خواص ماده به دما مقدار دمای کمانش را کاهش می‌دهد. ضمن آنکه در مراجعی که خواص وابسته به دما هم فرض شده است این فرض تنها در مورد ماده زمینه صدق می‌کند و خواص پلاکت‌های گرافنی همچنان مستقل از دما در نظر گرفته شده‌اند. علاوه بر آن اثر وابستگی خواص به دما تنها از طریق ضریب انبساط حرارتی در معادلات اثر می‌گذارد و وابستگی مدول یانگ و نسبت پواسون به دما هیچ تأثیری در نتایج ندارد.



شکل (۱): نحوه توزیع تقویت‌کننده‌ها در ورق‌های

کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن.

در ابتدا کسر حجمی $(V_{GPL}^{(K)})$ ، برای هر لایه $(K=1, 2, \dots, N_L)$ ، با توجه به نوع توزیع لایه‌ها به صورت زیر تعریف شده است.

$$V_{GPL}^{(K)} = V_{GPL}^* \quad (۱-الف)$$

$$V_{GPL}^{(K)} = 2V_{GPL}^* |2K - N_L - 1| / N_L \quad (۱-ب)$$

$$V_{GPL}^{(K)} = 2V_{GPL}^* (1 - |2K - N_L - 1| / N_L) \quad (۱-ج)$$

رابطه (۱-الف)، رابطه (۱-ب) و رابطه (۱-ج) به ترتیب درصد کسر حجمی را برای ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به صورت U، X و O نشان می‌دهند. تعداد لایه‌ها است و V_{GPL}^* معرف کسر حجمی کل به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (11)$$

در معادلات ساختاری کرنش‌ها به‌وسیله ماتریس سفتی به تنش‌ها مربوط می‌شوند. مؤلفه‌های ماتریس سفتی برای $(i, j = 1, 2, 4, 5, 6)$ به صورت رابطه ۱۲ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (12)$$

با استفاده از اصل کار مجازی، معادلات پایداری حاکم بر ورق موردنظر برحسب منتجه‌های نیرویی N_X, N_Y, N_{XY} ، منتجه‌های گشتاور خمشی M_X, M_Y, M_{XY} و منتجه‌های نیروی برشی Q_X و Q_Y با تغییرات حرارت یکنواخت به صورت رابطه ۱۳ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{X,X} + N_{XY,Y} &= 0 \\ N_{XY,X} + N_{Y,Y} &= 0 \\ Q_{X,X} + Q_{Y,Y} + N_X W_{,XX} + N_Y W_{,YY} + 2N_{XY} W_{,XY} &= 0 \\ M_{X,X} + M_{XY,Y} - Q_X &= 0 \\ M_{XY,X} + M_{Y,Y} - Q_Y &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به تغییر کسر حجمی تقویت‌کننده‌ها و خواص مواد در هر لایه، مقدار تنش‌ها در راستای ضخامت پیوسته نیست و در هر لایه تغییر می‌کند، در نتیجه منتجه‌های نیرویی و منتجه‌های گشتاور خمشی و از مجموع انتگرال‌های تنش در هر لایه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_{XY} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} dZ = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix}^{(k)} dZ \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X^{(0)} \\ \varepsilon_Y^{(0)} \\ \gamma_{XY}^{(0)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_X^T \\ N_Y^T \\ N_{XY}^T \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_Y \\ Q_X \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \end{Bmatrix} dZ = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \end{Bmatrix}^{(k)} dZ \\ &= \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{YZ}^{(0)} \\ \gamma_{XZ}^{(0)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

گرافن [۱۹]	۵	۰/۱۸۶	۱۰۶۲/۵	۱۰۱۰
پلیمر [۲۰]	۶۰	۰/۳۴	۱۲۰۰	۳

در پژوهش حاضر فرض می‌شود، ورق فاقد هرگونه تنش‌های اولیه در دمای مرجع T_0 است و دما طبق رابطه (۸) به صورت یکنواخت تغییر می‌کند.

$$\Delta T = T - T_0 \quad (8)$$

مؤلفه‌های جابه‌جایی برای نقطه‌ای دلخواه در ورق بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت است.

$$\begin{aligned} \bar{U}(X, Y, Z) &= U(X, Y) + Z\psi_x(X, Y) \\ \bar{V}(X, Y, Z) &= V(X, Y) + Z\psi_y(X, Y) \\ \bar{W}(X, Y, Z) &= W(X, Y) \end{aligned} \quad (9)$$

\bar{U} و \bar{V} به ترتیب جابه‌جایی یک نقطه دلخواه در راستای محورهای مختصات X, Y و Z است. مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی ($Z=0$) نیز با U, V و W نشان داده شده است. ψ_x و ψ_y چرخش‌های صفحه میانی به ترتیب حول محورهای Y و X نسبت به سطح مقطع عرضی است. با استفاده از رابطه غیرخطی کرنش-جابه‌جایی ون-کارمن کرنش‌های حاکم بر ورق برحسب جابه‌جایی‌های U, V و W و چرخش‌های ψ_x و ψ_y در صفحه میانی به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_X^{(0)} \\ \varepsilon_Y^{(0)} \\ \gamma_{YZ}^{(0)} \\ \gamma_{XZ}^{(0)} \\ \gamma_{XY}^{(0)} \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \varepsilon_X^{(1)} \\ \varepsilon_Y^{(1)} \\ \gamma_{YZ}^{(1)} \\ \gamma_{XZ}^{(1)} \\ \gamma_{XY}^{(1)} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} U_{,X} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 \\ V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,Y})^2 \\ W_{,Y} + \psi_y \\ W_{,X} + \psi_x \\ U_{,Y} + V_{,X} + W_{,X} W_{,Y} \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \psi_{X,X} \\ \psi_{Y,Y} \\ 0 \\ 0 \\ \psi_{X,Y} + \psi_{Y,X} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

بر اساس قانون هوک، معادلات ساختاری تنش-کرنش با در نظر گرفتن اثر حرارت برای ورق تحت تغییرات دمای یکنواخت به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{aligned}
 & A_{55}(W_{,XX} + \psi_{X,X}) + A_{44}(W_{,YY} + \psi_{Y,Y}) \\
 & + \left\{ A_{11} \left[U_{,X} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 \right] + A_{12} \left[V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,Y})^2 \right] - N_{XX}^T \right\} W_{,XX} \\
 & + \left\{ A_{12} \left[U_{,X} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 \right] + A_{22} \left[V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,Y})^2 \right] - N_{YY}^T \right\} W_{,YY} \\
 & + 2A_{66}(U_{,Y} + V_{,X} + W_{,X}W_{,Y})W_{,XY} = 0 \\
 & D_{11}\psi_{X,XX} + D_{12}\psi_{Y,XY} + D_{66}(\psi_{X,YY} + \psi_{Y,XY}) \\
 & - A_{55}(W_{,X} + \psi_X) = 0 \\
 & D_{66}(\psi_{X,XY} + \psi_{Y,XX}) \\
 & + D_{12}\psi_{X,XY} + D_{22}\psi_{Y,YY} - A_{44}(W_{,Y} + \psi_Y) = 0
 \end{aligned}$$

در این پژوهش، ورق‌ها با شرایط مرزی ساده و گیردار در نظر گرفته شده است و به صورت روابط ۱۸ و ۱۹ تعریف می‌شوند.

شرایط مرزی گیردار:

$$\begin{aligned}
 U = V = W = \psi_X = \psi_Y = 0 \quad (X = 0, a) \\
 U = V = W = \psi_X = \psi_Y = 0 \quad (Y = 0, b)
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

شرایط مرزی ساده:

$$\begin{aligned}
 (X = 0, a) \quad U = V = W = \psi_Y = M_{XX} = 0 \\
 (Y = 0, b) \quad U = V = W = \psi_X = M_{YY} = 0
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با توجه به اینکه استفاده از پارامترهای بی‌بعد پیچیدگی مسئله را کاهش می‌دهد، در این پژوهش نیز پارامترهای مسئله به کمک روابط زیر بی‌بعد شده است.

$$\begin{aligned}
 (x, y) &= (X/a, Y/b) \\
 (u, v, w) &= (U, V, W)/h \\
 (\varphi_x, \varphi_y) &= (\psi_X, \psi_Y) \\
 (\lambda_1, \lambda_2) &= a/(h, b) \\
 (a_{ij}, d_{ij}) &= (A_{ij}, D_{ij}/h^2)/A_{110} \\
 (P_x^T, P_y^T) &= (N_X^T, N_Y^T)/A_{110}
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

A_{110} برابر با مقدار A_{11} برای یک ورق همگن از جنس زمینه است. سپس، با توجه به روابط ۲۰ معادلات با مشتقات جزئی و شرایط مرزی حاکم بر ورق بی‌بعد سازی شده است.

۲-۱- روش تربیع دیفرانسیلی

روش تربیع دیفرانسیلی برای اولین بار در سال ۱۹۷۱ توسط بلمن و همکاران [۲۱]، به‌عنوان یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی پیشنهاد شده است. شیوه حل در این روش با گسسته‌سازی فضای پیوسته مسئله انجام می‌شود. ایده اصلی این روش به این صورت

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} Z dZ = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix}^{(k)} Z dZ \\
 &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X^{(1)} \\ \varepsilon_Y^{(1)} \\ \gamma_{XY}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_X^T \\ M_Y^T \\ M_{XY}^T \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

M_X^T, M_Y^T, M_{XY}^T و N_{XY}^T, N_Y^T, N_X^T منتجهای دمایی نیرو و M_X^T, M_Y^T, M_{XY}^T منتجهای دمایی گشتاور خمشی هستند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_X^T & M_X^T \\ N_Y^T & M_Y^T \\ N_{XY}^T & M_{XY}^T \end{Bmatrix} = \tag{۱۵}$$

$$\sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (1, Z) \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}^{(k)} \Delta T dZ$$

مقادیر A_{ij} و D_{ij} برحسب مؤلفه‌های سفتی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, Z^2) Q_{ij} dZ \\
 &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (1, Z^2) Q_{ij}^{(k)} dZ \quad (i, j = 1, 2, 6)
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \kappa \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dZ \\
 &= \kappa \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} dZ \quad (i, j = 4, 5)
 \end{aligned}$$

ضریب تصحیح برشی $\kappa = 5/6$ فرض شده است.

سپس، منتجهای نیرویی و منتجهای گشتاور خمشی به‌دست‌آمده از روابط ۱۴ را با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک روابط ۱۰، در معادلات حاکم بر ورق روابط ۱۳ جایگذاری شده است و معادلات تعادل غیرخطی حاکم بر ورق نانوکامپوزیتی تحت تغییر دمایی یکنواخت برحسب جابه‌جایی‌ها به صورت زیر به دست می‌آید.

شایان‌ذکر است، مشتق منتجهای دمایی نیرو و منتجهای دمایی گشتاور خمشی با توجه به تغییرات یکنواخت دما در جهت‌های X و Y صفر می‌شود و از معادلات حذف شده است.

$$\begin{aligned}
 & A_{11}(U_{,XX} + W_{,X}W_{,XX}) + A_{12}(V_{,XY} + W_{,Y}W_{,XY}) \\
 & + A_{66}(U_{,YY} + V_{,XY} + W_{,Y}W_{,XY} + W_{,X}W_{,YY}) = 0 \\
 & A_{66}(U_{,XY} + V_{,XX} + W_{,XX}W_{,Y} + W_{,X}W_{,XY}) \\
 & + A_{12}(U_{,XY} + W_{,X}W_{,XY}) + A_{22}(V_{,YY} + W_{,Y}W_{,YY}) = 0
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N) \\ (i \neq j)$$

$$C_u^{(k)} = - \sum_{v=1, \neq i}^N C_v^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

روابط در اینجا تنها برای شبکه گرهی در راستای x ارائه شده است و فرمول‌بندی در جهت y نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.

سپس، مشتق‌های مرتبه اول و بالاتر توابع u, v, w, φ_x و φ_y با استفاده از روابط ۲۱ و ۲۲ بازنویسی شده است و دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری غیرخطی حاکم بر ورق (رابطه الف-۱) در بخش ضمائم آورده شده است.

سپس، با اعمال تربیع دیفرانسیلی و گسسته‌سازی شرایط مرزی حاکم بر ورق، شرایط مرزی در لبه‌های $(x=0)$ ، $(x=1)$ ، $(y=0)$ و $(y=1)$ با توجه به مختصات و شماره متناظر با هر گره در لبه ورق ارائه شده است.

شرایط مرزی گیردار:

$$(x=0) \quad u_{1j} = v_{1j} = w_{1j} = \varphi_{x1j} = \varphi_{y1j} = 0, \\ (x=1) \quad u_{N_1j} = v_{N_1j} = w_{N_1j} = \varphi_{xN_1j} = \varphi_{yN_1j} = 0, \\ (y=0) \quad u_{i1} = v_{i1} = w_{i1} = \varphi_{xi1} = \varphi_{yi1} = 0, \\ (y=1) \quad u_{iN_2} = v_{iN_2} = w_{iN_2} = \varphi_{xiN_2} = \varphi_{yiN_2} = 0, \quad (26)$$

شرایط مرزی ساده:

$$(x=0) \quad u_{1j} = v_{1j} = w_{1j} = \varphi_{y1j} = 0, \\ d_{11} \sum_{m=1}^{N_1} C_{1m}^{(1)} \varphi_{xmj} + d_{12} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_2} C_{jn}^{(1)} \varphi_{y1n} = 0, \\ (x=1) \quad u_{N_1j} = v_{N_1j} = w_{N_1j} = \varphi_{yN_1j} = 0, \\ d_{11} \sum_{m=1}^{N_1} C_{N_1m}^{(1)} \varphi_{xmj} + d_{12} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_2} C_{jn}^{(1)} \varphi_{yN_1n} = 0, \\ (y=0) \quad u_{i1} = v_{i1} = w_{i1} = \varphi_{xi1} = 0, \\ d_{12} \sum_{m=1}^{N_1} C_{im}^{(1)} \varphi_{xm1} + d_{22} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_2} C_{1n}^{(1)} \varphi_{yin} = 0, \\ (y=1) \quad u_{iN_2} = v_{iN_2} = w_{iN_2} = \varphi_{xiN_2} = 0, \\ d_{12} \sum_{m=1}^{N_1} C_{im}^{(1)} \varphi_{xmN_2} + d_{22} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_2} C_{N_2n}^{(1)} \varphi_{yin} = 0, \quad (27)$$

در ادامه، برای بازنویسی دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاکم بر ورق به فرم ماتریسی، ابتدا بردار جابه‌جایی $\{d\}$ با کنار هم قرار دادن ستون‌های ماتریس جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\{d\} = \{u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, \varphi_{xij}, \varphi_{yij}\}^T \quad (28)$$

است که مشتق تابع در هر یک از نقاط گرهی به صورت جمع خطی وزن‌دار از مقدار تابع در تمام نقاط گره‌ای تعیین شده در آن راستا است. خواسته مسئله مقدار تابع موردنظر در هر یک از نقاط گره‌ای است. مشتق مرتبه k_1 تابع نسبت به متغیر x در نقطه i به صورت تعیین می‌شود که در آن $C_{im}^{(k_1)}$ ضریب وزنی مشتق مرتبه k_1 ، N تعداد گره و u_m پاسخ موردنظر در نقطه i است.

$$\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\} \Big|_{x=x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (21)$$

$$= \sum_{m=1}^N C_{im}^{(k_1)} \{u_{mj}, v_{mj}, w_{mj}, \varphi_{xmj}, \varphi_{ymj}\}$$

همچنین مشتق مرتبه k_1 نسبت به متغیر x و مشتق مرتبه k_2 نسبت به متغیر y به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial y^{k_2}} \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\} \Big|_{x=x_i, y=y_j} \quad (22)$$

$$= \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} C_{im}^{(k_1)} C_{jn}^{(k_2)} \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \varphi_{xmn}, \varphi_{ymn}\}$$

$C_{im}^{(k_1)}$ و $C_{jn}^{(k_2)}$ به ترتیب ضریب وزنی مشتق مرتبه k_1 نسبت به متغیر x و مشتق مرتبه k_2 نسبت به متغیر y است. u_{mn} پاسخ موردنظر در نقطه (i, j) است. N_1 و N_2 به ترتیب تعداد گره در راستای محور x و تعداد گره در راستای محور y است. توزیع گره‌ها به صورت یکنواخت و طبق یک الگوی کسینوسی در نظر گرفته شده است.

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{N_1-1} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, N_1) \quad (23)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(j-1)}{N_2-1} \right] \quad (j = 1, 2, \dots, N_2)$$

ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۲۲].

$$C_y^{(1)} = \frac{\prod_{k=1, \neq i}^N (x_i - x_k)}{(x_i - x_j) \prod_{k=1, \neq j}^N (x_j - x_k)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (24)$$

$$C_u^{(1)} = - \sum_{k=1, \neq i}^N C_{ik}^{(1)} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

همچنین ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبه k نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_{ij}^{(k)} = k \left[C_{ii}^{(k-1)} C_{ij}^{(k-1)} - \frac{C_{ij}^{(k-1)}}{(x_i - x_j)} \right] \quad (25)$$

در این پژوهش نیز به منظور یافتن حداقل تعداد نقاط گرهی نتایج برای تغییرات دمای کمانش بحرانی و تغییرات دمای پس کمانش ورق‌های ده لایه مدرج تابعی با آرایش لایه‌ای X و شرایط مرزی ساده در جدول ۲ بررسی شده است.

معرف بیشترین جابه‌جایی مرکزی بی‌بعد است و در جدول ۲ برابر با یک در نظر گرفته شده است و مقادیر تغییرات دمای پس کمانش متناظر با آن نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، فرض ۱۱ گره در راستای محورهای x و y ورق نتایج همگرایی مطلوبی دارد و با افزایش تعداد گره‌ها تغییرات محسوسی در دما ایجاد نمی‌شود. تعیین حداقل تعداد گره از جهت کاهش حجم محاسبات بسیار مورد توجه است. در مرحله بعد نیز برای پیدا کردن حداقل تعداد لایه‌ها به‌طور مشابه عمل شده است و تغییرات دمای کمانش بحرانی و تغییرات دمای پس کمانش برای بیشترین جابه‌جایی مرکزی بی‌بعد برابر یک برای ورق‌هایی با آرایش لایه‌ای X و تعداد لایه‌های مختلف بررسی شده است. ورق با شرایط مرزی ساده و ۱۱ نقطه گرهی در هر راستا فرض شده است و نتایج به‌دست آمده در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول (۲): نتایج همگرایی دما (کلوین) کمانش و پس کمانش ورق مربعی مدرج تابعی با تعداد نقاط گرهی متفاوت ($a/h = 25, W_{GPL} = 0.3\%, SSSS$).

$N(N_L = 10)$	ΔT_{cr}	$\Delta T (w_c = 1)$
۵	۳۹/۵۷۱۶	۸۰/۴۰۳۹
۷	۴۰/۲۷۶۶	۸۲/۵۶۵۱
۹	۴۰/۲۶۱۲	۸۳/۰۴۵۷
۱۱	۴۰/۲۶۱۲	۸۲/۹۶۲۹
۱۳	۴۰/۲۶۱۴	۸۲/۹۷۰۲
۱۵	۴۰/۲۶۱۴	۸۲/۹۶۹۷
۱۷	۴۰/۲۶۱۴	۸۲/۹۶۹۷

جدول (۳): نتایج همگرایی دما (کلوین) کمانش و پس کمانش ورق مربعی مدرج تابعی با تعداد نقاط گرهی متفاوت ($a/h = 25, W_{GPL} = 0.3\%, SSSS$).

$N(N_L = 11)$	ΔT_{cr}	$\Delta T (w_c = 1)$
۶	۳۹/۶۹۰۲	۸۲/۳۶۵۸

برای تطبیق درایه‌های ماتریس‌های ضرایب وزنی با جابه‌جایی‌های متناظر با هر گره در بردار جابه‌جایی، از حاصل ضرب کرونیگر استفاده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[A] \otimes [B] = [A_{ij} [B]] \quad (29)$$

معادلات جبری غیرخطی حاکم بر کمانش و پس کمانش حرارتی ورق‌های مدرج تابعی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن تحت بار حرارتی یکنواخت به فرم ماتریسی زیر بیان می‌شود.

$$([K_L] - \Delta T [K_T] + [K_{NL1}] + [K_{NL2}]) \{d\} = 0 \quad (30)$$

از آنجایی که N_1 تعداد گره در راستای محور x و N_2 تعداد گره در راستای محور y ورق طبق روش تربیع دیفرانسیلی فرض شده است و هر گره دارای پنج درجه آزادی است، بنابراین ابعاد دستگاه معادلات ماتریسی حاکم بر ورق $5N_1N_2 \times 5N_1N_2$ است و به‌تبع آن ماتریس‌های سفتی K_L ، K_T ، K_{NL1} ، K_{NL2} ابعادشان $5N_1N_2 \times 5N_1N_2$ است. ماتریس ضرایب ثابت، K_T ماتریس ضرایب مرتبط با دما و K_{NL1} و K_{NL2} نیز به ترتیب ماتریس‌هایی از توابع خطی و درجه دو از بردار جابه‌جایی‌های مجهول است.

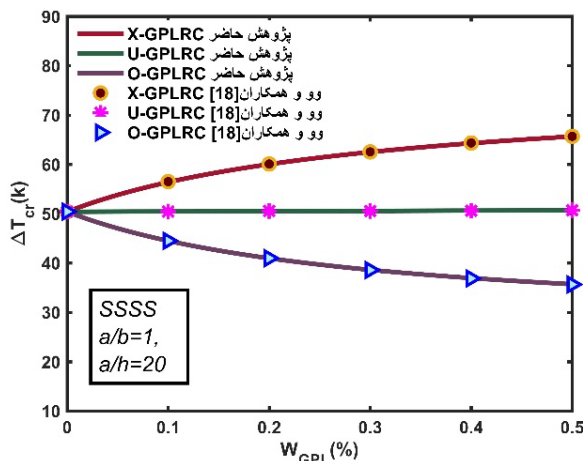
با حذف عبارت‌های غیرخطی دستگاه ماتریسی غیرخطی مسئله به یک مسئله مقدار ویژه خطی تبدیل می‌شود، با حل معادله فوق کوچک‌ترین مقدار ویژه مثبت به‌عنوان دمای کمانش بحرانی به دست می‌آید. بردارهای ویژه (مد کمانش) متناظر با مقدار ویژه به‌دست آمده به‌عنوان حدس‌های اولیه جابه‌جایی در تشکیل ماتریس K_{NL1} و K_{NL2} به کار گرفته می‌شوند، سپس به کمک یک الگوی تکراری مسیرهای تعادل پس کمانش ورق ترسیم شده است.

۳- بحث و نتایج

۳-۱- تعیین حداقل تعداد گره و لایه همگرایی

تعداد گره‌ها در راستای محورهای x و y مساوی و برابر با N فرض شده است. همواره نتیجه مطلوب به ازای تعداد گره مشخصی حاصل می‌شود و با افزایش تعداد گره‌ها از مقدار مشخص، همگرایی از بین می‌رود.

در ادامه صحت سنجی نتایج به‌دست‌آمده با مرجع [۱۸] مقایسه شده و اثر تغییرات کسر وزنی نانوپلاکت‌های گرافن تقویت‌کننده بر دمای کمانش بحرانی در ورقی با الگوهای توزیع متفاوت تقویت‌کننده ساده بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با توجه به نوع آرایش تقویت‌کننده‌ها با افزایش کسر وزنی آن‌ها دمای کمانش بحرانی می‌تواند بدون تغییر، افزایشی و یا کاهش‌ی باشد. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌گردد، توزیع مدرج تابعی تقویت‌کننده الزاماً، منجر به افزایش دمای کمانش بحرانی نمی‌شود. در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X با توجه به اینکه مقدار تقویت‌کننده‌ها در لایه‌های سطحی بیشتر است، این لایه‌ها سفتی خمشی بالاتری دارند، به همین علت با افزایش کسر وزنی تقویت‌کننده‌ها دمای کمانش بحرانی افزایش می‌یابد، درحالی‌که در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل O دمای کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. همچنین، با افزایش کسر وزنی تقویت‌کننده‌ها شیب تغییرات دمای کمانش بحرانی کم می‌شود. از طرفی، مشاهده می‌شود افزایش کسر وزنی تقویت‌کننده‌ها در ورقی با توزیع یکنواخت بی‌اثر است و دمای کمانش بحرانی تقریباً ثابت باقی می‌ماند.



شکل (۳): مقایسه مقادیر دمای کمانش بحرانی در مقابل تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها برای ورق‌های مربعی مدرج تابعی با آرایش تقویت‌کننده متفاوت و شرایط مرزی چهار طرف ساده

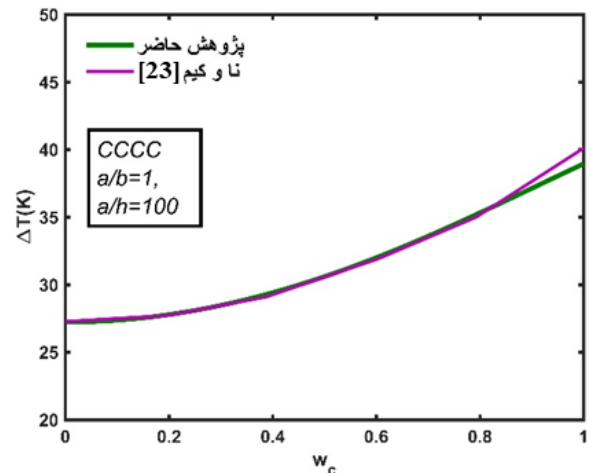
۳-۴- تأثیر شرایط مرزی و نسبت طول به ضخامت ورق بر دمای کمانش بحرانی

۱۰	۴۰/۲۶۱۴	۸۲/۹۶۲۹
۲۰	۴۰/۵۰۲۳	۸۳/۲۱۴۵
۳۰	۴۰/۵۴۶۹	۸۳/۲۶۱۱
۴۰	۴۰/۵۶۲۵	۸۳/۲۷۷۴
۵۰	۴۰/۵۶۹۷	۸۳/۲۸۴۹
+∞	۴۰/۵۸۲۶	۸۳/۲۹۸۳

از مقایسه نتایج ورقی با ده لایه و ورقی با تعداد لایه‌های بی‌نهایت مشاهده می‌گردد اختلاف این نتایج ناچیز و قابل چشم‌پوشی است، بنابراین انتخاب ورقی با ده لایه و ۱۱ نقطه گرهی در راستای محورهای x و y برای مطالعه نتایج، همگرایی و دقت مناسبی دارد.

۳-۲- اعتبار سنجی

به‌منظور اعتبار سنجی نتایج به‌دست‌آمده از پژوهش انجام‌شده، مسیر تعادل پس‌کمانش برای ورق مربعی از جنس نیکل تحت تغییرات دمای یکنواخت و شرایط مرزی گیردار در شکل ۲ ترسیم‌شده و نتایج به‌دست‌آمده با مرجع [۲۳] مقایسه شده است.

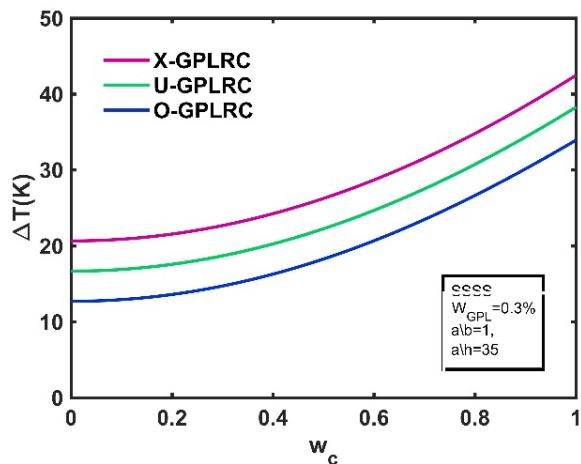


شکل (۲): مقایسه مسیر تعادل پس‌کمانش ورق تحت تغییر دمای یکنواخت و شرایط مرزی گیردار ($E=199.5 \text{ GPa}$, $\nu=0.3$, $\alpha=13.3 \times 10^{-6} / \text{K}$)

۳-۳- تأثیر درصد وزنی و الگوی توزیع تقویت‌کننده‌ها بر دمای کمانش بحرانی

در ادامه، پس از حل مسائل مقدار ویژه و بررسی دمای کمانش بحرانی، با در نظر گرفتن ماتریس‌های غیرخطی K_{NL1} و K_{NL2} ، به بررسی مسیرهای تعادل پس‌کمانش پرداخته شده است.

در ابتدا تغییرات دمای پس‌کمانش برحسب بیشترین جابه‌جایی مرکزی بی‌بعد برای ورق‌های مربعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و نسبت طول به ضخامت ۳۵ در شکل ۵ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به صورت X با توجه به اینکه، کسر حجمی تقویت‌کننده‌ها در لایه‌های سطحی بیشتر است و ورق‌ها استحکام خمشی بالاتری دارند، دمای کمانش بحرانی در آن‌ها بیشتر است و به تبع آن مسیر تعادل پس‌کمانش بالاتر از سایر الگوهای توزیع تقویت‌کننده قرار می‌گیرد.



شکل (۵): مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی ورق مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و آرایش تقویت‌کننده متفاوت با کسر وزنی تقویت‌کننده ۰/۳ درصد.

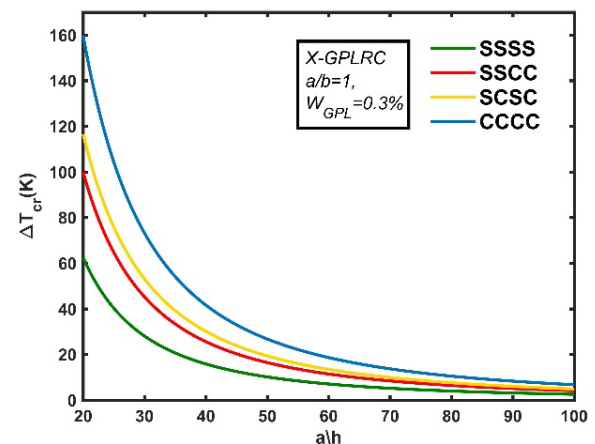
۳-۶- تأثیر درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی

در مقایسه‌ای دیگر اثر تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر رفتار پس‌کمانشی ورق‌ها بررسی شده است. مقادیر تغییرات دمای پس‌کمانش به ازای جابه‌جایی مرکزی بی‌بعد برابر با یک، برای ورق‌های مدرج تابعی با درصد وزنی تقویت‌کننده متفاوت در جدول ۴ نشان داده شده است. با افزایش درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها، مقاومت پس‌کمانشی حرارتی در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X و O

در مرحله بعد، به مقایسه تأثیر تغییرات نسبت طول به ضخامت ورق بر دمای کمانش بحرانی پرداخته شده است. این مقایسه در نمودارهای شکل ۴ برای ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به صورت X و با چهار شرایط مرزی: چهار طرف گیردار (CCCC)، چهار طرف ساده (SSSS)، ساده-ساده-گیردار-گیردار (SSCC) و ساده-گیردار-ساده-گیردار (CSCS) نشان داده شده است و تأثیر تغییرات نسبت طول به ضخامت بر دمای کمانش بحرانی نمایش داده شده است.

ورق‌هایی با شرایط مرزی چهار طرف گیردار، بالاترین مقادیر دمای کمانش بحرانی را دارا هستند، به دنبال آن با توجه به شرایط مرزی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، به ترتیب ورق‌هایی با شرایط مرزی: ساده-ساده-گیردار-گیردار، ساده-گیردار-ساده-گیردار و چهار طرف ساده قرار می‌گیرند. این نتیجه نشان می‌دهد که هرچه لبه‌های ورق مقیدتر باشد دمای کمانش بحرانی بالاتری را خواهیم داشت.

همچنین، نتایج نشان می‌دهد در ورق‌هایی با نسبت طول به ضخامت بیشتر دمای کمانش بحرانی کمتر است، به تعبیری دیگر با افزایش ضخامت ورق یا کاهش ابعادی آن دمای کمانش بحرانی افزایش می‌یابد.

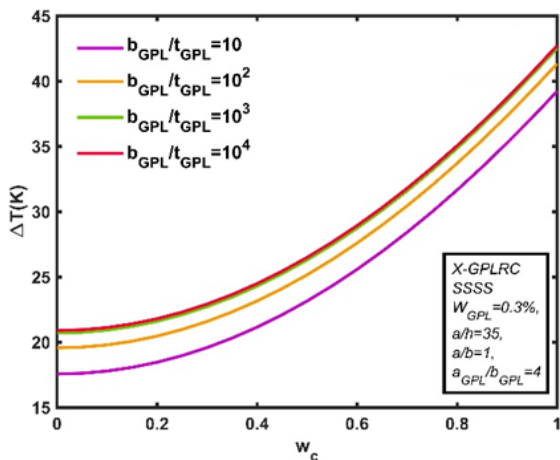


شکل (۴): مقادیر دمای کمانش بحرانی در مقابل تغییرات نسبت طول به ضخامت ورق مربعی مدرج تابعی تقویت‌شده به شکل X با شرایط مرزی متفاوت.

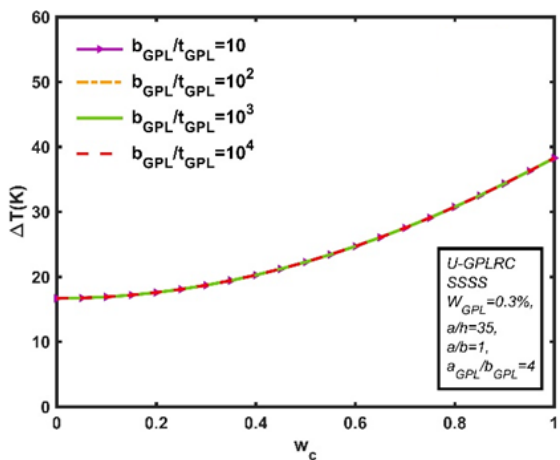
۳-۵- تأثیر الگو توزیع تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی

۳-۸- تأثیر شرایط مرزی بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی

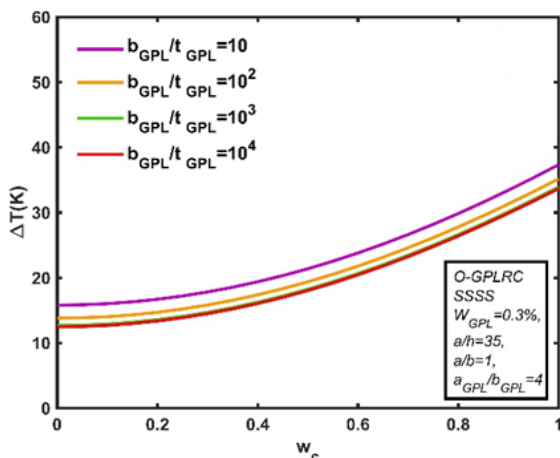
در شکل ۷ مسیر تعادل پس‌کمانش برای ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X با شرایط مرزی متفاوت و نسبت طول به ضخامت ۳۵ بررسی شده است.



(الف)



(ب)



به ترتیب افزایش و کاهش یافته است و در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل U اثری نداشته و مقاومت پس‌کمانش حرارتی آن‌ها ثابت باقی‌مانده است؛ بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که به‌طور کلی درصد وزنی تقویت‌کننده تأثیر کمی بر دمای بحرانی کمانش دارد ولی با انتخاب الگوی توزیعی X می‌توان بیشترین بهره را در ارتقا دمای بحرانی کمانش حرارتی برد.

جدول (۴): دمای پس‌کمانش ورق مدرج تابعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده.

$a/b = 1, a/h = 35, w_c = 1$				
$W_{GPL} = 0.0$	$W_{GPL} = 0.1$	$W_{GPL} = 0.3$	$W_{GPL} = 0.5$	الگو
(/)	(/)	(/)	(/)	(/)
۳۸/۱۴۴	۴۰/۲۸۸	۴۲/۴۷۶	۴۳/۶۳۳	X
۳۸/۱۴۴	۳۸/۱۸۷	۳۸/۲۷۴	۳۸/۳۶۰	U
۳۸/۴۴	۳۶/۰۵۱	۳۳/۹۳۲	۳۲/۸۷۸	O

۳-۷- تأثیر نسبت طول به ضخامت تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی

مسیر تعادل پس‌کمانش برای ورق‌های مدرج تابعی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی با نسبت ابعادی برابر ۴ در شکل ۶ ترسیم شده است. نتایج نشان می‌دهد، اثر تغییرات نسبت طول به ضخامت نانوپلاکت‌های گرافن بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی به نوع آرایش تقویت‌کننده بستگی دارد. ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل U با توجه به توزیع یکنواخت تقویت‌کننده‌ها افزایش نسبت طول به ضخامت نانوپلاکت‌های گرافن تأثیری بر مقاومت پس‌کمانشی ورق‌ها ندارد و در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X و O مقاومت پس‌کمانشی ورق‌ها به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود تغییرات مسیر تعادل پس‌کمانش برای مقادیر نسبت طول به ضخامت نانوپلاکت‌های گرافن بالاتر از ۱۰۰۰ بسیار کم است. الگو توزیع یکنواخت نسبت به تغییر پارامترهای مؤثر تا حد زیادی بی‌تفاوت است و به نظر می‌رسد از منظر مدل‌سازی این نوع الگو خیلی مناسب نباشد اما از طرفی به دلیل امکان اجرا آسان‌تر در شرایط ساخت می‌تواند همچنان مورد توجه باشد.

شرایط مرزی ساده-گیردار-ساده-گیردار، ساده-ساده-گیردار-گیردار و چهار طرف ساده قرار می‌گیرند.

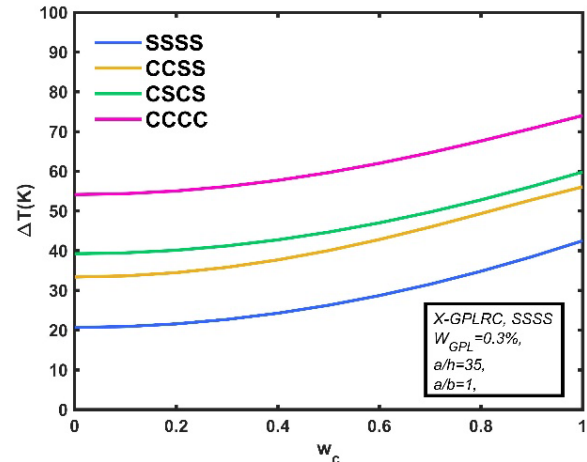
- ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X، U و O به ترتیب مسیر پس‌کمانش بالاتری را طی می‌کنند.
- توزیع مدرج تابعی تقویت‌کننده‌ها تنها در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X دمای کمانش بحرانی و مقاومت پس‌کمانش حرارتی را افزایش می‌دهد.
- افزایش کسر وزنی تقویت‌کننده‌ها، دمای کمانش بحرانی و مقاومت پس‌کمانش حرارتی را در ورق‌های تقویت‌شده به شکل X و U به ترتیب افزایش و کاهش می‌دهد و در توزیع یکنواخت اثری ندارد.
- هرچه ورق بزرگ‌تر یا نازک‌تر شود، دما و بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد.
- برای نانوپلاکت‌های گرافن با نسبت طول به ضخامت بیشتر از ۱۰۰۰ مسیر پس‌کمانش تقریباً ثابت است.

۵- ضمایم

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} u_{mj} + \frac{1}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} \right) \\
 & + a_{12} \lambda_2 \left(\sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} v_{mn} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{in} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} \right) \\
 & + a_{66} \lambda_2 \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} u_{in} + \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} v_{mn} \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} w_{in} \right) = 0 \\
 & a_{66} \left(\lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} u_{mn} + \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{n=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} \right) \\
 & + a_{12} \lambda_2 \left(\sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} u_{mn} + \frac{1}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} \right) \\
 & + a_{22} \lambda_2^2 \left(\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} v_{in} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} w_{in} \right) = 0
 \end{aligned}$$

(ج)

شکل (۶): تأثیر تغییرات نسبت‌های طول به ضخامت نانوپلاکت‌های گرافن بر مسیر تعادل پس‌کمانش: الف) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X؛ ب) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل U؛ ج) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل O.



شکل (۷): مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی برای ورق‌های مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی متفاوت.

مشاهده می‌شود ورق با شرایط مرزی چهار طرف ساده دارای مقاومت حرارتی پس‌کمانش کمتری است و به ترتیب پس‌از آن ورق با شرایط مرزی ساده-ساده-گیردار-گیردار، ساده-گیردار-ساده-گیردار و چهار طرف گیردار قرار می‌گیرند.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کمانش و پس‌کمانش نانورق‌های مدرج تابعی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن تحت تغییرات حرارت یکنواخت با سه نوع آرایش تقویت‌کننده X، U و O با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی و بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول بررسی شده است. به‌منظور دستیابی به بیشترین بار کمانش حرارتی، تأثیر نسبت طول به ضخامت و درصد حجمی نانوپلاکت‌های گرافن برای آرایش لایه‌ای متفاوت و شرایط مرزی مختلف بررسی شده است. درنهایت نتایج مفیدی به شرح زیر استخراج گردید:

- ورق‌ها با شرایط مرزی چهار طرف گیردار دمای کمانش بحرانی و مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی بالاتری دارند و بعداز آن به ترتیب ورق‌هایی با

- [6] Besharat Ferdosi S, Hassani B, Daneshvar A. Numerical simulation of buckling and postbuckling of single wall carbon nanotubes. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*.2015;5(1): 77-86. (in Persian) DOI 10.22044/JSFM.2015.426.
- [7] Khorshidi K, Ghasemi M, Fallah A. Buckling analysis of functionally graded rectangular microplate in thermal environment based on exponential shear deformation theory using the modified couple stress theory. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*.2018; 8(4): 179-196. (in Persian) DOI 10.22044/JSFM.2019.6612.2550.
- [8] Malekzadeh P. Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded arbitrary straight-sided quadrilateral plates using differential quadrature method. *Composite Structures*. 2011;93(4):1246-54. DOI 10.1016/j.compstruct.2010.10.014.
- [9] Wu H, Yang J, Kitipornchai S. Parametric instability of thermo-mechanically loaded functionally graded graphene reinforced nanocomposite plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018;135:431-40. DOI 10.1016/j.ijmecsci.2017.11.039.
- [10] Yang J, Chen D, Kitipornchai S. Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method. *Composite Structures*. 2018;193:281-94. DOI 10.1016/j.compstruct.2018.03.090.
- [11] Do VNV, Lee C-H. Thermal buckling analyses of FGM sandwich plates using the improved radial point interpolation mesh-free method. *Composite Structures*. 2017;177:171-86. DOI 10.1016/j.compstruct.2017.06.054.
- [12] Jiao P, Chen Z, Ma H, Zhang D, Ge P. Buckling analysis of thin rectangular FG-CNTRC plate subjected to arbitrarily distributed partial edge compression loads based on differential quadrature method. *Thin-Walled Structures*. 2019;145:106417. DOI 10.1016/j.tws.2019.106417.
- [13] Gholami R, Ansari R. Large deflection geometrically nonlinear analysis of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced polymer composite rectangular plates. *Composite Structures*.2017; 180: 760-771. DOI 10.1016/j.compstruct.2017.08.053.
- [14] Gholami R, Ansari R. Nonlinear harmonically excited vibration of third-order shear deformable functionally graded graphene platelet-reinforced composite rectangular plates. *Engineering Structures*.2018; 156: 197-209. DOI 10.1016/j.engstruct.2017.11.019.

$$\begin{aligned}
 & a_{55} \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} W_{mj} + \lambda_4 \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} \varphi_{xmj} \right) \\
 & + a_{44} \lambda_2 \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} + \lambda_4 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} \varphi_{yin} \right) \\
 & + \left\{ \frac{a_{11}}{\lambda_1} \left[\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} u_{mj} + \frac{1}{2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} W_{mj} \right)^2 \right] \right. \\
 & + \frac{a_{12} \lambda_2}{\lambda_1} \left[\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} v_{in} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \left(\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} W_{in} \right)^2 \right] - p_x^T \left. \right\} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} W_{mj} \\
 & + \left\{ \frac{a_{12}}{\lambda_1} \left[\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} u_{mj} + \frac{1}{2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} W_{mj} \right)^2 \right] \right. \\
 & + \frac{a_{22} \lambda_2}{\lambda_1} \left[\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} v_{in} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \left(\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} W_{in} \right)^2 \right] - p_y^T \left. \right\} \lambda_2^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} \\
 & + 2a_{66} \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} u_{in} + \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} v_{mj} \right. \\
 & + \left. \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} W_{mj} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} W_{in} \right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} W_{mn} = 0 \\
 & d_{11} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} \varphi_{xmj} + d_{12} \lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} \varphi_{ymn} \\
 & + d_{66} \lambda_2 \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} \varphi_{xin} + \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} \varphi_{ymn} \right) \\
 & - a_{55} \lambda_1 \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} W_{mj} + \lambda_4 \varphi_{xij} \right) = 0 \\
 & d_{66} \left(\lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} \varphi_{xmn} + \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} \varphi_{ymj} \right) \\
 & + d_{12} \lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} \varphi_{xmn} + d_{22} \lambda_2^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} \varphi_{yin} \\
 & - a_{44} \lambda_1 \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} W_{in} + \lambda_4 \varphi_{yij} \right) = 0 \quad (\text{الف-۱})
 \end{aligned}$$

۶- مراجع

- [1] Shen M, Bever MB. Gradients in polymeric materials. *Materials Science*. 1972:741-6. DOI 10.1007/BF00549902.
- [2] Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites Part B*. 1997:1-4. DOI: 10.1016/S1359-8368(96)00016-9.
- [3] Na K-S, Kim J-H. Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*. 2004;35(5):429-37. DOI 10.1016/j.compositesb.2003.11.013.
- [4] Ganapathi M, Prakash T. Thermal buckling of simply supported functionally graded skew plates. *Composite Structures*. 2006;74(2):247-50. DOI 10.1016/j.compstruct.2005.04.004.
- [5] Shaterzadeh A. Thermo-mechanical buckling analysis of FGM plates with circular cut out. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*.2015;5(2):97-107.(in Persian) DOI 10.22044/JSFM.2015.431.

- [15] Gholami R, Ansari R. Asymmetric nonlinear bending analysis of polymeric composite annular plates reinforced with graphene nanoplatelets. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*.2019; 17(1): 45-63. DOI 10.1615/IntJMultCompEng.2019029156.
- [17] Ansari R, Hassani R, Gholami R, Rouhi H. Thermal postbuckling analysis of FG-CNTRC plates with various shapes and temperature-dependent properties using the VDQ-FEM technique. *Aerospace Science and Technology*.2020; 106: 106078. DOI 10.1016/j.ast.2020.106078.
- [18] Gholami R, Ansari R. Thermal Postbuckling of Temperature-Dependent Functionally Graded Nanocomposite Annular Sector Plates Reinforced by Carbon Nanotubes. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*.2021; 21(2): 2150026. DOI 10.1142/S0219455421500267.
- [19] Wu H, Kitipornchai S, Yang J. Thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene nanocomposite plates. *Materials & Design*.2017; 132: 430-441. DOI 10.1016/j.matdes.2017.07.025.
- [20] Rafiee MA, Rafiee J, Wang Z, Song H, Yu Z-Z, Koratkar N. Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content. *ACS Nano*.2009; 3(12): 3884-3890. DOI 10.1021/nn9010472.
- [21] Yasmin A, Daniel IM. Mechanical and thermal properties of graphite platelet/epoxy composites. *Polymer*.2004; 45(24): 8211-8219. DOI 10.1016/j.polymer.2004.09.054.
- [22] Bellman R, Kashef BG, Casti J. Differential quadrature A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Computational Physics*. 1971:40-52. DOI 10.1016/0021-9991(72)90089-7.
- [23] Na K-S, Kim J-H. Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2006;42(8-9):749-56. DOI 10.1016/j.finel.2005.11.005.