



Robust Adaptive Backstepping Control of Automated Vehicle Convoys in the Presence of Combined Actuator Fault, Parameter Uncertainties, and External Disturbance by Considering Speed Constraints

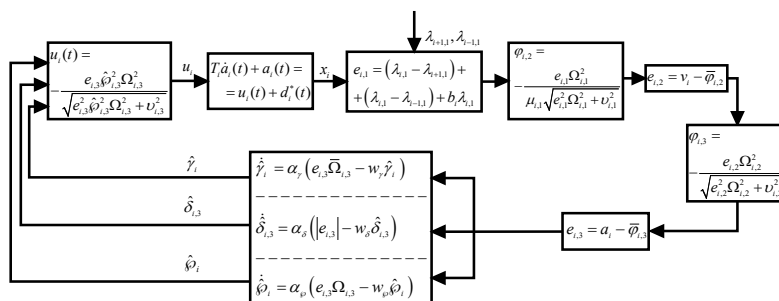
Hossein Chehardoli

Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran

HIGHLIGHTS

- The stability of the vehicle is achieved under the robust adaptive controller in the presence of actuator fault, uncertain dynamics, and external disturbance.
- The actuator fault is a combination of weakened control effort and actuator disturbance.
- The backstepping approach is utilized to construct the Lyapunov function.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 5 June 2023

Received in revised form: 29 June 2023

Accepted: 16 August 2023

Available online: 19 September 2023

*Correspondence:

h.chehardoli@abru.ac.ir

How to cite this article:

H. Chehardoli. Robust adaptive backstepping control of automated vehicle convoys in the presence of combined actuator fault, parameter uncertainties, and external disturbance by considering speed constraints. Journal of Aerospace Mechanics. 2023; 19(4):119-133.

Keywords:

Combined actuator fault

Parameter uncertainty

Adaptive backstepping approach

Lyapunov function

Stability

ABSTRACT

This paper deals with the robust-adaptive backstepping control of heterogeneous self-driving vehicle groups in the presence of actuator fault, model uncertainty, and external disturbance concerning group speed constraints. The actuator fault is a combination of descending control law and the actuator disturbance. A third-order dynamical model is utilized to describe the longitudinal motion of each vehicle in which the engine time constant is unknown and the external disturbance is considered. The communication structure is assumed to be bi-directional leader-following. The control design is performed in three levels: speed level, acceleration level, and the final level. At the first level, the error is defined as the difference between the actual position and the desired position of each following vehicle. After that, by employing the Lyapunov theorem, a virtual control law is introduced to make the tracking error bounded. In the second and third levels, the error respectively is defined as the difference between speed and acceleration and the virtual control law of the previous level. Finally, a Lyapunov function involving the state errors of all levels and the estimation errors of the third level is defined and an adaptive control is introduced such that the tracking error and the estimation errors will be bounded. Numerical results are provided to show the merits of this method.



کنترل گام به عقب تطبیقی مقاوم یک دسته خودرو خودران در حضور عیب عملگری ترکیبی، عدم قطعیت ساختاری و اغتشاش خارجی با لحاظ قید سرعت

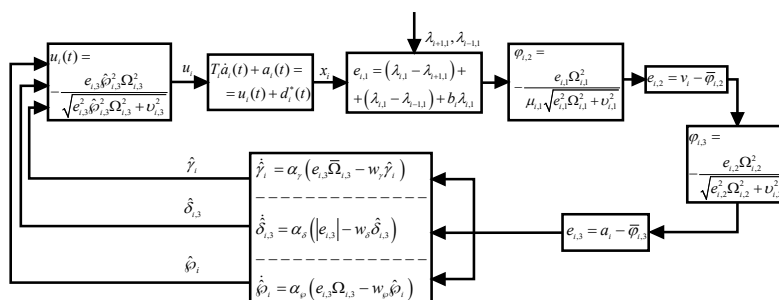
حسین چهاردولی

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آیت ... بروجردی، بروجرد، ایران

چکیده گرافیکی

برجسته‌ها

- کنترل تطبیقی مقاوم ارائه شده پایداری گروه را با وجود عیب عملگری، عدم قطعیت مدل، اغتشاش خارجی و قید سرعت تضمین می‌کند.
- عیب عملگری به صورت ترکیبی از تضعیف قانون کنترلی و اغتشاش عملگری در نظر گرفته شده است.
- از روش گام به عقب برای ساختن تابع لیاپانوف استفاده شده است.



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۱۵

بازنگری: ۱۴۰۲/۰۴/۰۸

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۲۵

ارائه برخط: ۱۴۰۲/۰۶/۲۸

*نویسنده مسئول:

h.chehardoli@abru.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

عیب عملگری ترکیبی

عدم قطعیت مدل

روش گام به عقب تطبیقی

تابع لیاپانوف

پایداری

چکیده

این مقاله به کنترل گام به عقب تطبیقی مقاوم گروه‌های خودرویی ناهمگن خودران در حضور عیب عملگری، عدم قطعیت مدل، اغتشاش خارجی و با لحاظ قید روی سرعت گروه می‌پردازد. عیب عملگری به صورت ترکیبی از تضعیف قانون کنترلی و اغتشاش عملگری در نظر گرفته می‌شود. یک مدل مرتبه سه برحسب موقعیت برای توصیف حرکت طولی هر خودرو استفاده می‌شود که در آن، ثابت موتور نامعلوم فرض می‌شود و اثر اغتشاش دینامیکی نیز لحاظ می‌گردد. همچنین، ساختار ارتباطی گروه به صورت دوسویه رهبر-پیرو فرض می‌شود. به کمک روش گام به عقب و در سه مرحله تابع لیاپانوف ساخته می‌شود: مرحله سرعت، مرحله شتاب و مرحله پایانی. در مرحله اول، خطا به صورت تفاضل وزنی موقعیت هر خودرو با موقعیت مطلوب آن تعریف می‌شود. سپس به کمک قضیه لیاپانوف، یک قانون کنترل مجازی که متضمن کران‌دار بودن خطای فاصله است به دست می‌آید. در مراحل دوم و سوم، خطا به ترتیب برابر تفاضل سرعت و شتاب با کنترلر مجازی مرحله قبل تعریف می‌شود. در نهایت، یک تابع لیاپانوف که دربرگیرنده خطاهای هر سه مرحله و خطای تخمین است تعریف می‌گردد و به کمک آن، یک قانون کنترلی به‌گونه‌ای به دست می‌آید که دامنه خطای تخمین و خطای فاصله کران‌دار و در نتیجه گروه خودرو پایدار باشد. شبیه‌سازی‌های متعددی برای اعتبارسنجی روش مزبور ارائه خواهند شد.

۱- مقدمه

و ایمنی گروه‌های خودرویی طراحی می‌شوند در برابر عیب عملگری آسیب‌پذیر هستند [۱۷].

عمده روش‌های ارائه‌شده برای کنترل حرکت گروهی خودروهای خودران مبتنی بر کنترل خطی و مدل خطی خودرو استوار هستند [۵، ۱۸، ۱۹]. مدل طولی یک خودرو به‌واسطه عوامل غیرخطی متعددی همچون موتور، سیستم هدایت و سیستم انتقال یک دینامیک غیرخطی است [۲۰]؛ بنابراین، برخی مقالات از ایده خطی سازی با فیدبک^{۱۷} استفاده کرده‌اند تا اثرات غیرخطی مزبور را حذف کنند [۲۱، ۲۲]. در تمامی این مقالات فرض بر آن شده است که عبارات غیرخطی به‌طور دقیق در دسترس و قابل اندازه‌گیری هستند. فرضی که در عمل چندان دقیق نمی‌باشد؛ بنابراین، روش‌های کنترل تطبیقی^{۱۸} و روش‌های تخمین پارامتر ایده‌های مؤثری در کنترل سیستم‌های خودرویی در حضور عدم قطعیت ساختاری هستند [۲۲]. از سویی دیگر، با توجه به اینکه اکثر مانورهای یک گروه خودرو در سرعت ثابت انجام می‌شوند، اغتشاشات خارجی که عمدتاً توابعی از سرعت خودرو هستند توابعی قطعه‌ای ثابت^{۱۹} خواهند بود [۲۳].

تحقیقات متعددی در زمینه بررسی اثر عیب عملگر بر پایداری یک گروه خودرو خودران صورت گرفته است. در [۲۴] اثر عیب عملگری ناشی از حمله سایبری بر پایداری گروه موردبررسی قرار گرفته است. دینامیک هر خودرو مرتبه دو و کاملاً خطی فرض شده است. ترکیب کنترل مود لغزشی با شبکه عصبی مصنوعی برای مدل غیرخطی مرتبه دو با لحاظ عیب عملگری در [۲۵] ارائه شده است. یک روش فازی مبتنی بر کنترلر مود لغزشی برای جبران عیوب عملگری و تضمین پایداری مدل مرتبه دو در [۲۶] بررسی شده است. در [۲۷] مسئله کنترل زمان محدود^{۲۰} یک گروه غیرخطی مرتبه دو با روش مود لغزشی تطبیقی و ساختار یک‌سویه متمرکز

سیستم‌های حمل‌ونقل هوشمند^۱ به‌واسطه قابلیت بالا در کاهش ترافیک، کاهش آلودگی و افزایش ایمنی در سال‌های اخیر مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته‌اند [۱-۳]. حرکت گروهی خودروهای خودران^۲ ابزاری مفید برای پیاده‌سازی عملی یک سیستم حمل‌ونقل هوشمند است [۴]. هدف اصلی در حرکت گروهی خودروهای خودران آن است که خودروهای پیرو^۳ سرعت و شتاب خودرو رهبر^۴ را با حفظ فاصله ایمن تعقیب نمایند [۵]؛ بنابراین، عملکرد گروه‌های هوشمند خودرو نقش مؤثری در افزایش ایمنی، کاهش آلودگی و مصرف سوخت و مدیریت زمان دارد [۶، ۷].

تبادل اطلاعات بین خودروها به دو روش صورت می‌گیرد: ۱. ارسال اطلاعات مطلق توسط شبکه بی‌سیم که متداول‌ترین ساختار آن ونت^۵ می‌باشد و ۲. اندازه‌گیری نسبی توسط سنسورهای محلی^۶ هر خودرو [۸، ۹]؛ بنابراین، ساختار ارتباطی نقشی مؤثر در عملکرد کنترلر دارد. متداول‌ترین ساختارهای ارتباطی به‌صورت یک‌سویه^۷، دوسویه^۸ و چند پیشرو^۹ هستند که هر یک می‌تواند متمرکز^{۱۰} یا نامتمرکز^{۱۱} باشد [۱۰، ۱۱].

در بسیاری از کاربردهای عملی همچون رباتیک، مکاترونیک، سیستم‌های چندعاملی^{۱۲}، صنایع هوایی و ... عملگرها به‌طور اجتناب‌ناپذیری در معرض عیب^{۱۳} و خرابی^{۱۴} قرار دارند [۱۲]. این دو پدیده باعث می‌شوند فرمان‌های کنترلی به‌طور ناقص بر سیستم اعمال شوند و در نتیجه، به‌طور چشمگیری می‌توانند عملکرد مؤثر یک گروه خودرو را مخدوش کرده و پایداری و ایمنی آن را کاهش دهند [۱۳، ۱۴]. منشأ این دو اثر می‌تواند فرسودگی، نقص ساختاری و حتی حملات سایبری^{۱۵} باشد [۱۵، ۱۶]. کنترلرهای توزیع‌شده همکار^{۱۶} که برای تضمین پایداری داخلی، پایداری رشته‌ای، مقیاس‌پذیری

11 Decentralized

12 Multi-agent systems

13 Fault

14 Failure

15 Cyber attacks

16 Distributed cooperative controller

17 Feedback linearization

18 Adaptive

19 Partially constant

20 Finite time stability

1 Intelligent transportation systems (ITS)

2 Autonomous vehicles

3 Following vehicles

4 Leading vehicle

5 VANET

6 Onboard sensors

7 Uni-directional

8 Bi-directional

9 Multi-predecessors

10 Centralized

در نتیجه، تضمین پایداری سیستم حلقه بسته استفاده می‌گردد. به کمک روش گام به عقب، در هر مرحله یک قانون مجازی پایدارساز طراحی می‌گردد. در مرحله بعد، با تعریف خطا به عنوان تفاضل متغیر حالت آن مرحله و تابع پایدارساز مرحله قبل، دینامیک خطا تشکیل می‌شود. در مرحله آخر که عدم قطعیت، عیب عملگری و نیز اغتشاش دینامیکی ظاهر می‌شوند، یک قانون کنترلی تطبیقی-مقاوم به گونه‌ای ارائه خواهد شد که با تخمین کران بالای عیب عملگری، اغتشاش و معکوس ثابت زمانی، پایداری گروه خودرو را تضمین نماید. اثبات می‌شود تحت کنترلر مزبور و قوانین تطبیقی ارائه شده، خطای فاصله هر خودرو کران دار بوده و به یک محدوده کوچک در همسایگی صفر خواهد رسید. همچنین، علاوه بر اینکه هر خودرو پیرو پروفایل سرعت خودرو راهنما را دنبال می‌کند، یک فاصله ایمن نیز با خودرو جلو خواهد داشت. به منظور اعتبارسنجی این روش، شبیه‌سازی‌های متعددی مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

ادامه این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است. در قسمت ۲ به معرفی مسئله و ارائه مقدمات مورد نیاز پرداخته شده است. در قسمت ۳، طراحی کنترلر و شرح مراحل آن بیان شده است. در قسمت ۴، نتایج شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته‌اند و در نهایت مقاله در قسمت ۵ جمع‌بندی شده است.

۲- مقدمات ریاضی و توصیف مسئله

در این قسمت، مقدمات ریاضی لازم برای طراحی کنترلر و تحلیل پایداری سیستم ارائه می‌گردد. سپس به توصیف مسئله پرداخته می‌شود.

۲-۱- تئوری گراف

ساختار ارتباطی یک گروه خودرو خودران را می‌توان به کمک یک گراف مدل کرد. هر رأس معرف یک خودرو و هر یال نیز بیانگر ارتباط دو خودرو می‌باشد. این گراف به صورت $G = (W, \mathcal{E}, C)$ نمایش داده می‌شود که در آن

حل شده است. برای تخمین عیب عملگر، یک مشاهده‌گر در [۲۸] طراحی شده است. سپس با ترکیب دو روش گام به عقب و شبکه عصبی مصنوعی، یک کنترلر غیرخطی برای تضمین پایداری طراحی شده است. یک کنترلر مود لغزشی برای یک شبکه خودرویی متمرکز با عیب عملگری چندگانه در [۲۹] طراحی شده است که قیود مدنظر روی خطای فاصله را برآورده سازد. یک کنترلر مقاوم در برابر عیب^۱ برای یک شبکه خودرویی متمرکز مرتبه دو در [۳۰] معرفی شده است. سپس به کمک تئوری لیاپانوف، کران دار بودن خطای فاصله تمامی خودروهای پیرو اثبات شده است. از یک دیدگاه متفاوت، روشی کاربردی برای مقابله با عیب عملگری بر کارکرد یک گروه خودرو هوشمند، تخمین و پیش‌بینی مدل رفتاری عیب عملگری می‌باشد [۳۱].

در تحقیقات گذشته، مسئله کنترل حرکت گروهی خودروهای خودران با ساختار دوسویه و با لحاظ: ۱. دینامیک مرتبه سه هر خودرو، ۲. تحت عدم قطعیت ساختاری (نامشخص بودن ثابت موتور)، ۳. عیب عملگری (ترکیب هر دو اثر تضعیف قانون کنترلی و اغتشاش عملگری)، ۴. اغتشاش دینامیکی (اعمالی به خودرو) و ۵. با لحاظ قید روی سرعت گروه مورد بررسی قرار نگرفته است. هدف این تحقیق طراحی یک کنترلر تطبیقی-مقاوم به منظور تضمین تعقیب حرکت رهبر توسط خودروهای پیرو در یک گروه خودرو خودران می‌باشد. ساختار ارتباطی گروه به صورت دوسویه رهبر-پیرو^۲ انتخاب می‌گردد. یک مدل مرتبه سه برای توصیف حرکت طولی هر خودرو در نظر گرفته می‌شود که برخلاف تحقیقات پیشین، حاوی هر دو عامل عدم قطعیت و اغتشاش خارجی می‌باشد. عدم قطعیت مربوط به نامشخص بودن ثابت موتور و اغتشاش خارجی مربوط به نیروهای آئرو دینامیکی و مقاومت غلتشی^۳ هستند. مدل عیب عملگری از نوع ترکیب تضعیف عملکرد و اغتشاش عملگری در نظر گرفته می‌شود؛ یعنی، فرمان‌های تولیدی توسط کنترلر، به صورت تضعیف شده و به همراه اغتشاش به سیستم اعمال می‌شوند. از تئوری لیاپانوف^۴ به همراه روش گام به عقب^۵ برای استخراج قانون کنترلی و

⁴ Lyapunov theorem

⁵ Backstepping

¹ Fault-tolerant control

² Leader-follower

³ Rolling resistance

که موقعیت اولیه خودرو i -ام و v_{\max} سرعت بیشینه گروه است. در ادامه کار، تعریف $f_i(t) \triangleq v_{\max}t + x_{i,0}$ در نظر گرفته می‌شود.

عیب عملگری باعث افت کارایی هر خودرو پیرو می‌شود. در این مقاله، عیب عملگری ترکیبی از دو نوع تضعیف قانون کنترلی و اغتشاش عملگری می‌باشد. این مدل به شرح (۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{\theta}_i(t) = \kappa_i u_i(t) + \bar{u}_i(t) \quad (5)$$

که $\kappa_i \in (0, 1]$ مقداری نامشخص است و $\bar{u}_i(t)$ تابعی نامعلوم، قطعه‌ای پیوسته و کران‌دار است. بسته به مقادیر κ_i و $\bar{u}_i(t)$ ، چهار حالت قابل تصور است:

(۱) $\kappa_i = 1$ و $\bar{u}_i(t) = 0$ که بیانگر عدم عیب عملگری است.

(۲) $0 < \kappa_i < 1$ و $\bar{u}_i(t) = 0$ که بیانگر عیب از جنس تضعیف قانون کنترلی است.

(۳) $\kappa_i = 1$ و $\bar{u}_i(t) \neq 0$ که بیانگر عیب از جنس اغتشاش عملگری است.

(۴) $0 < \kappa_i < 1$ و $\bar{u}_i(t) \neq 0$ که بیانگر عیب عملگری ترکیبی ناشی از تضعیف قانون کنترلی و اغتشاش عملگری است.

با لحاظ عیب عملگری (۵)، معادله (۲) به صورت (۶) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = a_i(t) \\ \dot{a}_i(t) = \theta_i (\kappa_i u_i(t) + \bar{u}_i(t)) - \theta_i a_i(t) + d_i(t) \end{cases} \quad (6)$$

فرض ۱. اغتشاشات دینامیکی $d_i(t)$ و عملگری $\bar{u}_i(t)$ کران‌دار هستند. به عبارت دیگر، $|d_i(t)| \leq D_{i,\max}$ و $|\bar{u}_i(t)| \leq \bar{u}_{i,\max}$

فرض ۲. ساختار شبکه ارتباطی گروه خودرو به صورت دوسویه رهبر-پیرو در نظر گرفته می‌شود که ارسال اطلاعات بین خودروها توسط سیستم بی‌سیم صورت می‌پذیرد. این ساختار در شکل ۱ به تصویر کشیده شده است.

$W = \{1, 2, \dots, N\}$ مجموعه رئوس، $\mathcal{E} \in W \times W$ مجموعه یال‌ها و ماتریس مربعی $C_{N \times N}$ ماتریس مجاورت^۱ گراف نامیده می‌شود. اگر خودرو i -ام از خودرو j -ام اطلاعات دریافت کند یا به عبارت دیگر $(i, j) \in \mathcal{E}$ ، آنگاه $c_{ij} > 0$ و در غیر این صورت $c_{ij} = 0$. اگر $c_{ij} = c_{ji}$ ، آنگاه گراف غیرجهت‌دار^۲ و در غیر این صورت جهت‌دار^۳ خواهد بود. ماتریس لاپلاسیان^۴ شبکه به صورت $L = [l_{ij}]$ ، $l_{ii} = \sum_{j=1}^N c_{ij}$ ، $l_{ij} = -c_{ij}$ می‌باشد. همچنین، ماتریس مجاورت خودرو رهبر به صورت $B = [b_{ij}]$ ، $b_{ii} = c_{i0}$ ، $b_{ij} = 0$ تعریف می‌گردد.

۲-۲- توصیف مسئله

یک گروه شامل $N+1$ خودرو خودران در حرکت طولی مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. گروه شامل یک خودرو رهبر و N خودرو پیرو است. در این شکل، l_i معرف طول خودرو i -ام و D_s فاصله ایمن بین خودرویی است. با لحاظ اغتشاش دینامیکی، حرکت هر خودرو پیرو از مدل (۱) تبعیت می‌کند [۳۳، ۳۲، ۱۸]:

$$T_i \dot{a}_i(t) + a_i(t) = u_i(t) + d_i^*(t) \quad (1)$$

که T_i ثابت زمانی^۵ موتور، a_i شتاب، u_i ورودی کنترلی و $d_i^*(t)$ اغتشاش خارجی اعمالی به خودرو می‌باشد. فرض می‌کنیم ثابت زمانی موتور نامعلوم باشد. معادله (۱)، در فرم فضای حالت به صورت (۲) قابل بیان است ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = a_i(t) \\ \dot{a}_i(t) = \theta_i u_i(t) - \theta_i a_i(t) + d_i(t) \end{cases}, \quad y_i(t) = x_i(t) \quad (2)$$

که $\theta_i = 1/T_i$ ، $d_i(t) = d_i^*(t)/T_i$ ، x_i موقعیت و v_i سرعت خودرو i -ام می‌باشند. همچنین، دینامیک خودرو رهبر به صورت رابطه (۳) است.

$$\dot{a}_0(t) = u_0(t) \quad (3)$$

که $u_0(t)$ تابعی مشخص برحسب زمان است. فرض می‌شود سرعت خودروها به صورت رابطه (۴) مقید شده باشد.

$$v_i(t) \leq v_{\max} \Rightarrow y_i \leq v_{\max}t + x_{i,0} \quad (4)$$

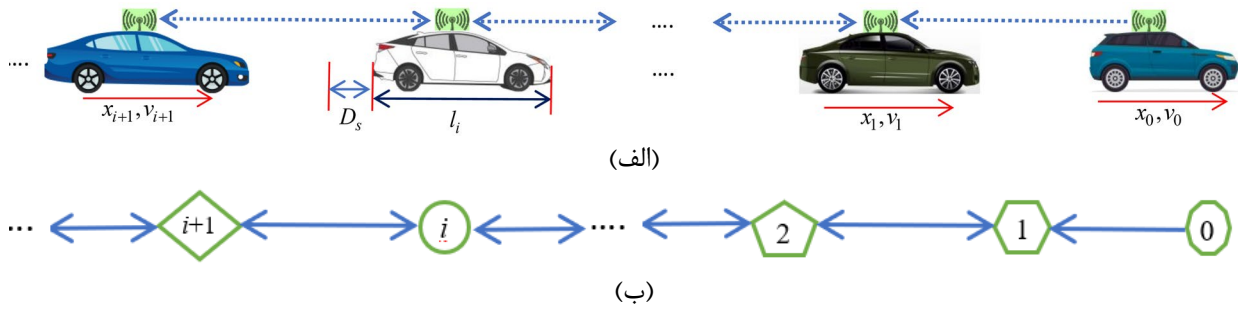
⁴ Laplacian matrix

⁵ Time constant

¹ Adjacency matrix

² Undirected

³ Directed



شکل (۱): الف) یک گروه خودرو خودران ناهمگن با ساختار دوسویه رهبر-پیرو؛ ب) گراف ارتباطی.

$$y_{i,d} = \int_0^t v_0 dt + x_{i,0}, \tag{11}$$

$$x_{i,0} = -\sum_{j=0}^{i-1} l_j - iD_s - \bar{x}_{i,0},$$

که $\bar{x}_{i,0}$ مقداری مثبت، وابسته به موقعیت اولیه و متفاوت برابر هر خودرو است به نحوی که $\bar{x}_{i+1,0} > \bar{x}_{i,0}$. مشتق زمانی $\lambda_{i,1}(t)$ در امتداد (۲) به صورت (۱۲) قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{i,1} &= \mu_{i,1} \dot{y}_i - \mu_{i,d} \dot{y}_{i,d} \\ &= \mu_{i,1} v_i - \mu_{i,d} \dot{y}_{i,d} \end{aligned} \tag{12}$$

$$= \mu_{i,1} v_i - b_i \mu_{i,d} \dot{y}_{i,d} + (b_i - 1) \mu_{i,d} \dot{y}_{i,d}$$

در رابطه (۱۲)، $\mu_{i,1} = \frac{f_i^2(t) + y_i^2}{(f_i^2(t) - y_i^2)^2} > 0$ و

$$\mu_{i,d} = \frac{f_i^2(t) + y_{i,d}^2}{(f_i^2(t) - y_{i,d}^2)^2} > 0$$

۳- طراحی کنترلر

در این قسمت به طراحی یک کنترلر تطبیقی-مقاوم^۱ برای گروه خودرویی (۱) در حضور: عدم قطعیت ساختاری (نامعلوم بودن ثابت زمانی موتور)، اغتشاش دینامیکی، عیب عملکردی ترکیبی و قید سرعت پرداخته می‌شود. طراحی کنترلر در سه مرحله صورت می‌پذیرد.

مرحله ۱. در این مرحله، اولین معادله از (۶) برای تمامی خودروهای پیرو در نظر گرفته می‌شود و خطا به صورت (۱۳) تعریف می‌شود:

$$e_{i,1} = (\lambda_{i,1} - \lambda_{i+1,1}) + (\lambda_{i,1} - \lambda_{i-1,1}) + b_i \lambda_{i,1} \tag{13}$$

لم ۱ [۳۴]. به ازای مقادیر ثابت $u > 0$ و $z \in \mathbb{R}$ ، نامساوی (۷) را می‌توان نوشت:

$$0 \leq |z| - \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + u^2}} < u \tag{7}$$

لم ۲. برای تابع $\gamma(y) = y / (f_i^2 - y^2)$ رابطه (۸) برقرار است:

$$|\gamma(y_a) - \gamma(y_b)| \geq \frac{1}{f_i^2} |y_a - y_b| \tag{8}$$

اثبات. با مشتق‌گیری از $\gamma(y)$ نسبت به y رابطه $d\gamma(y)/dy = (f_i^2 + y^2) / (f_i^2 - y^2)^2$ حاصل می‌گردد. همچنین، بدیهی است که $(f_i^2 - y^2) \leq f_i^2$. در نتیجه، می‌توان نوشت: $d\gamma(y)/dy \geq (f_i^2 + y^2) / f_i^4 \geq 1 / f_i^2$ که منجر به رابطه (۸) می‌گردد.

لم ۳: نامساوی یانگ [۳۴]. به ازای مقادیر حقیقی و دلخواه a و b نامساوی (۹) برقرار است:

$$ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \tag{9}$$

تعریف. توابع $\lambda_{i,1}$ و γ_i که در روال طراحی کنترلر و تحلیل پایداری در قسمت بعد به کار می‌روند به شرح (۱۰) تعریف می‌شوند که $y_{i,d}(t)$ خروجی مطلوب i -امین خودرو است و به صورت (۱۱) تعریف می‌گردد.

$$\gamma_i(t) = \frac{y_i(t)}{f_i^2(t) - y_i^2(t)}, \tag{10}$$

$$\lambda_{i,1}(t) = \frac{y_i(t)}{f_i^2(t) - y_i^2(t)} - \frac{y_{i,d}(t)}{f_i^2(t) - y_{i,d}^2(t)}$$

¹ Robust-adaptive

از لم ۱ می توان نوشت:

$$\mu_{i,1}e_{i,1}\varphi_{i,2} = -\frac{e_{i,1}^2\Omega_{i,1}^2}{\sqrt{e_{i,1}^2\Omega_{i,1}^2 + v_{i,1}^2}} \leq v_{i,1} - e_{i,1}\Omega_{i,1} \quad (21)$$

جایگذاری روابط (۲۰) و (۲۱) در (۱۹) منجر به رابطه (۲۲) خواهد شد:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\sum_{i=1}^N \varepsilon_{i,1}e_{i,1}^2 - \sum_{i=1}^N \mu_{i,1}^2e_{i,1}^2 + \\ & + \sum_{i=1}^N \mu_{i,1}e_{i,1}(v_i - \varphi_{i,2}) + 2\sum_{i=1}^N v_{i,1} \end{aligned} \quad (22)$$

مرحله ۲. در این مرحله، خطا به صورت $e_{i,2} = v_i - \bar{\varphi}_{i,2}$ تعریف می شود که $\bar{\varphi}_{i,2}$ خروجی فیلتر مرتبه اول (۲۳) است:

$$\eta_{i,2}\dot{\bar{\varphi}}_{i,2} + \bar{\varphi}_{i,2} = \varphi_{i,2} \quad (23)$$

و $\eta_{i,2}$ مقداری ثابت و مثبت است. تابع لیپانوف این مرحله به صورت (۲۴) تعریف می گردد:

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,2}^2 \quad (24)$$

مشتق زمانی از V_2 منجر به عبارت (۲۵) می شود:

$$\dot{V}_2 = -\sum_{i=1}^N e_{i,2}^2 + \sum_{i=1}^N e_{i,2}a_i + \sum_{i=1}^N e_{i,2}^2 - \sum_{i=1}^N e_{i,2}\dot{\bar{\varphi}}_{i,2} \quad (25)$$

از لم ۱ می توان نوشت:

$$e_{i,2}^2 \leq e_{i,2}\bar{\Omega}_{i,2} + v_{i,2} \quad (26)$$

جایگذاری (۲۶) در (۲۵) منجر به رابطه (۲۷) می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\sum_{i=1}^N \varepsilon_{i,2}e_{i,2}^2 - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^N e_{i,2}^2 + \sum_{i=1}^N e_{i,2}a_i + \\ & + \sum_{i=1}^N e_{i,2}\Omega_{i,2} + \sum_{i=1}^N v_{i,2} \end{aligned} \quad (27)$$

که $\Omega_{i,2} = \varepsilon_{i,2}e_{i,2} + \frac{1}{2}e_{i,2} + \bar{\Omega}_{i,2} - \dot{\bar{\varphi}}_{i,2}$ در این مرحله، قانون کنترلی مجازی به صورت (۲۸) انتخاب می شود:

$$\varphi_{i,3} = -\frac{e_{i,2}\Omega_{i,2}^2}{\sqrt{e_{i,2}^2\Omega_{i,2}^2 + v_{i,2}^2}} \quad (28)$$

به کمک لم ۱ می توان نوشت:

$$e_{i,2}\varphi_{i,3} = -\frac{e_{i,2}^2\Omega_{i,2}^2}{\sqrt{e_{i,2}^2\Omega_{i,2}^2 + v_{i,2}^2}} \leq v_{i,2} - e_{i,2}\Omega_{i,2} \quad (29)$$

با استفاده از روابط (۲۸) و (۲۹)، مشتق تابع لیپانوف به صورت رابطه (۳۰) بازنویسی می گردد:

تابع لیپانوف این مرحله به صورت (۱۴) در نظر گرفته می شود:

$$V_1 = \frac{1}{2} \lambda_1^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \lambda_1 \quad (14)$$

که $\lambda_1 = [\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{N,1}]^T$ مشتق زمانی V_1 ، به صورت (۱۵) محاسبه می گردد:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^N \dot{\lambda}_{i,1} (2\lambda_{i,1} - \lambda_{i+1,1} - \lambda_{i-1,1}) + \sum_{i=1}^N b_i \lambda_{i,1} \dot{\lambda}_{i,1} = \\ &= \sum_{i=1}^N (2\lambda_{i,1} - \lambda_{i+1,1} - \lambda_{i-1,1} + b_i \lambda_{i,1}) \dot{\lambda}_{i,1} = \\ &= \sum_{i=1}^N e_{i,1} \dot{\lambda}_{i,1} \end{aligned} \quad (15)$$

با استفاده از (۱۲)، رابطه (۱۵) به صورت (۱۶) بیان خواهد شد:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^N \mu_{i,1}e_{i,1}v_i - \sum_{i=1}^N b_i \mu_{i,d}e_{i,1}\dot{y}_{i,d} + \\ &+ \sum_{i=1}^N (b_i - 1)\mu_{i,d}e_{i,1}\dot{y}_{i,d} \end{aligned} \quad (16)$$

نامساوی (۱۷) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \mu_{i,1}e_{i,1}^2 + (b_i - 1)\mu_{i,d}e_{i,1}\dot{y}_{i,d} &\leq \\ &\leq |e_{i,1}| (|\mu_{i,1}e_{i,1}| + |(b_i - 1)\mu_{i,d}\dot{y}_{i,d}|) \\ &\leq |e_{i,1}| \sqrt{\delta_i} \end{aligned} \quad (17)$$

که $\delta_i = 2 \left(\mu_{i,1}^4 e_{i,1}^2 + ((b_i - 1)\mu_{i,d}\dot{y}_{i,d})^2 \right)$ از لم ۱ می توان نوشت:

$$|e_{i,1}| \sqrt{\delta_i} \leq \gamma_{i,1} e_{i,1} \bar{\Omega}_{i,1} + v_{i,1} \quad (18)$$

که $\bar{\Omega}_{i,1} = e_{i,1} \delta_i / \sqrt{e_{i,1}^2 \delta_i + v_{i,1}^2}$ به کمک روابط (۱۷) و (۱۸)، مشتق تابع لیپانوف به صورت (۱۹) بازنویسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\sum_{i=1}^N \varepsilon_{i,1}e_{i,1}^2 - \sum_{i=1}^N \mu_{i,1}^2e_{i,1}^2 + \sum_{i=1}^N \mu_{i,1}e_{i,1}v_i + \\ & + \sum_{i=1}^N e_{i,1}\Omega_{i,1} + \sum_{i=1}^N v_{i,1} \end{aligned} \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)، $\Omega_{i,1} = \varepsilon_{i,1}e_{i,1} - b_i \mu_{i,d} \dot{y}_{i,d}$ قانون کنترلی مجازی این مرحله به صورت (۲۰) انتخاب می شود:

$$\varphi_{i,2} = -\frac{e_{i,1}\Omega_{i,1}^2}{\mu_{i,1}\sqrt{e_{i,1}^2\Omega_{i,1}^2 + v_{i,1}^2}} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -\sum_{i=1}^N \varepsilon_{i,3} e_{i,3}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,3}^2 + \\ & + \sum_{i=1}^N \left(e_{i,3} \theta_i \kappa_i u_i(t) + |e_{i,3}| \cdot |\theta_i \bar{u}_i + d_i| \right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i=1}^N e_{i,3} \Psi_{i,3} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_\gamma} \tilde{\gamma}_i \left(\dot{\gamma}_i - \alpha_\gamma e_{i,3} \bar{\Omega}_{i,3} \right) \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_\delta} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial_i}{\alpha_\phi} \tilde{\phi}_i \dot{\phi}_i + \sum_{i=1}^N v_{i,3} \gamma_i \\ \dot{\gamma}_i = & \alpha_\gamma \left(e_{i,3} \bar{\Omega}_{i,3} - w_\gamma \gamma_i \right) \end{aligned} \quad (38)$$

که مقدار مثبت است. از فرض ۱ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} |e_{i,3}| \cdot |\theta_i \bar{u}_i + d_i| & \leq |e_{i,3}| \left(\bar{\alpha}_i + \bar{d}_i \right) = \\ & = |e_{i,3}| \delta_i = |e_{i,3}| \left(\hat{\delta}_i - \tilde{\delta}_i \right) \end{aligned} \quad (39)$$

جایگذاری روابط (۳۸) و (۳۹) در رابطه (۳۷) منجر به رابطه (۴۰) خواهد شد:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -\sum_{i=1}^N \varepsilon_{i,3} e_{i,3}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,3}^2 + \\ & + \sum_{i=1}^N e_{i,3} \theta_i \kappa_i u_i(t) + \sum_{i=1}^N e_{i,3} \Omega_{i,3} + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_\delta} \tilde{\delta}_i \left(\dot{\delta}_i - \alpha_\delta |e_{i,3}| \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial_i}{\alpha_\phi} \tilde{\phi}_i \dot{\phi}_i - \\ & - \sum_{i=1}^N w_\gamma \tilde{\gamma}_i \dot{\gamma}_i + \sum_{i=1}^N v_{i,3} \gamma_i \end{aligned} \quad (40)$$

که $\hat{\delta}_i = \Psi_{i,3} + \text{sgn}(e_{i,3}) \Omega_{i,3}$. با استفاده از رابطه (۴۰)، قوانین به روزرسانی متغیرهای $\delta_{i,3}$ و ϕ_i به صورت روابط (۴۱) و (۴۲) تعریف می شوند:

$$\dot{\delta}_{i,3} = \alpha_\delta \left(|e_{i,3}| - w_\delta \hat{\delta}_{i,3} \right) \quad (41)$$

$$\dot{\phi}_i = \alpha_\phi \left(e_{i,3} \Omega_{i,3} - w_\phi \hat{\phi}_i \right) \quad (42)$$

که w_ϕ و w_δ مقادیری مثبت هستند. حال، قانون کنترلی خودرو i -ام به صورت رابطه (۴۳) انتخاب می گردد:

$$u_i(t) = -e_{i,3} \hat{\phi}_{i,3} \Omega_{i,3}^2 / \sqrt{e_{i,3}^2 \hat{\phi}_{i,3}^2 \Omega_{i,3}^2 + v_{i,3}^2} \quad (43)$$

از لم ۱ می توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} -e_{i,3} \theta_i \kappa_i u_i & = \theta_i \kappa_i \frac{e_{i,3}^2 \hat{\phi}_{i,3}^2 \Omega_{i,3}^2}{\sqrt{e_{i,3}^2 \hat{\phi}_{i,3}^2 \Omega_{i,3}^2 + v_{i,3}^2}} \leq \\ & \leq \frac{\sigma_i e_{i,3}^2 \hat{\phi}_{i,3}^2 \Omega_{i,3}^2}{\sqrt{e_{i,3}^2 \hat{\phi}_{i,3}^2 \Omega_{i,3}^2 + v_{i,3}^2}} \leq v_{i,3} \partial_i - e_{i,3} \partial_i \hat{\phi}_i \bar{\Omega}_{i,3} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\sum_{i=1}^N \varepsilon_{i,2} e_{i,2}^2 - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,2}^2 + \\ & + \sum_{i=1}^N e_{i,2} (a_i - \phi_{i,3}) + 2 \sum_{i=1}^N v_{i,2} \end{aligned} \quad (30)$$

مرحله ۳. در این مرحله، خطا به صورت $e_{i,3} = a_i - \bar{\phi}_{i,3}$ تعریف می شود که $\bar{\phi}_{i,3}$ خروجی فیلتر مرتبه اول (۳۱) است:

$$\eta_{i,3} \dot{\bar{\phi}}_{i,3} + \bar{\phi}_{i,3} = \phi_{i,3} \quad (31)$$

که $\eta_{i,3}$ ثابت زمانی فیلتر است. مشتق $e_{i,3}$ برابر است با:

$$\dot{e}_{i,3} = \theta_i (\kappa_i u_i(t) + \bar{u}_i(t)) - \theta_i a_i(t) + d_i(t) - \dot{\bar{\phi}}_{i,3} \quad (32)$$

در ادامه تعاریف (۳۳) ارائه می شوند:

$$\gamma_i = \max(\theta_i), \bar{\phi}_i = \sup_{t \geq 0} (\theta_i \bar{u}_i(t)), \quad (33)$$

$$\delta_i = \bar{\phi}_i + \bar{d}_i, \partial_i = \max(\theta_i \kappa_i), \phi_i = \frac{1}{\partial_i}$$

تابع لیاپانوف این مرحله به صورت رابطه (۳۴) انتخاب می شود:

$$\begin{aligned} V_3 = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,3}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\alpha_\gamma} \tilde{\gamma}_i^2 + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\alpha_\delta} \tilde{\delta}_i^2 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial_i}{2\alpha_\phi} \tilde{\phi}_i^2 \end{aligned} \quad (34)$$

که $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i - \gamma_i$ ، $\tilde{\delta}_i = \delta_i - \delta_i$ و $\tilde{\phi}_i = \phi_i - \phi_i$ به ترتیب تخمین γ_i ، δ_i و ϕ_i هستند. همچنین، α_γ و α_δ بهره های تطبیقی هستند.

به کمک رابطه (۳۲)، مشتق تابع V_3 به صورت رابطه (۳۵) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & \sum_{i=1}^N e_{i,3} (\theta_i \kappa_i u_i(t) + \theta_i a_i(t) + d_i(t)) - \\ & - \sum_{i=1}^N e_{i,3} \theta_i a_i(t) - \sum_{i=1}^N e_{i,3} \dot{\bar{\phi}}_{i,3} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_\gamma} \tilde{\gamma}_i \dot{\gamma}_i + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_\delta} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial_i}{\alpha_\phi} \tilde{\phi}_i \dot{\phi}_i \end{aligned} \quad (35)$$

به کمک لم ۱ می توان نوشت:

$$-e_{i,3} \theta_i a_i \leq \gamma_i |e_{i,3}| \cdot |a_i| \leq \gamma_i e_{i,3} \bar{\Omega}_{i,3} + v_{i,3} \gamma_i \quad (36)$$

که $\bar{\Omega}_{i,3} = e_{i,3} a_i^2 / \sqrt{e_{i,3}^2 a_i^2 + v_{i,3}^2}$. با جایگذاری (۳۶) در (۳۵) رابطه (۳۷) حاصل می گردد که در (۳۷)،

با توجه به رابطه $\Psi_{i,3} = \varepsilon_{i,3} e_{i,3} + \frac{1}{2} e_{i,3} + \hat{\gamma}_{i,3} \bar{\Omega}_{i,3} - \dot{\bar{\phi}}_{i,3}$ ، قانون تطبیقی (۳۸) برای متغیر γ_i انتخاب می گردد:

با ضرب $\Sigma_{i,k+1}$ در رابطه (۴۸) می‌توان دریافت که به ازای $\varsigma_{i,k+1} > 0$ مقدار مثبت $c_{i,k+1} > 0$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned} \Sigma_{i,k+1} \dot{\Sigma}_{i,k+1} &\leq -\frac{1}{\eta_{i,k+1}} \Sigma_{i,k+1}^2 + c_{i,k+1} |\Xi_{i,k+1}| \\ &\leq -\frac{1}{\eta_{i,k+1}} \Xi_{i,k+1}^2 + \frac{c_{i,k+1}^2}{4\varsigma_{i,k+1}} \Sigma_{i,k+1}^2 + \varsigma_{i,k+1} \end{aligned} \quad (50)$$

بنابراین، رابطه (۴۷) به صورت (۵۱) بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i,k} e_{i,k}^2 - \sum_{i=1}^N (w_\gamma \tilde{\gamma}_i \hat{\gamma}_i + \partial_i w_\phi \tilde{\phi}_i \hat{\phi}_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N w_\delta \tilde{\delta}_i \hat{\delta}_i + \sum_{i=1}^N (\gamma_i + \partial_i + 2) \sum_{k=1}^3 v_{i,k} \\ &\quad - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,2}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,3}^2 + \sum_{i=1}^N \mu_{i,1} e_{i,1} (e_{i,2} + \Sigma_{i,2}) \quad (51) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N e_{i,2} (e_{i,3} + \Sigma_{i,3}) + \sum_{i=1}^N \Sigma_{i,3}^2 \left(-\frac{1}{\eta_{i,3}} + \frac{c_{i,3}^2}{4\gamma_{i,3}} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \mu_{i,1}^2 e_{i,1}^2 + \sum_{i=1}^N \varsigma_{i,3} \end{aligned}$$

به کمک لم ۳ می‌توان نوشت:

$$\mu_{i,1} e_{i,1} (e_{i,2} + \Sigma_{i,2}) \leq \mu_{i,1}^2 e_{i,1}^2 + \frac{1}{2} e_{i,2}^2 + \frac{1}{2} \Sigma_{i,2}^2 \quad (52)$$

$$e_{i,k} (e_{i,k+1} + \Sigma_{i,k+1}) \leq e_{i,k}^2 + \frac{1}{2} e_{i,k+1}^2 + \frac{1}{2} \Sigma_{i,k+1}^2$$

همچنین، نامساوی‌های (۵۳) برقرار هستند:

$$\begin{aligned} -\tilde{\gamma}_{i,k} \hat{\gamma}_{i,k} &= -\tilde{\gamma}_{i,k} (\tilde{\gamma}_{i,k} + \gamma_{i,k}) = -\tilde{\gamma}_{i,k}^2 - \gamma_{i,k} \tilde{\gamma}_{i,k} \leq \\ &\leq -\tilde{\gamma}_{i,k}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{i,k}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{i,k}^2 = -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{i,k}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{i,k}^2 \quad (53) \\ \Rightarrow -\tilde{\phi}_{i,k} \hat{\phi}_{i,k} &\leq -\frac{1}{2} \tilde{\phi}_{i,k}^2 + \frac{1}{2} \phi_{i,k}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\tilde{\delta}_{i,k} \hat{\delta}_{i,k} \leq -\frac{1}{2} \tilde{\delta}_{i,k}^2 + \frac{1}{2} \delta_{i,k}^2$$

با جایگذاری (۵۲) و (۵۳) در (۵۱) می‌توان دریافت که:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i,k} e_{i,k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (w_\gamma \tilde{\gamma}_i^2 + \partial_i w_\phi \tilde{\phi}_i^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_\delta \tilde{\delta}_i^2 - \sum_{i=1}^N \Sigma_{i,3}^2 \left(\frac{1}{\eta_{i,3}} - \frac{1}{2} - \frac{c_{i,3}^2}{4\varsigma_{i,3}} \right) + \chi \end{aligned} \quad (54)$$

که χ از رابطه (۵۵) محاسبه می‌گردد و با مقایسه (۴۶) و (۵۴) می‌توان رابطه (۵۶) را دریافت که در آن β مقداری مثبت است.

با توجه به اینکه $\partial_i \hat{\phi}_i = 1 + \partial_i \tilde{\phi}_i$ ، جایگذاری (۴۱) تا (۴۴) در (۴۰) منجر به رابطه (۴۵) خواهد شد:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq -\sum_{i=1}^N \varepsilon_{i,3} e_{i,3}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,3}^2 - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N w_\gamma \tilde{\gamma}_{i,3} \hat{\gamma}_{i,3} - \sum_{i=1}^N w_\delta \tilde{\delta}_i \hat{\delta}_i - \quad (45) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \partial_i w_\phi \tilde{\phi}_i \hat{\phi}_i + \sum_{i=1}^N v_{i,3} (\gamma_{i,3} + \partial_i) \end{aligned}$$

نتایج در قضیه ۱ ارائه شده‌اند.

قضیه ۱. یک گروه خودرو با ساختار دوسویه رهبر-پیرو که با معادله (۲) معرفی شده است، در حضور عیب عملکردی (۵)، عدم قطعیت، اغتشاش دینامیکی و قید سرعت (۴) تحت قانون کنترلی (۴۳) و قوانین تطبیقی (۳۸)، (۴۱) و (۴۲) پایدار است به این معنا که دامنه خطای فاصله به نزدیکی صفر خواهد رسید.

اثبات. تابع لیاپانوف را به صورت رابطه (۴۶) در نظر بگیرید:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \Sigma_{k+1}^T \Sigma_{k+1} \quad (46)$$

که $\Sigma_{k+1} = [\Sigma_{1,k+1}, \dots, \Sigma_{N,k+1}]^T$ و $\Sigma_{i,k+1} = \bar{\phi}_{i,k+1} - \phi_{i,k+1}$

مشق زمانی (۴۶) به صورت (۴۷) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i,k} e_{i,k}^2 - \sum_{i=1}^N (w_\gamma \tilde{\gamma}_i \hat{\gamma}_i + \partial_i w_\phi \tilde{\phi}_i \hat{\phi}_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N w_\delta \tilde{\delta}_i \hat{\delta}_i + \sum_{i=1}^N (\gamma_i + \partial_i + 2) \sum_{k=1}^3 v_{i,k} \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \mu_{i,1}^2 e_{i,1}^2 - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=2}^3 e_{i,q}^2 + \sum_{i=1}^N e_{i,2} (a_i - \phi_{i,3}) \quad (47) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \mu_{i,1} e_{i,1} (v_i - \phi_{i,2}) + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^2 \Sigma_{i,q+1} \dot{\Sigma}_{i,q+1} \end{aligned}$$

مشق $\Sigma_{i,k+1}$ به صورت (۴۸) می‌باشد:

$$\dot{\Sigma}_{i,k+1} = \dot{\bar{\phi}}_{i,k+1} - \dot{\phi}_{i,k+1} = -\frac{1}{\eta_{i,k+1}} \Sigma_{i,k+1} - \dot{\phi}_{i,k+1} \quad (48)$$

که $\dot{\phi}_{i,k+1}$ از رابطه (۴۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{i,k+1} &= \frac{\partial \phi_{i,k+1}}{\partial e_{i,k}} \dot{e}_{i,k} + \frac{\partial \phi_{i,k+1}}{\partial \hat{\phi}_{i,k}} \dot{\hat{\phi}}_{i,k} + \frac{\partial \phi_{i,k+1}}{\partial \Omega_{i,k}} \dot{\Omega}_{i,k} \quad (49) \\ i &= 1, \dots, N \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

به نزدیکی صفر می‌رسد. به عبارت دیگر، $y_i(t)$ به مقدار (۶۱) بسیار نزدیک خواهد شد.

$$y_i = \int_0^t v_0 dt - \sum_{j=0}^{i-1} l_j - iD_s - \bar{x}_{i,0} \quad (61)$$

به‌طور مشابه، $y_{i+1}(t)$ به نزدیکی مقدار (۶۲) خواهد رسید:

$$y_{i+1} = \int_0^t v_0 dt - \sum_{j=0}^i l_j - (i+1)D_s - \bar{x}_{i+1,0} \quad (62)$$

در نتیجه، فاصله دو خودرو متوالی $(y_i - y_{i+1})$ برابر خواهد بود با:

$$y_i(t) - y_{i+1}(t) = l_i + D_s + \bar{x}_{i+1,0} - \bar{x}_{i,0} \quad (63)$$

به عبارت دیگر، در حالی که خطای فاصله به نزدیکی صفر می‌رسد، فاصله بین دو خودرو متوالی به مقدار رابطه (۶۳) خواهد رسید. با توجه به اینکه $\bar{x}_{i+1,0} > \bar{x}_{i,0}$ فاصله بین خودرویی همواره مثبت خواهد بود یا $y_i(t) - y_{i+1}(t) > 0$ که بیانگر عدم برخورد خودروها به یکدیگر است.

نکته ۲. از روابط (۴۶)، (۱۴) و (۱۰) می‌توان دریافت که اگر $f_i(t) \rightarrow y_i(t) \rightarrow \infty$ و $V_1(t) \rightarrow \infty$ در نتیجه $V(t) \rightarrow \infty$.

با توجه به رابطه (۵۸) تابع لیپانوف $V(t)$ کران‌دار است و هرگز به بی‌نهایت میل نمی‌کند. این بدان معناست که

رسید و به عبارت دیگر قید سرعت (۴) نقض نخواهد شد. $y_i(t) = \int_0^t v_i(t) dt + x_{i,0}$ به $f_i(t) \triangleq v_{\max} t + x_{i,0}$ نخواهد

شکل ۲ دیگرام حلقه بسته یک خودرو پیرو تحت قانون کنترلی (۴۳) و قوانین تطبیقی (۳۸)، (۴۱) و (۴۲) را نشان می‌دهد.

۴- نتایج شبیه‌سازی

به منظور اعتبارسنجی روش ارائه‌شده در این مقاله یک گروه خودرو شامل یک رهبر و پنج پیرو با ساختار ارتباطی نشان داده‌شده در شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. ماتریس‌های لاپلاسی و مجاورت گروه به صورت معادله (۶۴) هستند:

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}_{5 \times 5}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\chi = \sum_{i=1}^N \left(\varsigma_{i,3} + \frac{1}{2} w_\gamma \gamma_{i,3}^2 + \frac{1}{2} \partial_i w_\phi \phi_i^2 + \frac{1}{2} w_\delta \delta_i^2 \right) + \sum_{i=1}^N (\gamma_i + \partial_i + 2) \sum_{k=1}^3 v_{i,k} \quad (55)$$

$$\dot{V} \leq -2\beta V + \chi \quad (56)$$

با ضرب دو طرف عبارت (۵۶) در $e^{-2\beta t}$ ، رابطه (۵۷) حاصل خواهد شد:

$$\frac{d}{dt} (V(t) e^{-2\beta t}) \leq \chi e^{-2\beta t} \quad (57)$$

با انتگرال‌گیری از (۵۷) در بازه $[0, t]$ عبارت (۵۸) حاصل می‌گردد:

$$V(t) \leq \frac{\chi}{2\beta} + \left[V(0) - \frac{\chi}{2\beta} \right] e^{-2\beta t} \quad (58)$$

عبارت (۵۸) به این معناست که تابع لیپانوف $V(t)$ به صورت نمایی به یک ناحیه کوچک در همسایگی صفر همگرا می‌شود. در نتیجه، خطاهای تخمین و فاصله در حضور عیب عملگری، عدم قطعیت، اغتشاش خارجی و قید سرعت، کران‌دار خواهند بود.

از رابطه (۵۸) می‌توان دریافت که:

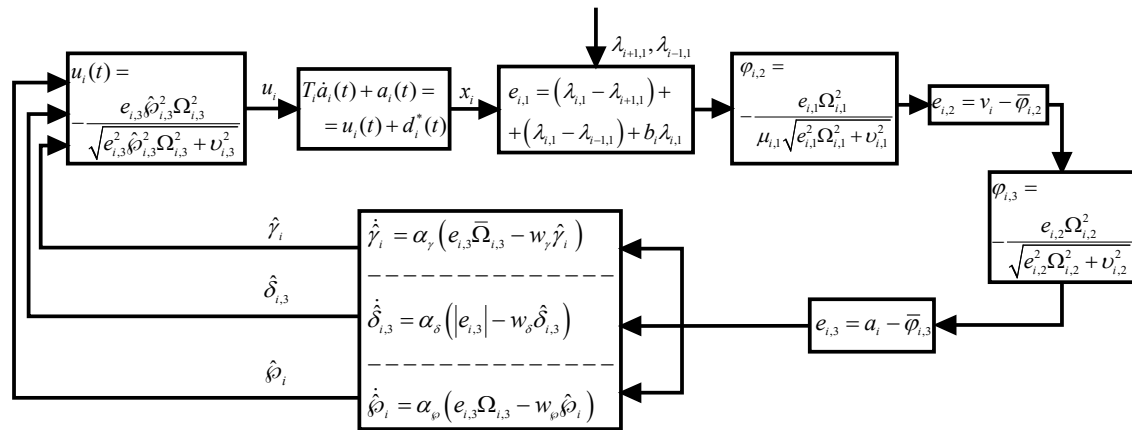
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \left(\frac{y_i(t)}{f_i^2(t) - y_i^2(t)} - \frac{y_{i,d}(t)}{f_i^2(t) - y_{i,d}^2(t)} \right)^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \lambda_1^T \lambda_1 \leq 2 \lim_{t \rightarrow \infty} V_1 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\chi}{\beta} \quad (59)$$

که $\lambda_{\min} = 1$ کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{L} + \mathbf{B}$ می‌باشد [۱۰]. از لم ۲ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - y_{i,d}(t)| \\ & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} f_i^2 \left| \frac{y_i(t)}{f_i^2(t) - y_i^2(t)} - \frac{y_{i,d}(t)}{f_i^2(t) - y_{i,d}^2(t)} \right| \\ & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} f_i^2 \left(\frac{\chi}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (60)$$

بنابراین، این نتیجه حاصل می‌شود که با افزایش مقدار β ، y_i به مقدار دلخواه به $y_{i,d}$ نزدیک می‌شود و اثبات تمام است.

نکته ۱. خطای فاصله خودرو i -ام نسبت به خودرو رهبر که به صورت $y_i(t) - y_{i,d}(t)$ تعریف می‌شود با افزایش مقدار β



شکل (۲): دیاگرام حلقه بسته خودرو i -ام تحت کنترل تطبیقی-مقاوم (۴۳).

$$[v_1(0), v_2(0), v_3(0), v_4(0), v_5(0)] = [20, 17, 19, 22, 16, 23] \text{ m/s} \quad (۶۸)$$

شکل ۳ خطای فاصله ($y_i - y_d$) را برای تمامی خودروهای پیرو نشان می‌دهد. مطابق این شکل، خطای فاصله تمام خودروهای پیرو به نزدیکی صفر رسیده‌اند که این امر بیانگر پایداری گروه می‌باشد. شکل ۴ سرعت خودروهای پیرو به همراه خودرو رهبر را نشان می‌دهد. با توجه به پایداری گروه، سرعت خودروهای پیرو به سرعت خودرو رهبر می‌رسد. شکل ۵ ورودی کنترلی خودروهای پیرو را نشان می‌دهد و درنهایت، شکل ۶ موقعیت خودروهای پیرو نسبت به رهبر را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، فاصله بین هر دو خودرو متوالی همواره مثبت است که بیانگر ایمنی و عدم برخورد خودروها به یکدیگر می‌باشد. همان‌طور که نکته ۱ بیان می‌کند، خطای فاصله به نزدیکی صفر می‌رسد (شکل ۳) و در نتیجه، فاصله بین خودرویی ($y_i - y_{i+1}$) به مقداری مثبت که در رابطه (۶۳) ذکر شده می‌رسد (شکل ۶).

سناریوی دوم. در این سناریو، شتاب خودرو رهبر قطعه‌ای پیوسته و به صورت $a_0(t) = \begin{cases} 1, \text{ m/s}^2 & 0 \leq t < 25 \\ 0, & t \geq 25 \end{cases}$ در نظر گرفته می‌شود. شکل ۷ خطای موقعیت خودروهای پیرو نسبت به رهبر، شکل ۸ سرعت خودروهای گروه، شکل ۹ ورودی کنترلی خودروهای پیرو و درنهایت شکل ۱۰ موقعیت خودروهای پیرو را به همراه رهبر نشان می‌دهد. مطابق این شکل‌ها گروه خودرویی پایدار است.

مدل عیب عملگری برای خودروهای پیرو به صورت رابطه (۶۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$g_i(t) = \begin{cases} u_i(t), & 2t^* \leq t < 2t^* + 1 \\ \kappa_i u_i(t) + \bar{u}_i(t), & 2t^* + 1 \leq t < 2t^* + 2 \end{cases} \quad (۶۵)$$

که در رابطه (۶۵):

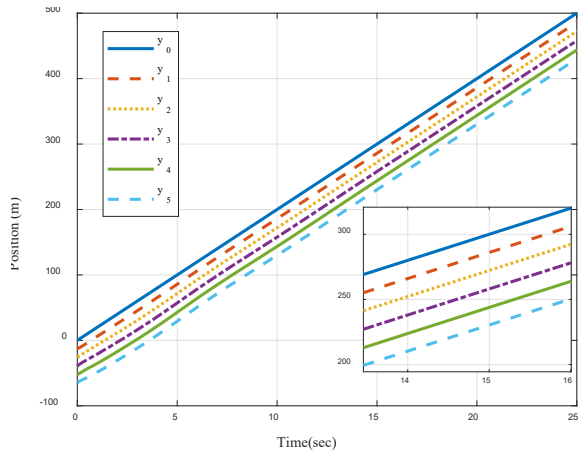
$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0.6, \kappa_2 = 0.8, \kappa_3 = 0.7, \kappa_4 = 0.9, \kappa_5 = 0.85, \\ \bar{u}_1 &= 0.1 \sin t, \bar{u}_2 = -0.1 \sin t, \bar{u}_3 = 0.2 \sin t, \\ \bar{u}_4 &= 0.15 \sin t, \bar{u}_5 = 0.12 \sin t, t^* = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (۶۶)$$

همچنین، بهره‌های کنترلی و سایر مقادیر مفروضه به شرح زیر هستند:

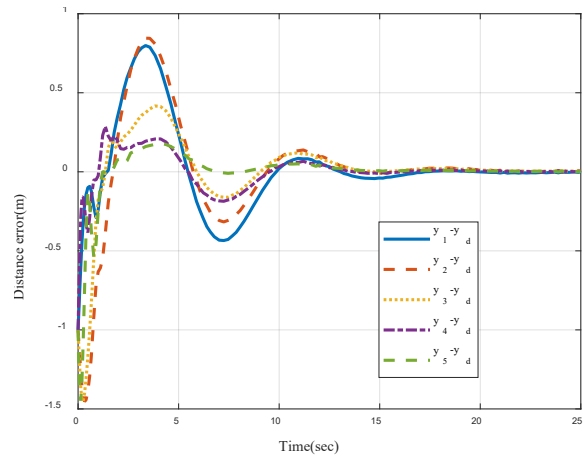
$$\begin{aligned} T_1 &= 0.1\text{s}, T_2 = 0.15\text{s}, T_3 = 0.2\text{s}, T_4 = 0.08\text{s}, \\ T_5 &= 0.12\text{s}, v_{\max} = 40 \text{ m/s}, \bar{x}_{1,0} = -1\text{m}, \\ \bar{x}_{2,0} &= -2\text{m}, \bar{x}_{3,0} = -3\text{m}, \bar{x}_{4,0} = -4\text{m}, \\ \bar{x}_{5,0} &= -5\text{m}, \bar{u}_{i,\max} = 0.2 \text{ m/s}^2, \alpha_\delta = 1.5, \\ \alpha_\phi &= 1.5, \alpha_\gamma = 1.5, w_\gamma = 0.2, w_\delta = 0.3, \\ w_\phi &= 0.1, D_s = 5\text{m}, \eta_{1,1} = 0.1, \eta_{1,2} = 0.1, \\ \eta_{1,3} &= 0.1, \eta_{1,4} = 0.1, \eta_{1,5} = 0.1, \eta_{2,1} = 0.1, \\ \eta_{2,2} &= 0.1, \eta_{2,3} = 0.1, \eta_{2,4} = 0.1, \eta_{2,5} = 0.1, \\ l_0 &= 4\text{m}, l_1 = 3.8\text{m}, l_2 = 4.2\text{m}, l_3 = 3.7\text{m}, \\ l_4 &= 4\text{m}, l_5 = 3.9\text{m} \end{aligned} \quad (۶۷)$$

نتایج شبیه‌سازی در دو سناریو ارائه می‌شوند. در سناریوی اول شتاب خودرو رهبر برابر صفر و در سناریوی دوم قطعه‌ای ثابت است.

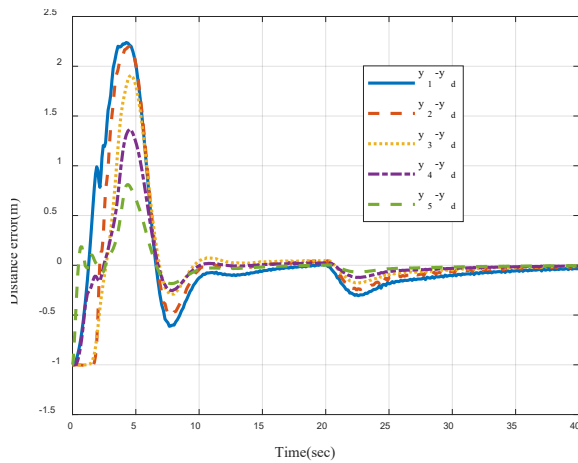
سناریوی اول. در این سناریو سرعت خودرو رهبر برابر مقدار ثابت $v_0(t) = 20 \text{ m/s}$ در نظر گرفته می‌شود. سرعت اولیه خودروهای پیرو به صورت (۶۸) فرض می‌شوند:



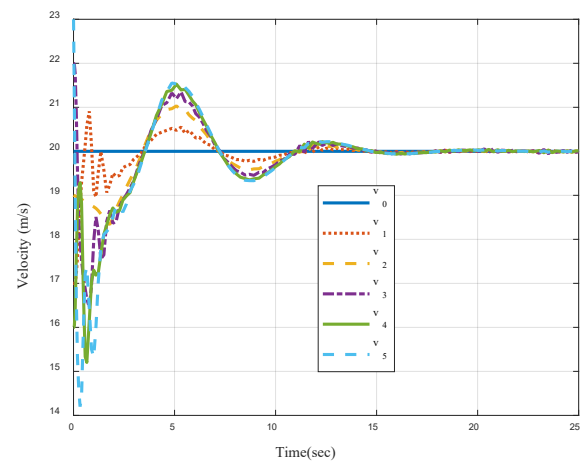
شکل (۶): موقعیت خودروهای پیرو در سناریوی اول.



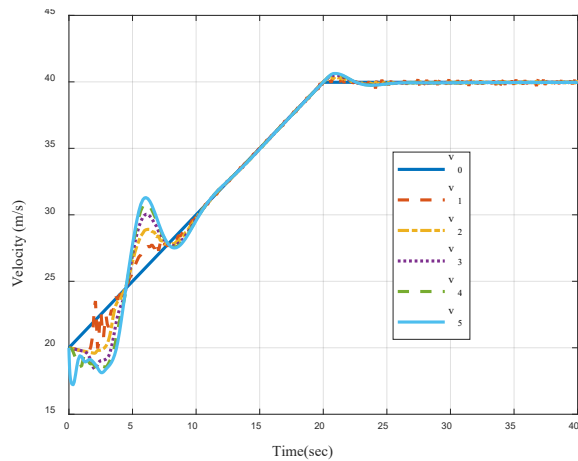
شکل (۳): خطای فاصله خودروهای پیرو در سناریوی اول.



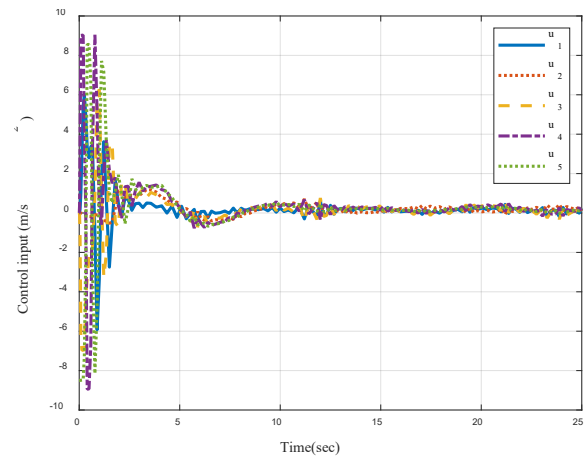
شکل (۷): خطای فاصله خودروهای پیرو در سناریوی دوم.



شکل (۴): سرعت خودروهای پیرو در سناریوی اول.



شکل (۸): سرعت خودروهای پیرو در سناریوی دوم.

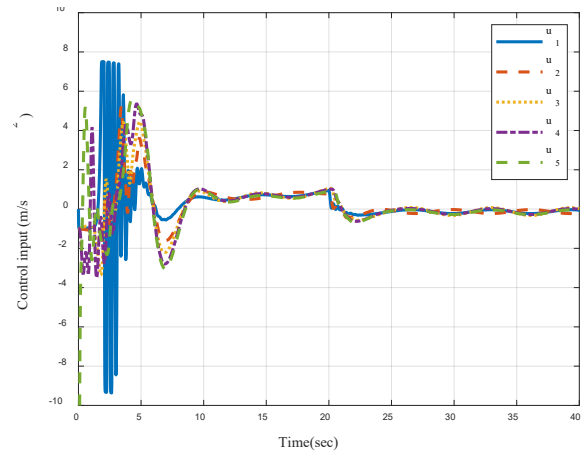


شکل (۵): ورودی کنترلی خودروهای پیرو در سناریوی اول.

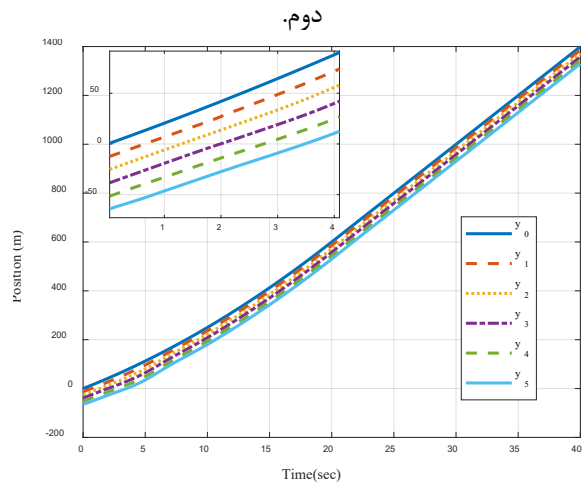
برابر اغتشاشات دینامیکی، عیب عملگری و عدم قطعیت ساختاری مقاوم بود و کران بالای آن‌ها را تخمین می‌زد. مثال‌های شبیه‌سازی متعددی برای اعتبارسنجی روش ارائه شده در این مقاله مورد بررسی قرار گرفتند. نشان داده شد که تحت روش ارائه شده در این مقاله، گروه خودرو پایدار است و خودروهای پیرو با حفظ فاصله ایمن از خودرو جلویی، سرعت خودرو رهبر را تعقیب می‌کنند.

۶- علائم

شتاب	a
ماتریس مجاورت	B
فاصله ایمن	D_s
کران اغتشاش	D_{max}
اغتشاش	d
خطا	e
طول خودرو	l
ماتریس لاپلاسیان	L
ثابت موتور	T
ورودی کنترلی	u
اغتشاش عملگری	\bar{u}
تابع لیپانوف	V
سرعت	v
موقعیت	x
خروجی مطلوب	y_d
خروجی	y
بهره تطبیقی	α_γ
بهره تطبیقی	α_δ
بهره تطبیقی	α_ϕ
مقداری ثابت	β
ضریب تضعیف	κ
مقداری ثابت	w_γ
ثابت زمانی فیلتر	η
مقداری ثابت	w_δ
مقداری ثابت	w_ϕ
مقداری ثابت	ν



شکل (۹): ورودی کنترلی خودروهای پیرو در سناریوی



شکل (۱۰): موقعیت خودروهای پیرو در سناریوی دوم.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله به کنترل تطبیقی-مقاوم یک گروه متشکل از خودروهای ناهمگن خودران با ساختار ارتباطی دوسویه رهبر-پیرو پرداخته شد. پدیده‌های مختلفی همچون عیب عملگری ترکیبی، عدم قطعیت ساختاری، اغتشاش دینامیکی و قید سرعت در مدل‌سازی و تحلیل پایداری مورد توجه قرار گرفتند. به کمک روش گام به عقب و طی سه مرحله، یک تابع لیپانوف برحسب خطای تخمین و خطای فاصله ساخته شد. خطا در مرحله اول به صورت تفاضل وزنی بین خروجی و خروجی مطلوب و در مراحل بعدی به صورت تفاضل بین سرعت و شتاب با قانون کنترلی مجازی مرحله قبل تعریف گردید. در پایان، یک قانون کنترلی تطبیقی-مقاوم ارائه گردید که در

۷- مراجع

- [12] Yang P, Ding Y, Hu X, Zhang Z, Wang Z. Sliding mode fault-tolerant consensus control for heterogeneous multi-agent systems based on finite-time observer and controller. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*. 2023;01423312221150292.
- [13] Pan C, Chen Y, Liu Y, Ali I. Adaptive resilient control for interconnected vehicular platoon with fault and saturation. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2021;23(8):10210-22.
- [14] Jin Y, Zhang Y, Jing Y, Fu J. An average dwell-time method for fault-tolerant control of switched time-delay systems and its application. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2018;66(4):3139-47.
- [15] Ouyang H, Lin Y. Adaptive fault-tolerant control and performance recovery against actuator failures with deferred actuator replacement. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020;66(8):3810-7.
- [16] Liu F, Hua Y, Dong X, Li Q, Ren Z. Adaptive fault-tolerant time-varying formation tracking for multi-agent systems under actuator failure and input saturation. *ISA transactions*. 2020;104:145-53.
- [17] Zhang D, Feng G, Shi Y, Srinivasan D. Physical safety and cyber security analysis of multi-agent systems: A survey of recent advances. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*. 2021;8(2):319-33.
- [18] Chen J, Bai D, Liang H, Zhou Y. A third-order consensus approach for vehicle platoon with intervehicle communication. *Journal of Advanced Transportation*. 2018;2018.
- [19] Ge X, Han Q-L, Zhang X-M, Ding D. Communication resource-efficient vehicle platooning control with various spacing policies. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*. 2023.
- [20] Xu B, Ban XJ, Bian Y, Li W, Wang J, Li SE, et al. Cooperative method of traffic signal optimization and speed control of connected vehicles at isolated intersections. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2018;20(4):1390-403.
- [21] Ma F, Wang J, Zhu S, Gelbal SY, Yang Y, Aksun-Guvenc B, et al. Distributed control of cooperative vehicular platoon with nonideal communication condition. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 2020;69(8):8207-20.
- [22] Bian Y, Li SE, Ren W, Wang J, Li K, Liu HX. Cooperation of multiple connected vehicles at unsignalized intersections: Distributed observation, optimization, and control. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2021;23(7):6027-45.
- [2] Sirohi D, Kumar N, Rana PS. Convolutional neural networks for 5G-enabled intelligent transportation system: A systematic review. *Computer Communications*. 2020;153:459-98.
- [3] Saharan S, Bawa S, Kumar N. Dynamic pricing techniques for Intelligent Transportation System in smart cities: A systematic review. *Computer Communications*. 2020;150:603-25.
- [4] Zhou Y, Ahn S, Wang M, Hoogendoorn S. Stabilizing mixed vehicular platoons with connected automated vehicles: An H-infinity approach. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2020;132:152-70.
- [5] Bian Y, Zheng Y, Ren W, Li SE, Wang J, Li K. Reducing time headway for platooning of connected vehicles via V2V communication. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2019;102:87-105.
- [6] Gao Z, Zhang Y, Liu Q. Adaptive finite-time cooperative platoon control of connected vehicles under actuator saturation. *Asian Journal of Control*. 2022;24(6):3552-65.
- [7] Cook PA. Stable control of vehicle convoys for safety and comfort. *IEEE transactions on automatic control*. 2007;52(3):526-31.
- [8] Xiao S, Ge X, Han Q-L, Zhang Y. Resource-efficient platooning control of connected automated vehicles over VANETs. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*. 2022;7(3):579-89.
- [9] Samani B, Shamekhi AH. Design of real-time cruise controller with trained neural network using multi-objective predictive adaptive controller data to reducing fuel consumption and increasing comfort. *Automotive Science and Engineering*. 2021;11(1):3472-84.
- [10] Li SE, Qin X, Zheng Y, Wang J, Li K, Zhang H. Distributed platoon control under topologies with complex eigenvalues: Stability analysis and controller synthesis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2017;27(1):206-20.
- [11] Wijnbergen P, Besselink B. Existence of decentralized controllers for vehicle platoons: On the role of spacing policies and available measurements. *Systems & Control Letters*. 2020;145:1-9.

World Congress, Oct 22-26, Vienna, Austria (2012); 2012.

[34] Meyer CD. Matrix analysis and applied linear algebra: Siam; 2000.

Transactions on Industrial Electronics. 2019;67(12):10744-54.

[23] Gao F, Hu X, Li SE, Li K, Sun Q. Distributed adaptive sliding mode control of vehicular platoon with uncertain interaction topology. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2018;65(8):6352-61.

[24] Zhou Z, Zhu F, Xu D, Guo S, Zhao Y. Attack resilient control for vehicle platoon system with full states constraint under actuator faulty scenario. Applied Mathematics and Computation. 2022;419:126874.

[25] Guo G, Li P, Hao LY. A New Quadratic Spacing Policy and Adaptive Fault-Tolerant Platooning With Actuator Saturation. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2022;23(2):1200-12.

[26] Hao L-Y, Li P, Guo G. String stability and flow stability for nonlinear vehicular platoons with actuator faults based on an improved quadratic spacing policy. Nonlinear Dynamics. 2020;102:2725-38.

[27] Han J, Zhang J, He C, Lv C, Li C, Hou X, et al. Adaptive distributed finite-time fault-tolerant controller for cooperative braking of the vehicle platoon. IET Intelligent Transport Systems. 2021;15(12):1562-81.

[28] Liu X, Yan M, Yang P, Song J. Observer-based Actuator Fault Detection and Robust Tolerant Control for Vehicle Platoons. International Journal of Control, Automation and Systems. 2023;21(4):1175-86.

[29] Han J, Zhang J, He C, Lv C, Li C, Ji Y, et al. Prescribed-Time Performance Recovery Fault Tolerant Control of Platoon With Nominal Constraints Guarantee. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2023;24(3):3501-13.

[30] Wang W, Han B, Guo Y, Luo X, Yuan M. Fault-Tolerant Platoon Control of Autonomous Vehicles Based on Event-Triggered Control Strategy. IEEE Access. 2020;8:25122-34.

[31] Biron ZA, Dey S, Pisu P. Real-time detection and estimation of denial of service attack in connected vehicle systems. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2018;19(12):3893-902.

[32] Rajamani R. Vehicle dynamics and control: Springer Science & Business Media; 2011.

[33] Bergenhem C, Shladover S, Coelingh E, Englund C, Tsugawa S, editors. Overview of platooning systems. Proceedings of the 19th ITS