

## Eccentricity Error Detection in Axial Flux Resolvers

R. Alipour-Sarabi\*<sup>ID</sup>

11

\* Assistant Professor, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

(Received: 30/06/2023 revised: 29/09/2023 Accepted:13/10/2023 published: 07/11/2023)

DOR: <https://dorl.net/dor/20.1001.1.26455153.1402.11.2.10.3>


### Abstract

Mechanical errors are one of the most common errors related to electric machines. Among them, eccentricities have the major share of mechanical errors. Resolvers, as an electric machine, can be affected by eccentricities or the electric motor connected to it. The existence of eccentricities in the resolvers, which can be caused by the rotation of the machine at critical speed, incorrect installation of the rotor and stator, core turning defects, and wear and corrosion of the bearings, leads to an increase in the position estimation error. The position estimation error will eventually increase the torque fluctuations, reduce the efficiency, lose the ideal control of the electric motor, and disrupt the automation process. Therefore, providing indicators to detect the occurrence of eccentricity in the resolver can be a preventive solution. Based on this, in this article, focusing on the inclined eccentricity, the equations describing air gap reluctance, magnetic flux density, and mutual inductance will be presented using the modified winding function method. By using the relationships describing the output voltage, the harmonic spectrum of the output voltage in the static and dynamic eccentricities will be compared with the healthy mode, and an index will be provided to identify static and dynamic mechanical error.

**Keywords:** Resolver, Eccentricity, Winding Function Method, Permeance, Estimated Position Error, Axial Flux

\* Corresponding author E-mail: r.alipour@kntu.ac.ir

## شناسایی خطای ناهم محوری در ریزالور شار محوری

رامین علی پور سرابی 

استادیار، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۰۹، بازنگری: ۱۴۰۲/۰۷/۰۷، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۱، ۱۴۰۲/۰۸/۱۶)

DOR: <https://dorl.net/dor/20.1001.1.26455153.1402.11.2.10.3>

### چکیده

خطاهای مکانیکی از شایع‌ترین خطاهای مربوط به ماشین‌های الکتریکی است. در این بین خطاهای ناهم محوری عمده‌ترین سهم خطاهای مکانیکی را دارند. ریزالورها به‌عنوان یک ماشین الکتریکی می‌توانند تحت تأثیر خطاهای ناهم محوری خود یا موتور الکتریکی متصل به خود قرار گیرند. وجود خطاهای ناهم محوری در ریزالورها که می‌تواند ناشی از چرخش ماشین در سرعت بحرانی، نصب نادرست رتور و استاتور، ایرادات تراشکاری هسته، و ساییدگی و خوردگی بیرینگ‌ها باشد، منجر به افزایش خطای تخمین موقعیت می‌شود. خطای تخمین موقعیت در نهایت باعث افزایش نوسانات گشتاور، کاهش بازده، از دست دادن کنترل ایده‌آل موتور الکتریکی، و اختلال در پروسه اتوماسیون می‌شود. لذا ارائه شاخص‌هایی برای شناسایی بروز خطای ناهم محوری در ریزالور می‌تواند یک راهکار پیشگیرانه برای جلوگیری از بروز مشکلات منتهی به خطای ناهم محوری باشد. بر این اساس در این مقاله با تمرکز بر روی خطای ناهم محوری ناشی از کج‌شدگی محور معادلات توصیف‌کننده رلوکتانس فاصله‌هوایی، چگالی شار مغناطیسی، و اندوکتانس متقابل به روش تابع سیم‌پیچی اصلاح‌شده ارائه خواهد شد. با استفاده از روابط توصیف‌کننده ولتاژ خروجی، طیف هارمونیک ولتاژ خروجی در حالت خطای استاتیکی و دینامیکی با حالت بدون خطا مقایسه خواهد شد و شاخصی برای شناسایی خطای ناهم محوری - استاتیکی و دینامیکی - ارائه می‌شود.

### کلیدواژه‌ها: ریزالور، خطای ناهم محوری، تابع سیم‌پیچی، پرمیانس، خطای تخمین موقعیت، شار محوری

#### ۱- مقدمه

سیستم‌های سرو<sup>۳</sup> که در کاربردهای هوافضا و درایو موتورهای سنکرون آهنربا دائم در خودروهای برقی که به تناوب در معرض مه، دود، تغییرات وسیع دمایی و لرزش‌های مکانیکی هستند به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند. هرچند ریزالورها به‌عنوان مطمئن‌ترین راه‌حل برای کاربردهای حساس در محیط‌های پرتنش مطرح می‌شوند اما در شرایط کاری عادی در مقام مقایسه با انکودرهای نوری دقت کمتری دارند. وجود خطای تخمین موقعیت در ریزالور مخصوصاً هنگام درایو موتورهای الکتریکی خود را بیشتر نشان می‌دهد. در کنترل موتور الکتریکی خودرو برقی، اطلاعات موقعیت محور موتور به منظور تبدیل پارک جریان‌های موتور الکتریکی مورد نیاز است. بروز خطا در تخمین موقعیت باعث افزایش ریبیل گشتاور، افزایش دما، کاهش عمر موتور، افزایش تلفات و کاهش بازده موتور الکتریکی می‌شود. از آنجایی که در خودروهای برقی ذخیره‌سازی موثر انرژی، و استفاده بهینه از آن به دلیل ماهیت جدا بودن از شبکه و هزینه زیاد باتری‌ها و مشکلات اشغال فضا توسط باتری‌ها و نیز مسائل ایمنی، اهمیت دوچندانی دارد؛ ارائه یک تخمین دقیق از موقعیت بسیار ضروری است. علاوه بر این، افزایش ریبیل گشتاور در موتور

یکی از بخش‌های جدایی‌ناپذیر یک سیستم کنترلی پیشرفته، وجود حلقه‌های بسته کنترلی است. عملکرد صحیح این حلقه‌های کنترلی به شدت تحت تأثیر دقت سنجشگری است که اطلاعات را به صورت فیدبک در اختیار بخش کنترلی قرار می‌دهد. ارائه یک تخمین دقیق از موقعیت یک عنصر در حال حرکت از الزامات بسیاری از سیستم‌های کنترل موقعیت است. ریزالورها به‌عنوان حسگرهای الکترومغناطیسی تخمین موقعیت دوار یا خطی، یکی از مناسب‌ترین گزینه‌ها برای استفاده در شرایط سخت محیطی با تنش‌های حرارتی و مکانیکی و آلودگی‌های زیاد می‌باشند [۱]. در واقع یک ریزالور مشابه یک ژنراتور سنکرون دو فازی است که رتور آن بجای ولتاژ DC با یک منبع ولتاژ فرکانس بالا تحریک می‌شود [۲] و [۳]. همین ساختار ماشینی ریزالورها باعث مقاومت<sup>۱</sup> مکانیکی و قابلیت اطمینان زیاد<sup>۲</sup> و عمر زیاد آن‌ها شده است به طوری که در بسیاری از کاربردهای صنعتی و نظامی به حسگرهای نوری ترجیح داده می‌شوند. به‌عنوان مثال در درایو

\* رایانامه نویسنده مسئول: R.alipour@kntu.ac.ir

<sup>1</sup> robustness

<sup>2</sup> reliability

<sup>3</sup> Servo systems drive

حوزه مسائل مکانیکی، در این مطالعه از تحلیل مودال ریزالور صرف نظر شده است. لذا در این بخش صرفاً به بررسی خطاهای ناهم محوری که در اثر جابه‌جایی محور هسته رتور و استاتور در ریزالور (و نه در موتور الکتریکی اصلی) ایجاد می‌شود پرداخته خواهد شد.

این مقاله ابتدا انواع خطاهای ناهم محوری در ریزالورها معرفی می‌شوند. سپس، با تمرکز بر روی خطای ناهم محوری ناشی از کج‌شدگی محور در ریزالورهای شار محوری معادلات توصیف‌کننده رلوکتانس فاصله‌هوایی، چگالی شار مغناطیسی، و اندوکتانس متقابل سیم‌پیچی‌های رتور و استاتور ریزالور به روش تابع سیم‌پیچی اصلاح‌شده ارائه خواهد شد. در نهایت با استفاده از روابط توصیف‌کننده ولتاژ خروجی ریزالور، طیف هارمونیک ولتاژ خروجی در حالت خطای ناهم محوری استاتیکی و دینامیکی با حالت بدون خطا مقایسه خواهد شد و شاخصی برای شناسایی خطای ناهم محوری ارائه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی‌های صورت گرفته توسط شبیه‌سازی رایانه‌ای مورد تأیید قرار گرفته است.

## ۲- انواع خطای ناهم محوری ناشی از کج‌شدگی محوری

در این مطالعه فرض بر این است که هسته‌ها کاملاً متقارن بوده و خطای ناهم محوری صرفاً ناشی از جابه‌جایی رتور از مرکز تقارن استاتور است. بر این اساس دو نوع خطای ناهم محوری در ماشین‌های الکتریکی می‌توان تعریف کرد: خطای ناهم محوری ناشی از جابه‌جایی شعاعی محور رتور، که به اختصار خطای ناهم محوری نا هم‌راستایی<sup>۳</sup> نامیده می‌شود و خطای ناهم محوری ناشی از کج‌شدگی محور رتور که به اختصار خطای ناهم محوری زاویه‌ای<sup>۴</sup> نامیده می‌شود. در خطای ناهم محوری نا هم‌راستایی محور تقارن رتور و استاتور با هم موازی اما نسبت به یکدیگر جابه‌جا شده‌اند در حالی که در خطای ناهم محوری زاویه‌ای محور تقارن رتور و استاتور بر هم منطبق اما نسبت به یکدیگر دارای انحراف زاویه‌ای هستند. شکل (۱) و (۲) مقایسه‌ای بین این دو نوع خطای ناهم محوری را به ترتیب در ماشین‌های شار شعاعی و شار محوری نشان می‌دهند. برای بررسی ماشین‌های شار شعاعی در شرایط خطای ناهم محوری نا هم‌راستایی استفاده از تحلیل‌های دوبعدی امکان‌پذیر است، در حالی که در خطای ناهم محوری زاویه‌ای باید از تحلیل‌های سه‌بعدی استفاده کرد. در ماشین‌های شار محوری به دلیل ساختار سه‌بعدی ماشین، طراحان ناگزیر به استفاده از تحلیل‌های سه‌بعدی در هر دو حالت خطای

الکتریکی باعث افزایش لرزش و نویزهای صوتی خواهد شد که ارتباط مستقیمی با استانداردهای مربوط به آسایش سرنشینان دارد.

خطاهای مرتبط با ریزالورها به‌عنوان یک نوع ماشین الکتریکی را می‌توان در دو دسته خطاهای الکتریکی و خطاهای مکانیکی تقسیم‌بندی کرد. مطالعات نشان‌دهنده نزدیک بودن نسبت خطاهای الکتریکی و مکانیکی در ماشین‌های الکتریکی به یکدیگر است که در این بین غالب خطاهای مکانیکی از نوع خطای ناهم محوری است. به‌عنوان نمونه حدود ۶۰٪ خطاهای موتورهای القایی از نوع مکانیکی و ۸۰٪ خطاهای مکانیکی از نوع عدم توزیع یکنواخت فاصله‌هوایی در اثر خطای ناهم محوری است [۴]. متون متعددی به بررسی دینامیک رتور در شرایط خطای ناهم محوری پرداخته‌اند. این مستندات ندرتاً به جنبه‌های الکتریکی و مغناطیسی ماشین‌های الکتریکی توجه کرده‌اند. به‌عنوان نمونه جنبه‌های مکانیکی سیستم‌های چرخان در [۵] توسط ژنتا<sup>۱</sup> بررسی شده است. راوو<sup>۲</sup> در [۶] و [۷] به بررسی دینامیک رتور و لرزش سیستم‌های چرخان پرداخته است، که تمرکز اصلی آن‌ها روی نیروهای مغناطیسی است. خطای ناهم محوری می‌تواند در اثر عدم تقارن شکل هسته و یا جابه‌جایی رتور ایجاد شود. زمانی که مرکز مغناطیسی رتور بر مرکز هندسی استاتور منطبق باشد نیروهای شعاعی وارد شده بر رتور صفر خواهد بود. هر عامل برهم‌زننده این انطباق موجب وارد شدن نیروهای نامتعادل‌کننده به رتور خواهد شد [۸]. یکی از دلایل این عدم انطباق عدم تقارن شکل هسته رتور است. عدم تقارن شکل هسته رتور می‌تواند دائمی و یا موقت باشد. حالت دائمی معمولاً در اثر کارکرد طولانی‌مدت ماشین الکتریکی و در توان‌های زیاد که تحت نیروهای شعاعی و محوری شدید قرار دارد دیده می‌شود. ماشین‌های الکتریکی با کاربرد ابزار دقیق غالباً دارای سطح توان کم هستند و با توجه به کاربرد آن‌ها دقت زیادی در مرحله ساخت به کار گرفته شود، از این رو نامتقارنی دائمی هسته کمتر دیده می‌شود. زمانی که فرکانس نیروهای اعمال‌شده به ماشین الکتریکی مساوی یا نزدیک به فرکانس طبیعی هسته رتور و استاتور باشد نیروهای اعمال‌شده به هسته تشدید شده و باعث تغییر شکل موقت هسته می‌شود [۹]. بنابراین در فرایند طراحی مکانیکی باید ارزیابی نسبت به فرکانس‌های طبیعی هسته‌ها صورت گیرد و در صورت لزوم با تغییر آرایش سیم‌پیچی‌ها و ساختار هسته تأثیر سرعت و فرکانس تحریک بر روی خطای ناهم محوری حداقل برسد. با توجه به قرارگیری این مباحث در

<sup>3</sup> Misaligned Eccentricity

<sup>4</sup> Inclined Eccentricity

<sup>1</sup> Genta

<sup>2</sup> Rao

ناهم‌محوری استاتیک موقعیت فاصله‌هوایی حداقل، نسبت به استاتور ثابت است. در صورتی که محور تقارن فیزیکی استاتور  $O_S$  و محور چرخش رتور  $O_W$  بر هم منطبق اما جدا از محور تقارن فیزیکی رتور  $O_R$  باشد، ناهم‌محوری از نوع دینامیک خواهد بود. در ناهم‌محوری دینامیک، موقعیت فاصله‌هوایی حداقل نسبت به استاتور همراه با موقعیت لحظه‌ای رتور در حال تغییر است. در حالت سوم سه محور یادشده از هم جدا هستند که این نوع از ناهم‌محوری، مرکب نامیده می‌شود. در خطای ناهم‌محوری مرکب علاوه بر اینکه موقعیت لحظه‌ای حداقل فاصله‌هوایی تابع موقعیت رتور است، طول فاصله‌هوایی حداقل نیز با تغییر موقعیت رتور تغییر می‌کند.

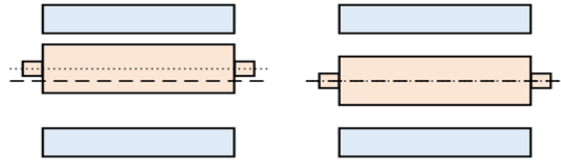
نیروهای مغناطیسی تولیدشده توسط سیم‌پیچی‌های ماشین شار محوری عمدتاً دارای مؤلفه‌های محوری است و نقش مؤلفه‌های شعاعی قابل صرف‌نظر کردن است. به طور مشابه در ماشین‌های شار شعاعی مؤلفه‌های شعاعی نقش برجسته‌ای در ایجاد نیروهای نامتعادل کننده دارند. از این رو، خطای ناهم‌محوری شعاعی بیشتر در ماشین‌های شار شعاعی و خطای ناهم‌محوری زاویه‌ای بیشتر در ماشین‌های شار محوری دیده می‌شود. با این پیش‌فرض، مطالعه پیش رو تنها به خطای ناهم‌محوری زاویه‌ای اختصاص پیدا کرده است و از خطای ناهم‌محوری شعاعی صرف‌نظر شده است.

### ۳- عوامل ایجادکننده خطای ناهم‌محوری

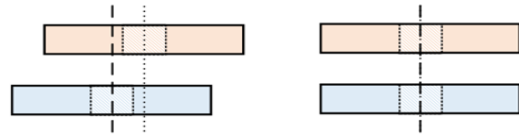
دلایل ایجاد خطای ناهم‌محوری در ماشین‌های الکتریکی را می‌توان این‌گونه بیان کرد [۴]، [۱۰]:

- چرخش ماشین الکتریکی در سرعت بحرانی
- جایابی اشتباه رتور و استاتور در هنگام نصب
- رزونانس مکانیکی در بارهای بحرانی
- سطح مقطع بیضوی استاتور
- جاگذاری اشتباه محور رتور و بار
- خستگی و ساییدگی بیرینگ‌ها
- خم شدن محور موتور

ناهم‌محوری هستند. حالت سومی نیز می‌توان برای خطای ناهم‌محوری متصور شد که در آن ناهم‌راستایی و کج‌شدگی محورهای تقارن رتور و استاتور به صورت هم‌زمان رخ دهند.

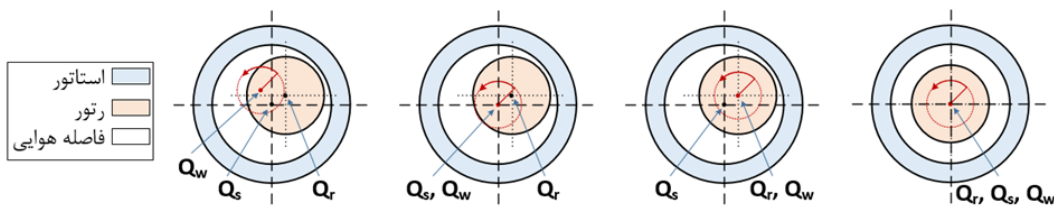


شکل (۱): خطای ناهم‌محوری در ماشین شار شعاعی؛ از راست به چپ: سالم، ناهم‌محوری ناهم‌راستایی، ناهم‌محوری زاویه‌ای

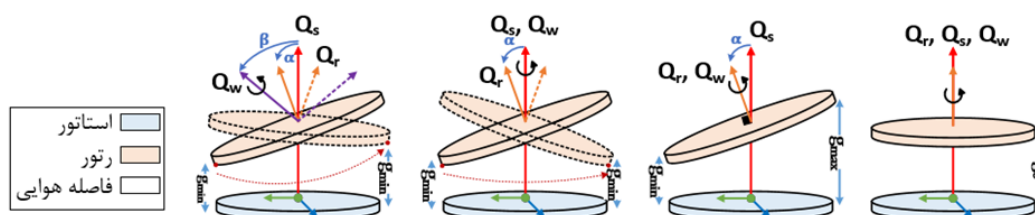


شکل (۲): خطای ناهم‌محوری در ماشین شار محوری؛ از راست به چپ: سالم، ناهم‌محوری ناهم‌راستایی، ناهم‌محوری زاویه‌ای

خطای ناهم‌محوری را می‌توان از نقطه‌نظر نحوه تغییرات طول فاصله‌هوایی نیز دسته‌بندی کرد. بر این اساس خطای ناهم‌محوری به سه صورت مختلف می‌تواند ظاهر شود: خطای ناهم‌محوری استاتیکی، خطای ناهم‌محوری دینامیکی و خطای ناهم‌محوری مرکب. شکل (۳) این دسته‌بندی را برای خطای ناهم‌محوری شعاعی در ماشین شار شعاعی و شکل (۴) صورت‌های مختلف خطای ناهم‌محوری زاویه‌ای را در ماشین شار محوری نشان می‌دهند. اساساً یک ماشین الکتریکی از یک هسته رتور چرخان و یک هسته استاتور ساکن تشکیل شده است. بر این مبنا سه محور برای یک ماشین الکتریکی می‌توان در نظر گرفت؛ محور تقارن فیزیکی رتور  $O_R$ ، محور تقارن فیزیکی استاتور  $O_S$  و محور چرخش رتور  $O_W$ . در شرایط بدون خطا و ایده‌آل سه محور یادشده بر هم منطبق هستند. در اثر بروز خطای ناهم‌محوری دو یا هر سه محور جابجا می‌شوند. جابه‌جایی محورها باعث غیریکنواخت شدن طول فاصله‌هوایی می‌شود به طوری که فاصله‌هوایی دارای یک نقطه حداکثر و یک نقطه حداقل خواهد شد. این غیریکنواختی به صورت استاتیک یا دینامیک ظاهر می‌شود. در صورتی که محور تقارن فیزیکی رتور  $O_R$  و محور چرخش رتور  $O_W$  بر هم منطبق اما جدا از محور تقارن فیزیکی استاتور  $O_S$  باشند، ناهم‌محوری از نوع استاتیک خواهد بود. در



شکل (۳): خطای ناهم‌محوری ناهم‌راستایی در ماشین شار شعاعی؛ از راست به چپ: سالم، استاتیک، دینامیک، مرکب



شکل (۴): خطای ناهم‌محوری زاویه‌ای در ماشین شار محوری؛ از راست به چپ: سالم، استاتیک، دینامیک، مرکب

ماشین، تغییرات ولتاژ و عدم تعادل ولتاژ می‌تواند در این زمینه راهگشا باشد. به طور خلاصه شاخصی برای شناسایی و تشخیص خطا ایده‌آل است که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- قابل اندازه‌گیری
- مستقل از شرایط کاری و بارگذاری ماشین
- عدم حساسیت نسبت به سایر خطاها

بروز خطای ناهم‌محوری در ریزالور منجر به بروز اعوجاج در چگالی شار فاصله‌هوایی، گشتاور الکترومغناطیسی فاصله‌هوایی، لرزش و نویزهای صوتی، عدم تعادل ولتاژها و جریان‌های خروجی و اعوجاج در جریان تحریک می‌شود. برای تشخیص خطا در ریزالور، می‌توان هر یک از شاخص‌های ذکر شده را اندازه گرفت و با بررسی و تحلیل آن، خطا را شناسایی کرد و آن را تشخیص داد. بدین منظور باید حسگرهای خاصی را روی ماشین نصب کرد که در غالب موارد از نظر اقتصادی مقرون‌به‌صرفه نیست. حتی در بسیاری از موارد بایستی تغییراتی را در ساختار ماشین ایجاد کرد. به این دسته از روش‌های تشخیص عیب، روش‌ها مخرب یا تهاجمی گفته می‌شود که ممکن است خود عاملی برای اختلال در عملکرد ریزالور باشد. به‌عنوان مثال هرچند نصب حسگر شار برای مطالعه روند تغییرات چگالی شار فاصله‌هوایی امکان‌پذیر است، اما قراردادن حسگر اضافی علاوه بر افزایش پیچیدگی و هزینه، در کنار کاهش قابلیت اطمینان سیستم، به دلیل قرارگیری در محیط پرتنش ریزالور در معرض مشکلات مکانیکی از جمله از دست دادن پایداری است. به همین دلیل استفاده از روش‌های غیرتهاجمی مثل پایش پیوسته ولتاژها و جریان‌ها موردتوجه قرار گرفته است [۱۳]. رایج‌ترین روش‌های استفاده برای پایش شرایط کاری ماشین الکتریکی تحلیل طیف جریان استاتور [۱۴] است، چراکه معمولاً جریان استاتور از پایش توسط حسگرهای جریان سنجیده شده‌اند و در دسترس هستند. خطای ناهم‌محوری توسط لرزش ماشین الکتریکی نیز می‌تواند مورد شناسایی قرار گیرد [۱۵]، [۱۶]. اولین مطالعات در زمینه خطای ناهم‌محوری و نیروهای کششی نامتعادل کننده توسط روزنبرگ<sup>۲</sup>

خطای ناهم‌محوری باعث ایجاد یک کشش مغناطیسی غیر متعادل<sup>۱</sup> می‌شود که خود باعث تشدید میزان ناهم‌محوری خواهد شد. در اثر خطای ناهم‌محوری بار اضافی روی محور ماشین اعمال می‌شود که خستگی و سایدگی بیشتر بیرینگ‌ها را در پی دارد. همچنین وارد شدن نیروهای شعاعی به سیم‌پیچی‌های استاتور باعث لرزش این سیم‌پیچی‌ها می‌شود. در حالت حدی رتور و استاتور باهم تماس پیدا می‌کنند و باعث آسیب دائمی به ماشین می‌شود. برخی از تأثیرات منفی خطای ناهم‌محوری روی رفتار ماشین‌های الکتریکی به شرح زیر است:

- افزایش تلفات و کاهش بازده
- افزایش دمای سیم‌پیچ‌ها
- کاهش متوسط گشتاور خروجی
- افزایش نوسانات سرعت و گشتاور
- افزایش خطای تخمین موقعیت در کاربرد حسگرهای مغناطیسی [۱۱]، [۱۲].

#### ۴- روش شناسایی و تشخیص خطای ناهم‌محوری

هر تغییر قابل‌اندازه‌گیری و مشاهده از شرایط کاری عادی ماشین الکتریکی می‌تواند به‌عنوان شاخص شناسایی و تشخیص بروز خطا مورد استفاده قرار گیرد. معمولاً شاخص شناسایی و تشخیص خطا در قالب یک شاخص فیزیکی بیان می‌شود. شاخصی مطلوب است که در عمل قادر باشد در تمام وضعیت‌های کاری بیانگر بروز خطا باشد؛ و ثانیاً مختص به یک خطا باشد. گاهی یک شاخص فیزیکی از دو یا چند خطا تأثیر می‌پذیرد. به عبارتی قدرت تشخیص خطا توسط این شاخص با چالش روبرو می‌شود. بنابراین شاخصی باید مدنظر قرار گیرد که در اثر بروز یک خطا ثابت باشد و در اثر بروز خطای دیگر تغییر کند. بدین ترتیب تشخیص یک خطا از میان خطاهای متعددی که احتمالاً هم‌زمان نیز رخ دهند امکان‌پذیر خواهد شد. مقایسه بین شاخص‌های مختلف از نظر دسترسی و سهولت اندازه‌گیری، دقت شناسایی و تشخیص خطا، تأثیرپذیری از شرایط بارگذاری، اشباع

<sup>۲</sup> Rosenberg

<sup>۱</sup> Unbalanced Magnetic Pull (UMP)

فاصله‌هوایی، روابط توصیف‌کننده اندوکتانس متقابل - و ولتاژ القایی که متناسب است با اندوکتانس متقابل - استخراج می‌شوند.

### ۵-۱- پرمیانس فاصله هوایی

با تقریب قابل قبولی می‌توان گفت که در یک ریزالور شار محوری مؤلفه اصلی شار مغناطیسی در راستای عمودی از فاصله‌هوایی بین رتور و استاتور عبور می‌کند. برای محاسبه توزیع چگالی شار مغناطیسی برآیند فاصله‌هوایی می‌توان از حاصل ضرب توزیع نیروی محرکه مغناطیسی سیم‌پیچی‌ها و پرمیانس فاصله‌هوایی استفاده کرد.

پرمیانس فاصله‌هوایی  $\Lambda$  معمولاً ناشی از شیارهای رتور، شیارهای استاتور، ناهم‌محوری رتور، عدم تقارن شکل هسته، و اشباع مغناطیسی آن است. سری فوریه پرمیانس فاصله‌هوایی ناشی از شیارهای استاتور با فرض رتور بدون شیار به صورت (۱) قابل بیان است:

$$\Lambda_{st}(\varphi) = \sum_{h_{st}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{st}} \cos(h_{st} Z_{st} \varphi) \quad (1)$$

که در آن  $\varphi$  زاویه فضایی در قاب مرجع استاتور،  $Z_{st}$  تعداد شیارهای استاتور، و  $h_{st}$  یک عدد صحیح است. به طریق مشابه، سری فوریه پرمیانس فاصله‌هوایی ناشی از شیارهای رتور با فرض استاتور بدون شیار به صورت (۲) بیان می‌شود:

$$\Lambda_{rt}(\varphi, t) = \sum_{h_{rt}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{rt}} \cos(h_{rt} Z_{rt}(\varphi - \omega_r t)) \quad (2)$$

که در آن  $\omega_r$  سرعت زاویه‌ای رتور،  $t$  زمان،  $Z_{rt}$  تعداد شیارهای رتور، و  $h_{rt}$  یک عدد صحیح است. بنابراین رلوکتانس معادل فاصله‌هوایی  $R$  برابر خواهد بود با:

$$R_{st,rt} = \frac{1}{\Lambda_{st}} + \frac{1}{\Lambda_{rt}} - \frac{1}{\Lambda_g} \quad (3)$$

که در آن  $\Lambda_g = \mu_0/g_0$ ،  $g_0$  متوسط طول فاصله‌هوایی در حالت سالم و بدون در نظر گرفتن شیار رتور و استاتور و  $\mu_0$  ضریب گذردهی هوای آزاد و برابر  $4\pi \times 10^{-7}$  است. بر اساس (۳) پرمیانس معادل فاصله‌هوایی برابر است با:

$$\Lambda_{st,rt} = \frac{1}{R_{st,rt}} = \frac{\Lambda_{st}\Lambda_{rt}\Lambda_g}{\Lambda_{st}\Lambda_g + \Lambda_{rt}\Lambda_g - \Lambda_{st}\Lambda_{rt}} \quad (4)$$

معادله (۴) با ساده‌سازی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\Lambda_{st,rt} \cong k\Lambda_{st}\Lambda_{rt} \quad (5)$$

و به سال ۱۹۱۸ میلادی برمی‌گردد [۱۷]. در همان سال‌های ابتدایی قرن بیستم افرادی دیگری از جمله گری و پرتچ<sup>۱</sup> به بررسی نیروهای ناشی از خطای ناهم‌محوری پرداختند [۱۸]. اما آنچه مطالعه در زمینه خطاهای ناهم‌محوری را متمایز می‌کند رساله دکتری آقای دورل<sup>۲</sup> در سال ۱۹۹۳ است که به‌عنوان نقطه آغازی برای مطالعات نوین در زمینه خطاهای ناهم‌محوری در ماشین‌های الکتریکی است [۱۹]. برای اندازه‌گیری میدان مغناطیسی فاصله‌هوایی و ارزیابی هارمونیک‌های القاشده در آن می‌توان از یک کلاف جستجو استفاده کرد [۲۰]. این کلاف درون شیارهای استاتور قرار می‌گیرد و با اندازه‌گیری ولتاژ القاشده در دو سر آن و انتگرال‌گیری از آن می‌توان میدان مغناطیسی فاصله‌هوایی و هارمونیک‌های موجود در آن را بررسی کرد. شکل موج میدان مغناطیسی حاوی اطلاعات کاملی از وضعیت مکانیکی رتور و استاتور است. بدین ترتیب تشخیص خطا امکان‌پذیر خواهد بود. اشکال این روش، وجود کلاف جستجو در آن است که در اثر نویز، اغتشاشات و تداخل امواج الکترومغناطیسی روی سیگنال‌های ارسالی موجب خطای تشخیص می‌شود. علاوه بر این که کلاف جستجو نیازمند فضای اضافی برای قرارگیری در محیط ماشین است، عبور جریان از این کلاف می‌تواند باعث ایجاد اغتشاش در ولتاژهای القایی در سیم‌پیچی‌های استاتور شده و عملکرد ماشین الکتریکی را با خطاهای بیشتری مواجه سازد. همچنین در این روش یک مدار الکترونیکی برای تحلیل ولتاژهای القایی در کلاف جستجو مورد نیاز است.

### ۵- معرفی شاخص شناسایی و تشخیص خطای ناهم‌محوری

با توجه به مطالب گفته‌شده چندین شاخص برای شناسایی و تشخیص خطای ناهم‌محوری استاتیکی و دینامیکی می‌تواند مورد بررسی قرار می‌گیرند. شاخص‌های مثل چگالی شار فاصله‌هوایی، اندوکتانس خودی رتور، اندوکتانس متقابل رتور و استاتور، ولتاژهای القایی و جریان تحریک. در انتها با مقایسه این شاخص‌ها با یکدیگر، مطلوب‌ترین شاخص از نقطه‌نظر قابلیت دسترسی، مستقل بودن و جامع بودن پیشنهاد داده خواهد شد. تحلیل و بررسی این شاخص‌ها نیازمند استفاده از یک مدل فیزیکی برای ریزالور است. ابتدا با محاسبه پرمیانس فاصله‌هوایی و در اختیار داشتن نیروی محرکه مغناطیسی، طیف هارمونیک چگالی شار به دست می‌آید. درنهایت با استفاده از پرمیانس

<sup>1</sup> Gray and Pertch

<sup>2</sup> Dorrell

$$\delta_{ecc} = \delta_{se} \quad (۱۰)$$

که در آن  $\theta_0$  موقعیت حداقل طول فاصله‌هوایی است. در حالت خطای دینامیک:

$$\theta_r = \theta_{de} = \omega_r t \quad (۱۱)$$

$$\delta_{ecc} = \delta_{de} \quad (۱۲)$$

و در حالت خطای مرکب:

$$\theta_r = \text{atan}\left(\frac{\delta_{de} \sin(\omega_r t)}{\delta_{se} + \delta_{de} \sin(\omega_r t)}\right) \quad (۱۳)$$

$$\delta_{ecc} = \sqrt{\delta_{se}^2 + \delta_{de}^2 + 2\delta_{se}\delta_{de} \cos(\varphi - \omega_r t)} \quad (۱۴)$$

بنابراین، پرمیانس فاصله‌هوایی که متناسب با عکس طول فاصله‌هوایی است، به دست می‌آید:

$$\Lambda_{ec}(r, \varphi, \theta_r) = \frac{\mu_0}{g(r, \varphi, \theta_r)} \quad (۱۵)$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}{g_0} \cdot \frac{\mu_0}{1 - \delta_{ecc} \cos(\varphi - \theta_r)}$$

با محاسبه سری فوریه عبارت (۱۵) و با استفاده از روابط (۹) و (۱۰) مؤلفه‌های هارمونیک پرمیانس فاصله‌هوایی در حالت ناهم‌محوری استاتیکی به دست می‌آیند:

$$\Lambda_{ec,s}(\varphi) = \sum_{h_{ec,s}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{ec,s}} \cos(h_{ec,s}(\varphi - \theta_0) + \varphi_{h_{ec,s}}) \quad (۱۶)$$

که در آن  $h_{ec,d}$  یک عدد صحیح و  $\varphi_{h_{ec,s}}$  فاز هارمونیک  $h$  ام است به‌طوری‌که:

$$\Lambda_{h_{ec,s}} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{K_g} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \delta_{se}^2}} = k_{s0} & h_{ec,s} = 0 \text{ به ازای} \\ \frac{\mu_0}{K_g} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \delta_{se}^2}} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \delta_{se}^2}}{\delta_{se}} \right)^{h_{ec,s}} = 2k_{s0} \times k_s^{h_{ec,s}} & \text{سایر} \end{cases}$$

$$\varphi_{ec,s} = 0$$

بهتر است تعداد جملات معادله (۱۶) بر اساس تعداد جفت قطب‌های ماشین انتخاب شود. به‌این‌ترتیب در یک ماشین  $2P$  قطب تعداد  $P$  جمله نخستین کافی است. برای به دست آوردن مؤلفه‌های هارمونیک پرمیانس فاصله‌هوایی در شرایط خطای ناهم‌محوری دینامیکی روندی مشابه آنچه برای ناهم‌محوری استاتیکی انجام شد باید طی شود، با این تفاوت که در ناهم‌محوری دینامیکی موقعیت لحظه‌ای حداقل طول فاصله‌هوایی نسبت به قاب مرجع استاتور در حال تغییر است. بنابراین در این حالت مؤلفه متغیر با زمان در پرمیانس فاصله‌هوایی وجود خواهد داشت:

که در آن  $k$  یک ضریب ثابت با دیمانسیون عکس پرمیانس است. بنابراین پرمیانس فاصله‌هوایی ناشی از هسته شیاردار تقریباً برابر است با حاصل‌ضرب پرمیانس هسته استاتور و رتور در یک ضریب ثابت. به عبارتی:

$$\Lambda_{st,rt}(\varphi, t) = \sum_{h_{st}=0}^{\infty} \sum_{h_{rt}=0}^{\infty} k'_{h_{st},h_{rt}} \cos(h_{st}Z_{st}\varphi) \cos(h_{rt}Z_{rt}(\varphi - \omega_r t)) \quad (۶)$$

$$= \sum_{h_{st}=0}^{\infty} \sum_{h_{rt}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{st},h_{rt}} \cos\{(h_{rt}Z_{rt} \pm h_{st}Z_{st})\varphi - h_{rt}Z_{rt}\omega_r t\}$$

اثر اشباع هسته را می‌توان به‌صورت نوساناتی در پرمیانس فاصله‌هوایی مدل کرد [۲۱]، [۲۲]. مطابق [۲۲] پرمیانس فاصله‌هوایی ناشی از اشباع با دو برابر تعداد قطب‌های فرکانس مؤلفه و به صورت (۷) قابل‌بیان است:

$$\Lambda_{sa}(\varphi, t) = \sum_{h_{sa}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{sa}} \cos\{2h_{sa}(P\varphi - \omega_1 t)\} \quad (۷)$$

که در آن  $\omega_1$  سرعت زاویه‌ای مؤلفه اصلی،  $P$  تعداد جفت قطب‌های ماشین و  $h_{sa}$  یک عدد صحیح است.

برای محاسبه پرمیانس فاصله‌هوایی در اثر خطای ناهم‌محوری دینامیکی ابتدا لازم است طول فاصله‌هوایی به‌صورت تحلیلی به دست آید. در صورتی‌که طول فاصله‌هوایی در حالت سالم  $g_0$  باشد، این مقدار در حالت خطای ناهم‌محوری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(r, \varphi, \theta_r) = K_g(1 - \delta_{ecc} \cos(\varphi - \theta_r)) \quad (۸)$$

به‌طوری‌که:

$$K_g = \frac{g_0}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$$

$$\delta_{ecc} = \frac{r}{g_0} \tan(\alpha)$$

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{g_{max} - g_{min}}{2R_o}\right)$$

که در این رابطه  $\theta_r$  موقعیت لحظه‌ای رتور،  $r$  شعاع،  $R_o$  شعاع خارجی ریزالور،  $g_{min}$  و  $g_{max}$  به ترتیب طول فاصله‌هوایی حداقل و حداکثر است. لازم به ذکر است که در این رابطه از اثرات شیارهای رتور و استاتور و اشباع مغناطیسی صرف‌نظر شده است. برای هر یک از حالت‌های خطای استاتیک، دینامیک و مرکب،  $K_g$  و  $\delta_{ecc}$  می‌تواند متفاوت از هم باشد. در حالت خطای استاتیک:

$$\theta_r = \theta_{se} = \theta_0 \quad (۹)$$

نیروی محرکه مغناطیسی ناشی از جریان‌های رتور و استاتور است. با یادآوری این نکته که سیم‌پیچی‌های استاتور در خروجی به یک منبع با امپدانس زیاد متصل شده‌اند، با تقریب خوبی می‌توان از جریان‌های استاتور و نیروی محرکه مغناطیسی ناشی از آن صرف‌نظر کرد.

$$MMF_r(r, \varphi, \theta_r) = \sum_{h_{sr}=0}^{\infty} F_{h_{sr}} \sin(h_{sr}P(\varphi - \theta_r)) \cos(\omega_f t) \quad (21)$$

که در آن دامنه مؤلفه‌های هارمونیک نیروی محرکه مغناطیسی رتور،  $\omega_f$  فرکانس ولتاژ تحریک رتور، و  $h_{sr}$  یک عدد صحیح است. مطابق قانون آمپر چگالی شار مغناطیسی فاصله‌هوایی ناشی از تغذیه رتور به دست می‌آید. چگالی شار فاصله‌هوایی برابر حاصل ضرب پرمیانس فاصله‌هوایی و نیروی محرکه مغناطیسی است:

$$B_r(r, \varphi, \theta_r) = \Lambda_{tot}(r, \varphi, \theta_r) MMF_r(r, \varphi, \theta_r) \quad (22)$$

با جایگذاری رابطه (۲۰) در (۲۲) مقدار چگالی شار فاصله‌هوایی در حالت ناهم محوری محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} B_r(r, \varphi, \theta_r) &= \sum_{h_{st}=0}^{\infty} \sum_{h_{rt}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.s}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.d}=0}^{\infty} \sum_{h_{sr}=0}^{\infty} F_{h_{sr}} \Lambda_{h_{st}, h_{rt}, h_{ec.d}, h_{ec.s}} \cos\{(h_{rt}Z_{rt} \\ &\pm h_{st}Z_{st} \pm h_{ec.d} \pm h_{ec.s})\varphi - (h_{rt}Z_{rt}\omega_r \pm h_{ec.d}\omega_r)t \\ &\mp h_{ec.s}\theta_0\} \sin(h_{sr}P(\varphi - \theta_r)) \cos(\omega_f t) \\ &= \sum_{h_{st}=0}^{\infty} \sum_{h_{rt}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.s}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.d}=0}^{\infty} \sum_{h_{sr}=0}^{\infty} F_{h_{sr}} \Lambda_{h_{st}, h_{rt}, h_{ec.d}, h_{ec.s}} \sin\{(h_{rt}Z_{rt} \\ &\pm h_{st}Z_{st} \pm h_{ec.d} \pm h_{ec.s})\varphi \\ &- (h_{rt}Z_{rt}\omega_r \pm h_{ec.d}\omega_r \pm h_{sr}P\omega_r)t \mp h_{ec.s}\theta_0\} \cos(\omega_f t) \\ &= \sum_{h_{st}=0}^{\infty} \sum_{h_{rt}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.s}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.d}=0}^{\infty} \sum_{h_{sr}=0}^{\infty} F_{h_{sr}} \Lambda_{h_{st}, h_{rt}, h_{ec.d}, h_{ec.s}} \sin\{(h_{rt}Z_{rt} \\ &\pm h_{st}Z_{st} \pm h_{ec.d} \pm h_{ec.s})\varphi \\ &- (h_{rt}Z_{rt}\omega_r \pm h_{ec.d}\omega_r \pm h_{sr}P\omega_r \mp \omega_f)t \mp h_{ec.s}\theta_0\} \end{aligned} \quad (23)$$

به عبارت دیگر:

$$B_r(r, \varphi, \theta_r) = \sum_{m_h, \omega_h=0}^{\infty} B_{m, \omega} \sin\{m_h\varphi - \omega_h t \mp h_{ec.s}\theta_0\} \quad (24)$$

که در آن:

$$m_h = h_{rt}Z_{rt} \pm h_{st}Z_{st} \pm h_{ec.d} \pm h_{ec.s} \pm h_{sr}P$$

$$\Lambda_{ec.d}(r, \varphi, \theta_r) = \sum_{h_{ec.d}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{ec.d}} \cos(h_{ec.d}(\varphi - \omega_r t) + \varphi_{ec,d}) \quad (17)$$

که در آن  $h_{ec.d}$  یک عدد صحیح و  $\varphi_{h_{ec.d}}$  فاز هارمونیک  $h$  است به طوری که:

$$\Lambda_{h_{ec.d}} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{K_g} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \delta_{de}^2}} = k_{d0} & h_{ec.d} = 0 \\ \frac{\mu_0}{K_g} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \delta_{de}^2}} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \delta_{de}^2}}{\delta_{de}} \right)^{h_{ec.d}} = 2k_{d0} \times k_d^{h_{ec.d}} & \text{سایر} \end{cases}$$

$$\varphi_{h_{ec.d}} = 0$$

به این ترتیب با ترکیب معادلات (۱۶) و (۱۷)، پرمیانس فاصله‌هوایی ناشی از ناهم محوری رتور به دست می‌آید:

$$\Lambda_{ec}(\varphi, t) = \sum_{h_{ec.s}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.d}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{ec.d}, h_{ec.s}} \cos\{(h_{ec.d} \pm h_{ec.s})\varphi - (h_{ec.d}\omega_r t \pm h_{ec.s}\theta_0)\} \quad (18)$$

لازم به ذکر است که اثر عدم تقارن هندسه رتور و استاتور مشابه اثر ناهم محوری رتور است که از آن صرف‌نظر شده است. به این ترتیب با در نظر گرفتن اثر شیارهای رتور و استاتور، ناهم محوری استاتیک و دینامیک و اشباع هسته با استفاده از معادلات (۶)، (۷) و (۱۸) پرمیانس برآیند فاصله‌هوایی به دست می‌آید:

$$\Lambda_{tot}(\varphi, t) = \sum_{h_{st}=0}^{\infty} \sum_{h_{rt}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.s}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.d}=0}^{\infty} \sum_{h_{sa}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{st}, h_{rt}, h_{ec.d}, h_{ec.s}, h_{sa}} \cos\{(h_{rt}Z_{rt} \pm h_{st}Z_{st} \pm h_{ec.d} \pm h_{ec.s} \pm 2h_{sa}P)\varphi - (h_{rt}Z_{rt}\omega_r \pm h_{ec.d}\omega_r \pm 2h_{sa}\omega_1)t \mp h_{ec.s}\theta_0\} \quad (19)$$

در صورت صرف‌نظر کردن از هرکدام از عوامل ایجادکننده اغتشاش مقدار متناظر با آن در معادله (۱۹) به صورت یک عدد ثابت و بدون مؤلفه هارمونیک وارد می‌شود. با علم به اینکه چگالی شار مغناطیسی در ریزالور کم و از مرتبه چند میلی تسلا است، می‌توان اثر اشباع هسته را نادیده گرفت:

$$\Lambda_{tot}(\varphi, t) = \sum_{h_{st}=0}^{\infty} \sum_{h_{rt}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.s}=0}^{\infty} \sum_{h_{ec.d}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{st}, h_{rt}, h_{ec.d}, h_{ec.s}} \cos\{(h_{rt}Z_{rt} \pm h_{st}Z_{st} \pm h_{ec.d} \pm h_{ec.s})\varphi - (h_{rt}Z_{rt}\omega_r \pm h_{ec.d}\omega_r)t \mp h_{ec.s}\theta_0\} \quad (20)$$

## ۲-۵- چگالی شار فاصله هوایی

برای محاسبه چگالی شار فاصله‌هوایی لازم است نیروی محرکه مغناطیسی برآیند فاصله‌هوایی به دست آید. عبور جریان از سیم‌پیچی‌های ماشین الکتریکی در کنار مؤلفه اصلی باعث تولید هارمونیک‌های فضایی نیروی محرکه مغناطیسی می‌شود.



موقعیت خطای ناهم‌محوری و برای خطای دینامیکی مستقل از آن است.

### ۵-۳- اندوکتانس‌های خودی و متقابل

هر یک از سیم‌پیچ‌های استاتور و رتور در کنار مؤلفه اصلی  $P$  شامل مؤلفه‌های هارمونیک فضایی متعددی هستند. تابع دور سیم‌پیچ‌های فاز  $A$  و  $B$  استاتور به ترتیب در معادلات (۲۹) و (۳۰) نشان داده شده است:

$$n_A(\varphi) = \sum_{i_A=0}^{\infty} N_{Ai} \cos(i_A \varphi + a_{i_A}) \quad (29)$$

$$n_B(\varphi) = \sum_{i_B=0}^{\infty} N_{Bi} \cos(i_B \varphi + b_{i_B}) \quad (30)$$

که در آن  $N_{Bi}$  و  $N_{Ai}$  به ترتیب دامنه هارمونیک  $i$ ام سیم‌پیچی فاز  $A$  و  $B$  استاتور و  $a_{i_A}$  و  $b_{i_B}$  به ترتیب فاز هارمونیک  $i$ ام سیم‌پیچی فاز  $A$  و  $B$  استاتور است. تابع دور سیم‌پیچ رتور با در نظر گرفتن هارمونیک‌های فضایی برابر است با:

$$n_R(\varphi, \theta_r) = \sum_{i_R=1}^{\infty} N_{Ri} \cos(i_R(\varphi + \theta_r) + c_{i_R}) \quad (31)$$

که در آن  $N_{Ri}$  دامنه هارمونیک  $i$ ام سیم‌پیچی رتور و  $c_{i_R}$  و فاز هارمونیک  $i$ ام سیم‌پیچی رتور است. اندوکتانس متقابل بین سیم‌پیچی رتور و سیم‌پیچی فاز  $A$  استاتور از رابطه (۳۲) و (۳۳) به دست می‌آید:

$$L_{AR}(\theta_r) = \int_0^{r_1} \int_{r_1}^{r_2} n_R(\varphi, \theta_r) M_A(\varphi, \theta_r) \mu_0 g^{-1}(r, \varphi, \theta_r) r dr d\varphi \quad (32)$$

$$M_A(\varphi, \theta_r) = n_A - \langle M_A \rangle \quad (33)$$

که در آن  $g^{-1}$  تابع معکوس فاصله‌هوایی در شعاع  $r$ ،  $M_A$  بیانگر تابع سیم‌پیچی اصلاح‌شده سیم‌پیچ  $A$  است. متوسط تابع سیم‌پیچی  $\langle M_A \rangle$  به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\langle M_A \rangle = \frac{1}{(g^{-1})} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sum_{i_A=0}^{\infty} N_{Ai} \cos(i_A \varphi + a_{i_A}) + \sum_{h_{se}=0}^{\infty} \sum_{h_{de}=0}^{\infty} \Lambda_{h_{se}, h_{de}} \cos\{(h_{se} \pm h_{de})\varphi + (h_{se}\theta_0 \pm h_{de}\theta_r)\} r dr d\varphi \quad (34)$$

$\langle g^{-1} \rangle$  متوسط طول فاصله‌هوایی است که برابر است با:

$$\langle g^{-1} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} g^{-1}(r, \varphi, \theta_r) r dr d\varphi = 2\pi \lambda_0 \quad (35)$$

$$\omega_h = (h_{rt} Z_{rt} \pm h_{ec,d} \pm h_{sr} P) \omega_r \mp \omega_f$$

معادله (۲۴) بیانگر این است که تابع چگالی شار فاصله‌هوایی با مودها  $m_h$  و فرکانس‌های  $\omega_h$  در حال نوسان است. در صورتی که از اثر شیار رتور و استاتور صرف‌نظر کنیم، و با فرض اینکه نیروی محرکه مغناطیسی ناشی از تغذیه رتور سینوسی باشد، در توزیع چگالی شار فاصله‌هوایی مؤلفه‌های هارمونیک صرفاً ناشی از خطای ناهم‌محوری خواهد بود. مؤلفه‌های فرکانسی در طیف هارمونیک فضایی چگالی شار مغناطیسی ناشی از خطای استاتیکی و دینامیکی به ترتیب در معادلات (۲۵) و (۲۶) آمده است:

$$f_{ec,s} = f_s \quad (25)$$

$$f_{ec,d} = \left(1 \pm \frac{h_{ec,d}}{P}\right) f_s \quad (26)$$

همچنین فاز مؤلفه‌های هارمونیک فضایی در چگالی شار فاصله‌هوایی ناشی از خطای استاتیک و دینامیک به ترتیب در معادلات (۲۷) و (۲۸) خلاصه شده‌اند:

$$\zeta_{ec,s} = (P \pm h_{ec,s})\varphi \pm h_{ec,s}\theta_0 \quad (27)$$

$$\zeta_{ec,d} = (P \pm h_{ec,d})\varphi \quad (28)$$

که در آن  $f_s = P\omega_r/2\pi$  همان‌طور که مشاهده می‌شود، در طیف هارمونیک چگالی شار فاصله‌هوایی تنها مؤلفه دینامیکی دیده می‌شود و حضور ناهم‌محوری استاتیکی تأثیری روی ایجاد مؤلفه‌های جدید در چگالی شار فاصله‌هوایی ندارد. بنابراین با ملاک قرار دادن مؤلفه‌های فرکانسی طیف هارمونیک فضایی چگالی شار مغناطیسی فاصله‌هوایی، تغییر دامنه این مؤلفه‌ها در فرکانس  $f_s$  و  $f_s \left(1 \pm \frac{h_{ec,d}}{P}\right)$  به ترتیب برای خطای استاتیکی و دینامیکی می‌تواند به‌عنوان شاخصی برای شناسایی خطای ناهم‌محوری استاتیکی و دینامیکی باشد. این مؤلفه‌ها مستقل از موقعیت خطای ناهم‌محوری بوده اما با افزایش میزان خطای ناهم‌محوری افزایش می‌یابند. همچنین فاز مؤلفه‌های فرکانسی طیف هارمونیک فضایی چگالی شار مغناطیسی نیز در اثر وقوع خطای ناهم‌محوری استاتیکی و دینامیکی به ترتیب به صورت  $(P \pm h_{ec,s})\varphi \pm h_{ec,s}\theta_0$  و  $(P \pm h_{ec,d})\varphi$  تغییر می‌کنند، که می‌تواند به‌عنوان یک شاخص جانبی برای شناسایی وقوع خطای ناهم‌محوری مورد استفاده قرار گیرد. لازم به ذکر است، همان‌طور که مشاهده می‌شود، فاز این هارمونیک‌ها برای خطای استاتیکی وابسته به

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی مؤلفه‌هایی از طیف اندوکتانس متقابل تحریک می‌شوند که دارای فرکانسی برابر با فرکانس مؤلفه‌های هارمونیک سی‌پیچی رتور باشند. به عبارت دیگر، در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی، هارمونیک‌های مؤثر در طیف اندوکتانس متقابل و ولتاژ القایی هم فرکانس با هارمونیک‌های فضایی سی‌پیچی رتور خواهند بود. جهت بررسی نحوه تغییر دامنه و فاز این هارمونیک‌ها فرض می‌شود که سی‌پیچی استاتور تنها از  $P_1$  جفت قطب و سی‌پیچی رتور تنها از  $P_2$  جفت تشکیل شده باشند. لذا تابع دور سی‌پیچی‌های فاز  $A$  و  $B$  استاتور و تابع دور سی‌پیچی رتور به صورت زیر خواهند بود:

$$n_{sA}(\varphi) = N_A \cos(P_1\varphi + a_A) \quad (۴۰)$$

$$n_{sB}(\varphi) = N_A \cos(P_1\varphi + a_B) \quad (۴۱)$$

$$n_R(\varphi) = N_R \cos(P_2(\varphi + \theta_r) + c_R) \quad (۴۲)$$

که در آن  $N_{SA}$  و  $N_{SB}$  به ترتیب حداکثر تعداد دور سی‌پیچی‌های فاز  $A$  و  $B$  استاتور و  $N_R$  حداکثر تعداد دور سی‌پیچی رتور است. مطابق رابطه (۳۹) اندوکتانس متقابل رتور و استاتور در خطای استاتیکی به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$L_{AR,s}(\theta_r) = \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} \lambda_{P_2-P_1}}{2} \cos(c_{P_2} - a_{P_1} + P_2\theta_r - (P_2 - P_1)\theta_0 - \varphi_{P_2-P_1}) + \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} \lambda_{P_1-P_2}}{2} \cos(c_{P_2} - a_{P_1} + P_2\theta_r - (P_1 - P_2)\theta_0 + \varphi_{P_1-P_2}) + \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} \lambda_{P_1+P_2}}{2} \cos(c_{P_2} + a_{P_1} + P_2\theta_r - (P_1 + P_2)\theta_0 - \varphi_{P_1+P_2}) - \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} \lambda_{P_1} \lambda_{P_2}}{2\lambda_0} (\cos(a_{P_1} - P_1\theta_0 - \varphi_{P_1}) \cos(c_{P_2} + P_2\theta_r - P_2\theta_0 - \varphi_{P_2})) \quad (۴۳)$$

با توجه به (۱۶) و استفاده از رابطه ترکیب کسینوس‌ها، رابطه توصیف‌کننده اندوکتانس متقابل بین سی‌پیچی رتور و استاتور در صورتی که سی‌پیچی‌های مذکور تنها از یک مؤلفه تشکیل شده باشند به دست می‌آید:

$$L_{AR,s}(\theta_r) = \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} k_{s0}}{2} \times \left\{ [k_s^{|P_2-P_1|} \cos(c_{P_2} - a_{P_1} - |P_2 - P_1|\theta_0) - k_s^{P_1+P_2} \cos(c_{P_2} - a_{P_1} - (P_2 - P_1)\theta_0)]^2 + [k_s^{|P_2-P_1|} \sin(c_{P_2} - a_{P_1} - |P_2 - P_1|\theta_0) - k_s^{P_1+P_2} \sin(c_{P_2} - a_{P_1} - (P_2 - P_1)\theta_0)]^2 \right\}^{0.5} \sin(P_2\theta_r) + \tan^{-1} \left( \frac{k_s^{|P_2-P_1|} \sin(c_{P_2} - a_{P_1} - |P_2 - P_1|\theta_0) - k_s^{P_1+P_2} \sin(c_{P_2} - a_{P_1} - (P_2 - P_1)\theta_0)}{k_s^{|P_2-P_1|} \cos(c_{P_2} - a_{P_1} - |P_2 - P_1|\theta_0) - k_s^{P_1+P_2} \cos(c_{P_2} - a_{P_1} - (P_2 - P_1)\theta_0)} \right) \times \sin(P_2\theta_r + c_{P_2} - a_{P_1} - |P_2 - P_1|\theta_0) \quad (۴۴)$$

با جایگذاری (۳۵) در (۳۴) و حل انتگرال نخست نسبت به متغیر  $\varphi$  متوسط تابع سی‌پیچی به دست می‌آید:

$$\langle M_A \rangle = \frac{1}{2\lambda_0} \int_0^{2\pi} \sum_{i_A=0}^{\infty} \sum_{h_{se}=0}^{\infty} \sum_{h_{de}=0}^{\infty} N_{Ai} \cos(i_A\varphi + a_{i_A}) \lambda_{h_{se}h_{de}} \cos\{(h_{se} \pm h_{de})\varphi + (h_{se}\theta_0 \pm h_{de}\theta_r) + \varphi_{h_{se}h_{de}}\} d\varphi \quad (۳۶)$$

### ۵-۳-۱- اندوکتانس‌های متقابل در خطای ناهم‌محوری استاتیکی

در خطای استاتیکی عبارت (۳۶) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\langle M_{A,s} \rangle = \frac{1}{2\lambda_0} \left\{ N_{A0} \lambda_0 \cos(a_0) \cos(\varphi_0) + \sum_{i=0}^{\infty} N_{Ai} \lambda_i \cos(a_i - i\theta_0 - \varphi_i) \right\} \quad (۳۷)$$

بنابراین با در نظر گرفتن معادله (۳۳) و (۳۴) تابع سی‌پیچی اصلاح‌شده استاتور در خطای استاتیکی به صورت زیر خواهد بود:

$$M_{A,s} = \sum_{i_A=0}^{\infty} N_{Ai} \cos(i_A\varphi + a_{i_A}) - \left\{ \frac{N_{A0}}{2} \cos(a_0) \cos(\varphi_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N_{Ai} \lambda_i}{2\lambda_0} \cos(a_i - i\theta_0 - \varphi_i) \right\} \quad (۳۸)$$

با جایگذاری معادله (۳۸) در (۳۲) و بعد از انجام محاسبات و ساده‌سازی، اندوکتانس متقابل بین سی‌پیچ فاز  $A$  استاتور و سی‌پیچ رتور در حالت خطای استاتیکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L_{AR,s}(\theta_r) = \frac{\pi N_{R0} N_{A0} \lambda_0}{2} \cos(c_0 + a_0 + \varphi_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Aj} \lambda_i}{2} \cos(c_k - a_j + k\theta_r - i\theta_0 - \varphi_i) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Aj} \lambda_i}{2} \cos(c_k - a_j + k\theta_r + i\theta_0 + \varphi_i) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Aj} \lambda_i}{2} \cos(c_k + a_j + k\theta_r - i\theta_0 - \varphi_i) - \frac{\pi}{2} \left( N_{A0} \cos(a_0) \cos(\varphi_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N_{Ai} \lambda_i}{\lambda_0} \cos(a_i - i\theta_0 - \varphi_i) \right) \left( N_{R0} \lambda_0 \cos(c_0 + \varphi_0) + \sum_{i=0}^{\infty} N_{Ri} \lambda_i \cos(c_i + i\theta_r - i\theta_0 - \varphi_i) \right) \quad (۳۹)$$

بر این اساس اندوکتانس خودی سیم‌پیچی رتور به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 L_{RR,s}(\theta_r) &= \frac{\pi N_{R0}^2 \lambda_0}{2} \cos(2c_0) \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Rj} \lambda_i}{2} \cos(i(\theta_r - \theta_0) + c_k - c_j) \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Rj} \lambda_i}{2} \cos(-i(\theta_r - \theta_0) + c_k \\
 &- c_j) \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Rj} \lambda_i}{2} \cos(i(\theta_r - \theta_0) + c_k + c_j) \\
 &- \frac{\pi \lambda_0}{2} \left( N_{R0} \cos(c_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N_{Ri} \lambda_i}{\lambda_0} \cos(i(\theta_r - \theta_0) + c_i) \right)^2
 \end{aligned} \quad (48)$$

این عبارت بیانگر آن است که در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی مؤلفه‌هایی از اندوکتانس خودی رتور تحریک می‌شوند که اولاً به صورت ترکیب خطی از مؤلفه‌های هارمونیک تابع سیم‌پیچی رتور باشند (یعنی به صورت  $kQ_R \pm 2P$  و  $kQ_R$ ) و ثانیاً این هارمونیک‌ها در طیف رلوکتانس فاصله‌هوایی دارای مقدار باشند. در صورتی که تابع سیم‌پیچی رتور تک مؤلفه‌ای و تنها از مؤلفه  $P_2$  تشکیل شده باشد رابطه (۴۸) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 L_{RR,s}(\theta_r) &= \pi N_{R2}^2 \lambda_0 \left[ 1 - \frac{\lambda_{P_2}^2}{4\lambda_0^2} + \left( \frac{\lambda_{2P_2}}{2\lambda_0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\lambda_{P_2}^2}{4\lambda_0^2} \right) \cos(2P_2(\theta_r - \theta_0) \right. \\
 &\quad \left. + 2c_{P_2} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (49)$$

طبق این رابطه در صورتی که سیم‌پیچی رتور تنها یک مؤلفه هارمونیک داشته باشد، آنگاه در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی مقدار DC اندوکتانس خودی رتور افزایش می‌یابد (توجه شود که مقدار  $\lambda_0$  در حالت بدون خطا کمتر از مقدار آن در حالت با خطاست) و مقدار AC با دو برابر فرکانس مؤلفه هارمونیک نوسان خواهد کرد.

### ۵-۳-۳-۵- دینامیکی اندوکتانس‌های متقابل در خطای ناهم‌محوری

در خطای دینامیکی عبارت (۳۶) به صورت زیر قابل بازنویسی

است:

$$\begin{aligned}
 \langle M_{A,d} \rangle &= \frac{1}{2\lambda_0} \left\{ N_{A0} \lambda_0 \cos(a_0) \cos(\varphi_0) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} N_{Ai} \lambda_i \cos(a_i - i\theta_r - \varphi_i) \right\}
 \end{aligned} \quad (50)$$

و در صورتی که سیم‌پیچ استاتور و رتور تنها از یک مؤلفه تشکیل شده باشند، به طوری که  $P_1 = P_2 = P$  و  $C_P = 0$  ، آنگاه مطابق رابطه (۳۹) طیف هارمونیک اندوکتانس متقابل رتور و استاتور در خطای ناهم‌محوری استاتیکی برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned}
 L_{AR,s}(\theta_r) &= -\pi N_{RP} N_{AP} \lambda_0 \sin(P\theta_r) \cos(\varphi_0) \\
 &\quad + \frac{\pi N_{RP} N_{AP} \lambda_{2P}}{2} \sin(P\theta_r - 2P\theta_0 \\
 &\quad - \varphi_{2P}) \\
 &\quad + \frac{\pi N_{RP} N_{AP} \lambda_P^2}{2\lambda_0} \cos(P\theta_r - P\theta_0 \\
 &\quad - \varphi_P) \sin(P\theta_0 + \varphi_P)
 \end{aligned} \quad (45)$$

با استفاده از رابطه (۱۶) و اندکی ساده‌سازی، عبارت اخیر به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$L_{AR,s}(\theta_r) = \pi N_{RP} N_{AP} k_{s0} \times (k_s^{2P} - 1) \times \sin(P\theta_r) \quad (46)$$

از رابطه (۴۴) و (۴۶) می‌توان نتیجه گرفت که اولاً فاز هارمونیک‌های اندوکتانس متقابل مستقل از شدت خطا و تابعی از موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی  $\theta_0$  است؛ ثانیاً دامنه هارمونیک‌های اندوکتانس متقابل وابسته به شدت و موقعیت خطای استاتیکی است. ثالثاً، در مؤلفه  $P_2$  اندوکتانس متقابل، تمام مؤلفه‌های هارمونیک سیم‌پیچی استاتور به همراه مؤلفه  $P_2$  سیم‌پیچی رتور و نیز مؤلفه‌های  $|P_1 \pm P_2|$  رلوکتانس فاصله‌هوایی مشارکت دارند. در حالت بدون خطای ناهم‌محوری و سالم به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$L_{AR}(\theta_r) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi N_{Ri} N_{Ai} \lambda_0}{2} \cos(c_i - a_i + i\theta_r) \quad (47)$$

در واقع در حالت سالم هارمونیک‌های فضایی سیم‌پیچی رتور و استاتور به همراه مؤلفه صفر رلوکتانس فاصله‌هوایی در طیف هارمونیک اندوکتانس متقابل و ولتاژهای القایی دیده می‌شود.

### ۵-۳-۲- اندوکتانس‌های خودی رتور در خطای ناهم‌محوری استاتیکی

با طی روندی مشابه آنچه برای اندوکتانس متقابل در خطای ناهم‌محوری استاتیکی طی شد، می‌توان اندوکتانس خودی رتور را در این شرایط حساب کرد. در این حالت متوسط تابع سیم‌پیچی رتور برابر است با:

$$\begin{aligned}
 \langle M_R \rangle &= \frac{1}{2\lambda_0} \int_0^{2\pi} \sum_{i_R=0}^{\infty} \sum_{h_{se}=0}^{\infty} N_{Ri} \cos(i_R\varphi + i_R\theta_0 \\
 &\quad + c_{i_R}) \lambda_{h_{se}} \cos\{h_{se}\varphi + h_{se}\theta_0 \\
 &\quad + \varphi_{h_{se}}\} d\varphi
 \end{aligned} \quad (47)$$

$$L_{AR,d}(\theta_r) = \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} \lambda_{P_2-P_1}}{2} \cos(c_{P_2} - a_{P_1}) + P_1 \theta_r - \varphi_{P_2-P_1} + \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} \lambda_{P_1-P_2}}{2} \cos(c_{P_2} - a_{P_1} + P_1 \theta_r + \varphi_{P_1-P_2}) + \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} \lambda_{P_1+P_2}}{2} \cos(c_{P_2} + a_{P_1} - P_1 \theta_r - \varphi_{P_1+P_2}) - \frac{\pi N_{RP_2} N_{AP_1} \lambda_{P_1} \lambda_{P_2}}{2 \lambda_0} (\cos(a_{P_1} - P_1 \theta_r - \varphi_{P_1}) \cos(c_{P_2} - \varphi_{P_2})) \quad (53)$$

با توجه به (۱۷) و استفاده از رابطه ترکیب کسینوس‌ها، رابطه توصیف‌کننده اندوکتانس متقابل بین سیم‌پیچی رتور و استاتور در صورتی که سیم‌پیچ‌های مذکور تنها از یک مؤلفه تشکیل شده باشند به دست می‌آید:

$$L_{AR,d}(\theta_r) = \pi N_{RP_2} N_{AP_1} k_{d0} \times \left\{ [k_d^{|P_2-P_1|} \cos(c_{P_2} - a_{P_1}) - k_d^{P_1+P_2} \cos(c_{P_2} - a_{P_1})]^2 + [k_d^{|P_2-P_1|} \sin(c_{P_2} - a_{P_1}) - k_d^{P_1+P_2} \sin(c_{P_2} - a_{P_1})]^2 \right\}^{0.5} \times \sin(P_1 \theta_r + c_{P_2} - a_{P_1}) \quad (54)$$

و در صورتی که سیم‌پیچ استاتور و رتور تنها از یک مؤلفه تشکیل شده باشند، به طوری که  $P_1 = P_2 = P$  و  $c_P = 0$  و  $a_P = -\pi/2$ ، آنگاه مطابق رابطه (۵۲) طیف هارمونیک اندوکتانس متقابل رتور و استاتور در خطای ناهم محوری استاتیکی برابر خواهد بود با:

$$L_{AR,d}(\theta_r) = -\pi N_{RP} N_{AP} \lambda_0 \sin(P \theta_r) \cos(\varphi_0) - \frac{\pi N_{RP} N_{AP} \lambda_{2P}}{2} \sin(P \theta_r + \varphi_{2P}) + \frac{\pi N_{RP} N_{AP} \lambda_P^2}{2 \lambda_0} \cos(\varphi_P) \sin(P \theta_r + \varphi_P) \quad (55)$$

با استفاده از رابطه (۱۷) و اندکی ساده‌سازی، عبارت اخیر به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$L_{AR,d}(\theta_r) = \pi N_{RP} N_{AP} k_{d0} \times (k_d^{2P} - 1) \times \sin(P \theta_r) \quad (56)$$

از رابطه (۵۶) و (۵۶) می‌توان نتیجه گرفت که اولاً فاز هارمونیک‌های اندوکتانس متقابل مستقل از شدت و موقعیت خطای ناهم محوری است؛ ثانیاً دامنه هارمونیک‌های اندوکتانس متقابل وابسته به شدت و مستقل از موقعیت خطای ناهم محوری است. ثالثاً، در مؤلفه  $P_1$  اندوکتانس متقابل، تمام مؤلفه‌های هارمونیک سیم‌پیچی رتور به همراه مؤلفه  $P_1$  سیم‌پیچی استاتور و نیز مؤلفه‌های  $|P_1 \pm P_2|$  رلوکتانس فاصله‌هوایی مشارکت دارند.

بنابراین با در نظر گرفتن معادله (۳۳) و (۵۰) تابع سیم‌پیچی اصلاح‌شده استاتور در خطای دینامیکی به صورت زیر خواهد بود:

$$M_{A,d} = \sum_{i_A=0}^{\infty} N_{Ai} \cos(i_A \varphi + a_{i_A}) - \left\{ \frac{N_{A0}}{2} \cos(a_0) \cos(\varphi_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_{Ai} \lambda_i}{2 \lambda_0} \cos(a_i - i \theta_r - \varphi_i) \right\} \quad (51)$$

با جایگذاری معادله (۵۱) در (۳۲) و بعد از انجام محاسبات و ساده‌سازی، اندوکتانس متقابل بین سیم‌پیچی فاز  $A$  استاتور و سیم‌پیچی رتور در حالت خطای دینامیکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L_{AR,d}(\theta_r) = \frac{\pi N_{R0} N_{A0} \lambda_0}{2} \cos(c_0 + a_0 + \varphi_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Aj} \lambda_i}{2} \cos(c_k - a_j + j \theta_r - \varphi_i) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Aj} \lambda_i}{2} \cos(c_k - a_j + j \theta_r + \varphi_i) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Aj} \lambda_i}{2} \cos(c_k + a_j - j \theta_r - \varphi_i) - \frac{\pi}{2} \left( N_{A0} \cos(a_0) \cos(\varphi_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N_{Ai} \lambda_i}{\lambda_0} \cos(a_i - i \theta_r - \varphi_i) \right) \left( N_{R0} \lambda_0 \cos(c_0 + \varphi_0) + \sum_{i=0}^{\infty} N_{Ri} \lambda_i \cos(c_i - \varphi_i) \right) \quad (52)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در اثر خطای ناهم محوری دینامیکی مؤلفه‌هایی از طیف اندوکتانس متقابل تحریک می‌شوند که دارای فرکانسی برابر با فرکانس هارمونیک‌های فضایی سیم‌پیچ استاتور باشند. به عبارت دیگر، در اثر خطای ناهم محوری دینامیکی، هارمونیک‌های مؤثر در طیف اندوکتانس متقابل و ولتاژ القایی هم فرکانس با مؤلفه‌های هارمونیک تابع سیم‌پیچی استاتور خواهند بود. جهت بررسی نحوه تغییر دامنه و فاز این هارمونیک‌ها، فرض می‌شود که سیم‌پیچی استاتور تنها از  $P_1$  جفت قطب و سیم‌پیچی رتور تنها از  $P_2$  جفت تشکیل شده باشند. لذا، با استفاده از معادلات (۴۰) تا (۴۲) و (۵۲) اندوکتانس متقابل رتور و استاتور در خطای دینامیکی به صورت زیر ساده خواهد شد:

جهت تشخیص خطای ناهم‌محوری مورد استفاده قرار گیرد. جهت تعیین موقعیت رتور ولتاژهای القایی توسط مبدل R/D پردازش می‌شود. لذا مراجعه به ولتاژهای القایی جهت تشخیص خطای ناهم‌محوری نیاز به نصب تجهیزات اضافی ندارد. ولتاژ القایی تابعی از اندوکتانس متقابل رتور و استاتور:

$$V_A \cong L_{AR} \sin(\theta_r) \frac{di_r}{dt} \quad (۶۰)$$

$$V_B \cong L_{BR} \cos(\theta_r) \frac{di_r}{dt} \quad (۶۱)$$

لذا به کمک روابط استخراج شده در بخش‌های قبل، رفتار ولتاژهای القایی در شرایط خطای ناهم‌محوری قابل توصیف خواهد بود.

#### ۵-۴-۱- ولتاژ القایی در خطای ناهم‌محوری استاتیکی

در خطای استاتیکی تابع رلوکتانس فاصله‌هوایی به ازای مقادیر و موقعیت‌های مختلف ناهم‌محوری با تغییر موقعیت رتور تغییر نخواهد کرد و ثابت است. لذا اندوکتانس خودی رتور تابعی از موقعیت رتور خواهد بود. هرچند مطابق توضیحات داده شده در بخش مربوطه، میزان این تغییرات قابل چشم‌پوشی است. از این رو معادل قرار دادن ولتاژهای القایی با اندوکتانس متقابل بین رتور و استاتور خطایی چشم‌گیری در تحلیل‌ها ایجاد نخواهد. با ترکیب روابط (۶۱)، (۳۹) و (۴۸) عبارت توصیف‌کننده ولتاژ القایی در شرایط خطای ناهم‌محوری استاتیکی به دست می‌آید. شکل (۵) طیف هارمونیک ولتاژ خروجی ریزالور و شکل (۶) نمودار دایره‌ای ولتاژهای خروجی به دست آمده از مدل‌سازی به روش تابع سیم‌پیچی اصلاح‌شده ناشی از خطای استاتیکی را نشان می‌دهند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در اثر وقوع خطای ناهم‌محوری استاتیک دامنه همه هارمونیک‌ها و از جمله هارمونیک اصلی افزایش پیدا می‌کند. لذا مقدار مؤثر ولتاژهای القایی در اثر بروز خطای استاتیک افزایش می‌یابد. همچنین از آنجایی که افزایش دامنه هارمونیک اصلی کمتر از سایر هارمونیک‌هاست، THD ولتاژ القایی در اثر خطای استاتیک افزایش خواهد یافت. از این رو نمودار ولتاژهای خروجی ریزالور برحسب هم از حالت دایره‌ای به حالت بیضوی تغییر شکل می‌دهد. برای اینکه تأثیر ناهم‌محوری استاتیک روی خطای تخمین موقعیت روشن شود، شکل (۷) که بیانگر نحوه تغییرات پروفایل خطای تخمین موقعیت به‌ازای مقادیر مختلف خطای

#### ۵-۳-۴- اندوکتانس‌های خودی رتور در خطای ناهم‌محوری دینامیکی

با طی روندی مشابه آنچه برای اندوکتانس متقابل در خطای ناهم‌محوری دینامیکی طی شد، می‌توان اندوکتانس خودی رتور را در این شرایط حساب کرد. در این حالت متوسط تابع سیم‌پیچی رتور برابر است با:

$$\langle M_R \rangle = \frac{1}{2\lambda_0} \int_0^{2\pi} \sum_{i_R=0}^{\infty} \sum_{h_{de}=0}^{\infty} N_{Ri} \cos(i_R(\varphi + \theta_r) + c_{i_R}) \lambda_{h_{de}} \cos\{h_{de}(\varphi + \theta_r) + \varphi_{h_{de}}\} d\varphi \quad (۵۷)$$

بر این اساس اندوکتانس خودی سیم‌پیچ رتور به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} L_{RR,d}(\theta_r) &= \frac{\pi N_{R0}^2 \lambda_0}{2} \cos(2c_0) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Rj} \lambda_i}{2} \cos(c_k - c_j) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Rj} \lambda_i}{2} \cos(c_k - c_j) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi N_{Rk} N_{Rj} \lambda_i}{2} \cos(c_k + c_j) \\ &- \frac{\pi \lambda_0}{2} \left( N_{R0} \cos(c_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N_{Ri} \lambda_i}{\lambda_0} \cos(c_i) \right)^2 \end{aligned} \quad (۵۸)$$

این عبارت بیانگر آن است که در اثر خطای ناهم‌محوری دینامیکی هیچ مؤلفه هارمونیک در اندوکتانس خودی رتور به وجود نخواهد آمد و تنها مقدار DC آن تغییر خواهد کرد. در صورتی که تابع سیم‌پیچی رتور تک مؤلفه‌ای و تنها از مؤلفه  $P_2$  تشکیل شده باشد رابطه (۵۸) به صورت زیر ساده می‌شود:

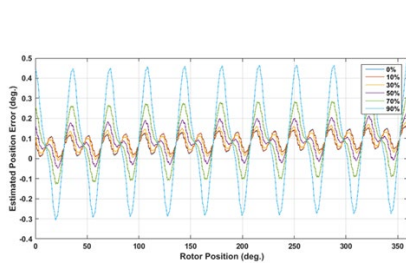
$$L_{RR,d}(\theta_r) = \pi N_{RP_2}^2 \lambda_0 \left[ 1 - \frac{\lambda_{P_2}^2}{4\lambda_0^2} + \left( \frac{\lambda_{2P_2}}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_{P_2}^2}{4\lambda_0^2} \right) \cos(2c_{P_2}) \right] \quad (۵۹)$$

طبق این رابطه در صورتی که سیم‌پیچ رتور تنها یک مؤلفه هارمونیک داشته باشد، آنگاه در اثر خطای ناهم‌محوری دینامیکی دامنه اندوکتانس خودی رتور افزایش می‌یابد (توجه شود که مقدار  $\lambda_0$  در حالت بدون خطا کمتر از مقدار آن در حالت با خطاست).

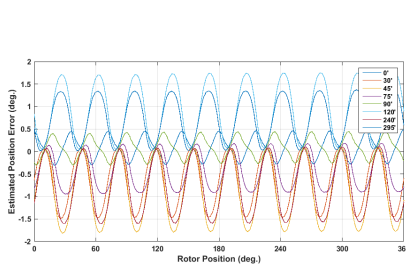
#### ۵-۴- ولتاژ القایی و خطای تخمین موقعیت

ولتاژ القایی به‌عنوان دسترس‌ترین سیگنال در ریزالور می‌تواند

خطای تخمین موقعیت و مقدار پیک تا پیک خطای تخمین موقعیت که در جدول (۱) نشان داده شده است، با افزایش درصد شدت ناهم‌محوری  $(\frac{g_{max}-g_{min}}{2g_0} \times 100)$  افزایش می‌یابد.



شکل (۷): نمودار خطای تخمین موقعیت در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی در موقعیت صفر درجه و اندازه‌های مختلف

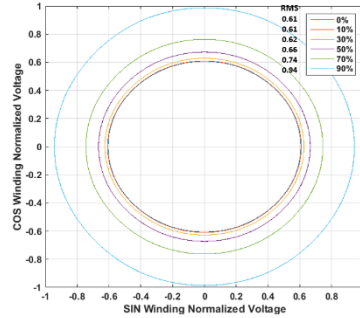


شکل (۱۰): نمودار خطای تخمین موقعیت در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی در موقعیت‌های مختلف و اندازه ۹۰٪

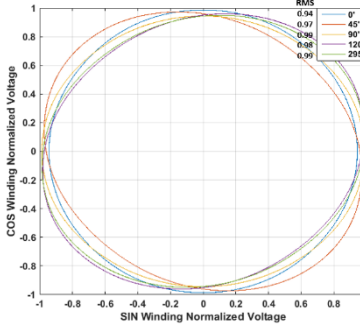
۱۱۵م و ۳۵م دارد، اثر این خطا در هارمونیک ۲۵م کمتر است. به طور مشابه وقوع خطای ناهم‌محوری در زاویه ۱۲۰ درجه و ۲۴۰ درجه بیشترین تأثیر را روی هارمونیک ۲۵م دارد، این در حالی است که هارمونیک‌های ۱۵م و ۳۵م در این موقعیت اثرپذیری کمتری دارند.

همچنین مشاهده می‌شود که میزان اغتشاش ایجادشده در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی تابعی از موقعیت این خطا نسبت به استاتور است، به طوری که در این آرایش سیم‌پیچی رتور و استاتور، بیشترین تأثیر روی طیف هارمونیک و ولتاژهای خروجی در زاویه صفر درجه و کمترین تأثیر در زاویه ۱۲۰ درجه رخ می‌دهد. نمودار دایره‌ای ولتاژهای خروجی در اثر تغییر موقعیت ناهم‌محوری استاتیکی در شکل (۹) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با تغییر موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی، بیضی ایجادشده در اثر هارمونیک‌های ولتاژ القایی جابه‌جا می‌شود، به طوری که قطر بیضی متناسب با موقعیت خطا تغییر می‌کند. تغییر میزان مشارکت هارمونیک‌ها در اثر تغییر موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی به گونه‌ای است

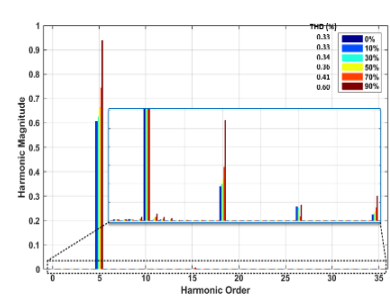
استاتیک است، ارائه شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود مقدار خطای تخمین موقعیت با افزایش میزان ناهم‌محوری افزایش می‌یابد. حداکثر خطای موقعیت، متوسط



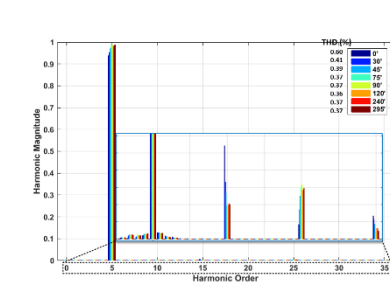
شکل (۶): نمودار دایره‌ای ولتاژهای القایی در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی در موقعیت صفر درجه و اندازه‌های مختلف



شکل (۹): نمودار دایره‌ای ولتاژهای القایی در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی در موقعیت‌های مختلف و اندازه ۹۰٪



شکل (۵): طیف هارمونیک ولتاژ القایی در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی در موقعیت صفر درجه و اندازه‌های مختلف



شکل (۸): طیف هارمونیک ولتاژ القایی در اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی در موقعیت‌های مختلف و اندازه ۹۰٪

جدول (۱): خطای تخمین موقعیت به ازای مقادیر مختلف خطای

ناهم‌محوری استاتیکی و موقعیت  $\theta_0 = 0$

ردیف	درصد ناهم‌محوری (%)	حداکثر خطا (درجه)	متوسط خطا (درجه)	پیک تا پیک خطا (درجه)
۱	۰	۰/۱۶	۰/۰۸	۰/۱۵
۲	۱۰	۰/۱۶	۰/۰۸	۰/۱۶
۳	۳۰	۰/۱۸	۰/۰۸	۰/۱۹
۴	۵۰	۰/۲۲	۰/۰۹	۰/۲۷
۵	۷۰	۰/۳۱	۰/۱۲	۰/۴۳
۶	۹۰	۰/۴۹	۰/۲۱	۰/۷۹

در شکل (۸) طیف هارمونیک ولتاژ خروجی ریزالور به دست آمده از مدل‌سازی به روش تابع سیم‌پیچی اصلاح‌شده ناشی از خطای استاتیکی به ازای موقعیت‌های مختلف ناهم‌محوری نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تأثیرپذیری هارمونیک‌های مختلف از موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی یکسان نیست. به عنوان نمونه، درحالی که وقوع خطای ناهم‌محوری در زاویه ۳۰ درجه بیشترین تأثیر را روی هارمونیک

نتایج نشان‌دهنده آن است که هم‌زمان با افزایش میزان خطای ناهم‌محوری استاتیکی، THD ولتاژهای القایی نیز با افزایش روبروست. از این‌رو نمودار ولتاژهای خروجی ریزالور برحسب هم از حالت دایره‌ای به حالت بیضوی تغییر شکل می‌دهد.

همچنین به ازای یک مقدار خطای ناهم‌محوری یکسان، میزان افزایش THD ولتاژهای القایی در حالت دینامیکی بیشتر از حالت استاتیکی است. از این‌رو تعداد بیشتری از هارمونیک‌ها روی نمودار دایره‌ای اثر گذاشته و بیضی‌های ایجاد شده هم‌مرکز نخواهند بود. برای اینکه تأثیر ناهم‌محوری دینامیک روی خطای تخمین موقعیت روشن شود، شکل (۱۳) که بیانگر نحوه تغییرات پروفایل خطای تخمین موقعیت به ازای مقادیر مختلف خطای دینامیک است، ارائه شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود مقدار خطای تخمین موقعیت با افزایش میزان ناهم‌محوری افزایش می‌یابد. حداکثر خطای موقعیت، متوسط خطای تخمین موقعیت و مقدار پیک تا پیک خطای تخمین موقعیت که در جدول (۳) نشان داده شده است، با افزایش درصد ناهم‌محوری افزایش می‌یابد. در شکل (۱۴) طیف هارمونیکی ولتاژ خروجی ریزالور به دست آمده از مدل‌سازی به روش تابع سیم‌پیچی اصلاح‌شده ناشی از خطای دینامیکی به ازای موقعیت‌های مختلف ناهم‌محوری نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تأثیرپذیری هارمونیک‌های مختلف از موقعیت خطای ناهم‌محوری دینامیک یکسان است، به‌طوری‌که مقدار THD ولتاژ القایی مستقل از موقعیت خطای ناهم‌محوری دینامیک است. نمودار دایره‌ای ولتاژهای خروجی در اثر تغییر موقعیت ناهم‌محوری دینامیک در شکل (۱۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با تغییر موقعیت خطای ناهم‌محوری دینامیک، نمودارهای دایره‌ای یکسان هستند اما با توجه تغییر فاز هارمونیک‌ها نمودارها نسبت به هم جابه‌جا شده‌اند. بدین ترتیب علاوه بر یکسان بودن THD ولتاژهای القایی، مقدار مؤثر آن‌ها نیز مستقل از موقعیت خطای ناهم‌محوری دینامیک است. شکل (۱۶) پروفایل خطای تخمین موقعیت در اثر تغییر موقعیت خطای ناهم‌محوری دینامیک ۹۰٪ را نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول (۴) نیز گزارش شده است، مقدار خطای تخمین موقعیت با تغییر موقعیت حداقل فاصله‌هوایی ثابت بوده اما عرض از مبدأ آن تغییر می‌کند.

که مقدار مؤثر ولتاژ القایی تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند. شکل (۱۰) پروفایل خطای تخمین موقعیت در اثر تغییر موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی ۹۰٪ را نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول (۲) نیز گزارش شده است، مقدار خطای تخمین موقعیت با تغییر موقعیت حداقل فاصله‌هوایی تغییر می‌کند. حداکثر خطای موقعیت، متوسط خطای تخمین موقعیت و مقدار پیک تا پیک خطای تخمین موقعیت در زاویه ۴۵ درجه حداکثر و در زاویه صفر و ۹۰ درجه حداقل است.

جدول (۲): خطای تخمین موقعیت به ازای مقادیر موقعیت‌های مختلف خطای استاتیکی و مقدار  $ECC = 90\%$

ردیف	موقعیت خطای ناهم‌محوری (درجه)	حداکثر خطا (درجه)	متوسط خطا (درجه)	پیک تا پیک خطا (درجه)
۱	۰	۰/۴۹	۰/۲۱	۰/۷۹
۲	۳۰	۱/۴۹	۰/۶۹	۱/۵۸
۳	۴۵	۱/۸۲	۰/۸۸	۱/۹۰
۴	۷۵	۰/۹۴	۰/۴۷	۱/۱۳
۵	۹۰	۰/۴۵	۰/۲۰	۰/۷۴
۶	۱۲۰	۱/۷۵	۰/۹۳	۱/۷۰
۷	۲۴۰	۱/۶۰	۰/۷۹	۱/۷۱
۸	۲۹۵	۱/۳۸	۰/۷۳	۱/۳۶

#### ۵-۴-۲- ولتاژ القایی در خطای ناهم‌محوری دینامیکی

در خطای دینامیکی تابع رلوکتانس فاصله‌هوایی مستقل از موقعیت رتور است. لذا اندوکتانس خودی رتور با تغییر موقعیت رتور تغییر نخواهد کرد. از این‌رو معادل قرار دادن ولتاژهای القایی با اندوکتانس متقابل بین رتور و استاتور خطایی چشم‌گیری در تحلیل‌ها ایجاد نخواهد. با ترکیب روابط (۶۱)، (۵۲) و (۵۸) عبارت توصیف‌کننده ولتاژ القایی در شرایط خطای ناهم‌محوری استاتیکی به دست می‌آید. شکل (۱۱) طیف هارمونیک ولتاژ خروجی ریزالور و شکل (۱۲) نمودار دایره‌ای ولتاژهای خروجی به دست آمده از مدل‌سازی به روش تابع سیم‌پیچی اصلاح‌شده ناشی از خطای دینامیکی را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در اثر وقوع خطای ناهم‌محوری دینامیک دامنه همه هارمونیک‌ها و از جمله هارمونیک اصلی افزایش پیدا می‌کند. همچنین برخی از هارمونیک‌های مرتبه پایین که در حالت سالم قابل صرف‌نظر کردن هستند - از جمله هارمونیک‌های ۱۱م، ۱۳م، ۱۷م و ۹م - در حالت خطای ناهم‌محوری دینامیک تحریک شده و دامنه آن‌ها افزایش می‌یابد. لذا مقدار مؤثر ولتاژهای القایی در اثر بروز خطای استاتیکی افزایش می‌یابد. همچنین از آنجایی‌که افزایش دامنه هارمونیک اصلی کمتر از سایر هارمونیک‌هاست، THD ولتاژ القایی در اثر خطای دینامیک افزایش خواهد یافت.

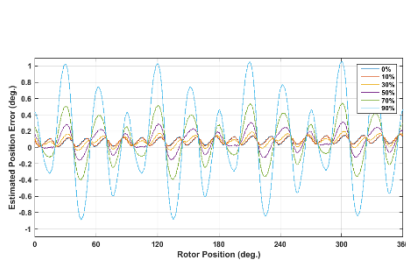
خطای دینامیکی و مقدار  $ECC = 90\%$

ردیف	موقعیت خطای ناهم محوری (درجه)	حداکثر خطا (درجه)	متوسط خطا (درجه)	پیک تا پیک خطا (درجه)
۱	۰	۱/۰۵	۰/۴۵	۱/۹۴
۲	۳۰	۱/۰۷	۰/۴۵	۱/۹۹
۳	۴۵	۰/۹۶	۰/۴۵	۱/۷۴
۴	۷۵	۱/۰۴	۰/۴۵	۱/۹۰
۵	۹۰	۱/۰۲	۰/۴۵	۱/۹۱
۶	۱۲۰	۰/۹۶	۰/۴۵	۱/۷۷
۷	۲۴۰	۱/۰۶	۰/۴۵	۱/۹۸
۸	۲۹۵	۰/۹۸	۰/۴۵	۱/۸۰

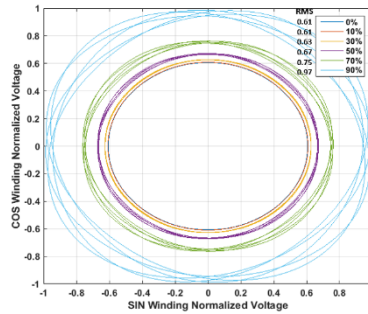
جدول (۳): خطای تخمین موقعیت به ازای مقادیر مختلف خطای ناهم محوری دینامیکی و موقعیت  $\theta_0 = 0$

ردیف	درصد ناهم محوری (%)	حداکثر خطا (درجه)	متوسط خطا (درجه)	پیک تا پیک خطا (درجه)
۱	۰	۰/۱۶	۰/۰۸	۰/۱۵
۲	۱۰	۰/۱۶	۰/۰۸	۰/۱۵
۳	۳۰	۰/۲۰	۰/۰۸	۰/۲۴
۴	۵۰	۰/۳۱	۰/۱۱	۰/۴۷
۵	۷۰	۰/۵۴	۰/۲۲	۰/۹۴
۶	۹۰	۱/۰۵	۰/۴۵	۰/۹۴

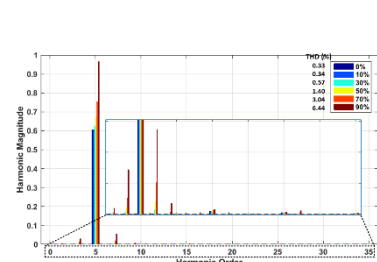
جدول (۴): خطای تخمین موقعیت به ازای مقادیر مختلف موقعیت‌های مختلف



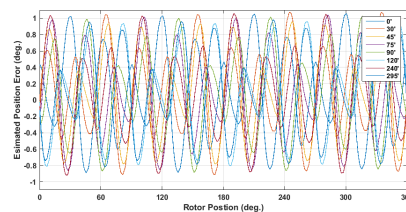
شکل (۱۳): نمودار خطای تخمین موقعیت در اثر خطای ناهم محوری دینامیکی در موقعیت صفر درجه و اندازه‌های مختلف



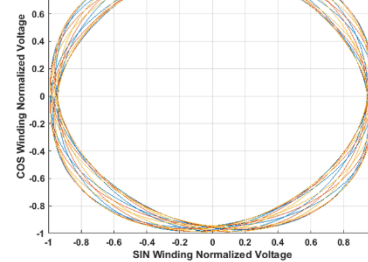
شکل (۱۴): نمودار دایره‌ای ولتاژهای القایی در اثر خطای ناهم محوری دینامیکی در موقعیت صفر درجه و اندازه‌های مختلف



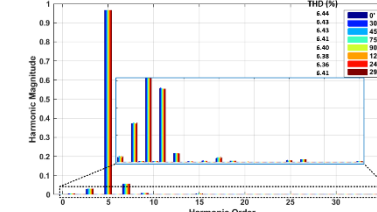
شکل (۱۵): طیف هارمونیک ولتاژ القایی در اثر خطای ناهم محوری دینامیکی در موقعیت صفر درجه و اندازه‌های مختلف



شکل (۱۶): نمودار خطای تخمین موقعیت در اثر خطای ناهم محوری دینامیکی در موقعیت‌های مختلف و اندازه ۹۰٪



شکل (۱۷): نمودار دایره‌ای ولتاژهای القایی در اثر خطای ناهم محوری دینامیکی در موقعیت‌های مختلف و اندازه ۹۰٪



شکل (۱۸): طیف هارمونیک ولتاژ القایی در اثر خطای ناهم محوری دینامیکی در موقعیت‌های مختلف و اندازه ۹۰٪



## نتیجه‌گیری

با توجه به فراوانی خطای مکانیکی در ریزالورها و نقش این خطاهای در دقت عملکرد آن‌ها، در این مطالعه به روش‌های شناسایی خطای ناهم‌محوری پرداخته شد. بر اساس روش تابع سیم‌پیچی اثر خطای ناهم‌محوری استاتیکی و دینامیکی روی ولتاژهای خروجی ریزالور به‌عنوان یکی از در دسترس‌ترین پارامترهای قابل اندازه‌گیری در این تجهیز روابط تحلیلی برای هر یک از خطاهای ناهم‌محوری استاتیکی و دینامیکی استخراج شد.

مطابق رابطه (۳۹) و مدل‌سازی‌های این بخش می‌توان عنوان داشت در اثر وقوع خطای ناهم‌محوری استاتیکی میزان مشارکت هارمونیک‌های سیم‌پیچی رتور و استاتور در ولتاژ القایی افزایش می‌یابد.

تغییرات در ولتاژ خروجی در پی خطای ناهم‌محوری استاتیکی به‌صورت زیر است:

- مؤلفه‌هایی از ولتاژ خروجی تحریک می‌شوند که هم فرکانس با مؤلفه‌های تابع سیم‌پیچی رتور باشند. در این حالت هارمونیک‌های غالب دارای فرکانس  $(kQ_r \pm P)f_r$  هستند. در صورت استفاده از سیم‌پیچی شیار کسری سایدبندهای هارمونیک اصلی نیز به این مجموعه اضافه می‌شوند.

- در به وجود آمدن مؤلفه  $P_2$  ولتاژ خروجی، تمام مؤلفه‌های هارمونیک تابع سیم‌پیچ استاتور، مؤلفه  $P_2$  سیم‌پیچ رتور و به همراه مؤلفه‌های  $|P_1 \pm P_2|$  رلوکتانس فاصله‌هوایی مشارکت دارند.

- دامنه تمام مؤلفه‌های هارمونیک از جمله مؤلفه اصلی افزایش می‌یابد. میزان افزایش دامنه مؤلفه اصلی در برابر سایر مؤلفه‌های هارمونیک کمتر است به طوری که در مجموع THD ولتاژهای القایی افزایش پیدا می‌کند،

- افزایش دامنه هارمونیک‌های ولتاژ القایی متناسب با شدت خطای ناهم‌محوری استاتیکی  $(\delta_{se})$  است اما رابطه خطی بین تغییرات وجود ندارد. هرچه مرتبه هارمونیک پایین‌تر باشد میزان افزایش دامنه آن بیشتر است،

- افزایش دامنه هارمونیک‌های ولتاژ القایی تابعی از موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی  $(\theta_0)$  است اما رابطه خطی بین تغییرات وجود ندارد،

- فاز هارمونیک‌های ولتاژ القایی مستقل از شدت خطا  $(\delta_{se})$  و تابعی از موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی  $\theta_0$  است.

تغییرات در خطای تخمین موقعیت در اثر ناهم‌محوری استاتیکی نیز به صورت زیر است:

- خطای ناهم‌محوری استاتیکی موجب افزایش دامنه خطای تخمین موقعیت می‌شود. افزایش دامنه خطای تخمین موقعیت متناسب با شدت خطای ناهم‌محوری استاتیکی  $(\delta_{se})$  است اما رابطه خطی بین تغییرات وجود ندارد. افزایش دامنه خطای تخمین موقعیت تابعی از موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی  $(\theta_0)$  است. نوع سیم‌پیچی رتور و استاتور است که نحوه تبعیت خطای تخمین موقعیت از شدت خطای استاتیکی و موقعیت خطای استاتیکی را تعیین می‌کند.

- خطای ناهم‌محوری استاتیکی موجب افزایش دامنه مؤلفه DC خطای تخمین موقعیت می‌شود. افزایش دامنه مؤلفه DC خطای تخمین موقعیت متناسب با شدت خطای ناهم‌محوری استاتیکی  $(\delta_{se})$  است اما رابطه خطی بین تغییرات وجود ندارد. افزایش دامنه مؤلفه DC خطای تخمین موقعیت تابعی از موقعیت خطای ناهم‌محوری استاتیکی  $(\theta_0)$  است. نوع سیم‌پیچی رتور و استاتور است که نحوه تبعیت خطای تخمین موقعیت از شدت خطای استاتیکی و موقعیت خطای استاتیکی را تعیین می‌کند.

مطابق رابطه (۵۲) و مدل‌سازی‌های ارائه‌شده در این بخش، در اثر وقوع خطای ناهم‌محوری دینامیکی میزان مشارکت هارمونیک‌های سیم‌پیچی رتور و استاتور در تابع اندوکتانس متقابل و ولتاژ القایی افزایش می‌یابد.

تغییرات در ولتاژ خروجی در پی خطای ناهم‌محوری دینامیکی به‌صورت زیر است:

- مؤلفه‌هایی از ولتاژ خروجی تحریک می‌شوند که هم فرکانس با مؤلفه‌های تابع سیم‌پیچی استاتور باشند. در این حالت هارمونیک‌های غالب دارای فرکانس  $(kQ_s \pm P)f_r$  هستند. در صورت استفاده از سیم‌پیچی شیار کسری سایدبندهای هارمونیک اصلی نیز به این مجموعه اضافه می‌شوند.

## ۷- مراجع

- در به وجود آمدن مؤلفه  $P_1$  ولتاژ خروجی، تمام مؤلفه‌های هارمونیک تابع سیم‌پیچ رتور، مؤلفه  $P_1$  سیم‌پیچ استاتور و به همراه مؤلفه‌های  $|P_1 \pm P_2|$  رلوکتانس فاصله‌هوایی مشارکت دارند.
- دامنه تمام مؤلفه‌های هارمونیک از جمله مؤلفه اصلی افزایش می‌یابد. میزان افزایش دامنه مؤلفه اصلی در برابر سایر مؤلفه‌های هارمونیک کمتر است به طوری که در مجموع THD ولتاژهای القایی افزایش پیدا می‌کند،
- افزایش دامنه هارمونیک‌های ولتاژ القایی متناسب با شدت خطای ناهم‌محوری دینامیکی ( $\delta_{de}$ ) است اما رابطه خطی بین تغییرات وجود ندارد. هرچه مرتبه هارمونیک پایین‌تر باشد میزان افزایش دامنه آن بیشتر است،
- افزایش دامنه هارمونیک‌های ولتاژ القایی مستقل از موقعیت خطای ناهم‌محوری ( $\theta_0$ ) است.
- فاز هارمونیک‌های ولتاژ القایی مستقل از شدت خطا ( $\delta_{de}$ ) و موقعیت خطای ناهم‌محوری  $\theta_0$  است.
- تغییرات در خطای تخمین موقعیت در اثر ناهم‌محوری دینامیکی نیز به صورت زیر است:
- خطای ناهم‌محوری دینامیکی موجب افزایش دامنه خطای تخمین موقعیت می‌شود. افزایش دامنه خطای تخمین موقعیت متناسب با شدت خطای ناهم‌محوری دینامیکی ( $\delta_{de}$ ) است اما رابطه خطی بین تغییرات وجود ندارد. افزایش دامنه خطای تخمین موقعیت مستقل از موقعیت خطای ناهم‌محوری ( $\theta_0$ ) است. نوع سیم‌پیچی رتور و استاتور است که نحوه تبعیت خطای تخمین موقعیت از شدت خطای دینامیکی را تعیین می‌کند.
- خطای ناهم‌محوری دینامیکی تأثیری در دامنه مؤلفه DC خطای تخمین موقعیت ندارد.
- در مقام مقایسه بین THD ولتاژهای القایی در خطای ناهم‌محوری استاتیک و دینامیک ذکر نکته‌ای حائز اهمیت است. همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد در ناهم‌محوری استاتیک این تابع سیم‌پیچی رتور است که نقش تعیین‌کننده دارد در حالی که در خطای دینامیک عامل تعیین‌کننده تابع سیم‌پیچی استاتور است. بنابراین بسته به اینکه کدام‌یک از این سیم‌پیچی‌ها از نقطه‌نظر هارمونیک‌های فضایی وضعیت مطلوب‌تری داشته باشند THD هارمونیک‌های ولتاژ القایی در یکی از شرایط استاتیک و دینامیکی کمتر از دیگری خواهد بود.
- [1] P. Naderi, A. Ramezannezhad and L. Vandeveld, "A Novel Linear Resolver Proposal and Its Performance Analysis Under Healthy and Asymmetry Air-Gap Fault," in *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 71, pp. 1-9, 2022, Art no. 9504109, doi: 10.1109/TIM.2022.3155747.
- [2] R. Faryadras, F. Tootoonchian, "The Proposal of a 2-DOF Resolver for Linear Motion," in *Scientific Journal of Applied Electromagnetics*, vol. 10, no. 1, pp. 81-90, March 2022, doi: 20.1001.1.26455153.1401.10.1.8.2.
- [3] A. Ramezannezhad, P. Naderi and L. Vandeveld, "A Novel Method for Accuracy Improvement of Variable Reluctance Linear Resolvers," in *IEEE Sensors Journal*, vol. 22, no. 19, pp. 18409-18417, 1 Oct.1, 2022, doi: 10.1109/JSEN.2022.3199807.
- [4] N. Lini Mathew, A. Sharma, "Various Indices for Diagnosis of Air-gap Eccentricity Fault in Induction Motor-A Review," 3rd International Conference on Communication Systems (ICCS-2017), doi: 10.1088/1757-899X/331/1/012032.
- [5] G. Genta, "Dynamic of Rotating Systems," Mechanical Engineering Series, Springer, 2005.
- [6] J.S. Rao, "Rotor Dynamics," 3rd ed., New Age, 2004.
- [7] J.S. Rao, "Vibratory Condition Monitoring of Machines," CRC Press, 2000.
- [8] U. Werner, "Mathematical analysis of rotor shaft displacements in asynchronous machines; a critical speed or just a rotation of the orbit axis?" *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 89, no.7, pp.514-535, 2009, doi: 10.1002/zamm.200900237.
- [9] S.J. Yang, "Low-Noise Electrical Motors (Monographs in Electrical and Electronic Engineering)," Oxford University Press, pp. 37, 1981.
- [10] A. Sinervo, "Effects of slotting and unipolar flux on magnetic pull in a two-pole induction motor with an extra four-pole stator winding," Ph.D. Thesis, 2013.
- [11] Masaki, K., et al. "Magnetic field analysis of a resolver with a skewed and eccentric rotor." In *Sensors and Actuators A: Physical* 81.1 (2000): 297-300, doi: 10.1016/S0924-4247(99)00179-X.
- [12] Tootoonchian, F., K. Abbaszadeh, and M. Ardebili. "A new technique for analysis of static eccentricity in axial flux resolver." in *Measurement Science Review* 12.1 (2012): 14-20, doi: 10.2478/v10048-012-0004-y.
- [13] B. Ebrahimi, "Eccentricity error detection in three-phase permanent magnet synchronous motor," Ph.D. Thesis, 2011 (In Persian).
- [14] S. Nandi, H. A. Toliyat and X. Li, "Condition Monitoring and Fault Diagnosis of Electrical Motors—A Review," in *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 20, no. 4, pp. 719-729, Dec. 2005, doi: 10.1109/TEC.2005.847955.
- [15] J. R. Cameron, W. T. Thomson and A. B. Dow, "Vibration and current monitoring for detecting airgap eccentricity in large induction motors," in *IEE Proceedings B - Electric Power Applications*, vol. 133, no. 3, pp. 155-163, May 1986, doi: 10.1049/ip-b.1986.0022.
- [16] P. Jover Rodríguez, A. Belahcen, A. Arkkio, , A. Laiho, and J. Antonino-Daviu, "Air-gap force distribution and vibration pattern of induction motors under dynamic eccentricity," *Electrical Engineering*, vol. 90, no. 3, pp. 209-218, Feb. 2008, doi: 10.1007/s00202-007-0066-2.
- [17] E. Rosenberg, "Magnetic pull in electric machines," in *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. XXXVII, no. 2, pp. 1425-1469, July 1918, doi: 10.1109/T-AIEE.1918.4765578.

- [18] A. Gray and J. G. Pertsch, "Critical Review of the Bibliography on Unbalanced Magnetic Pull in Dynamo-Electric Machines," in *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. XXXVII, no. 2, pp. 1417-1424, July 1918, doi: 10.1109/T-AIEE.1918.476557.
- [19] D. Dorrell, "Calculation of unbalanced magnetic pull in cage induction machines," Ph.D. Thesis, University of Cambridge, UK., 1993.
- [20] H. Lasjerdi, "Electrical and eccentricity error detection in wound rotor resolvers," M.Sc. Thesis, 2019 (In Persian).
- [21] D. Harlin, "Oscillation Behaviour in Asynchronous motors as a Result of Unbalances," Ph.D thesis, 1965.
- [22] A.R. Randell, "Performance of Electrical Machines Using a Generalised Theory and Including air-gap Flux Harmonics," Ph.D thesis, 1965.