

علمی - پژوهشی

کمی سازی عدم قطعیت جریان گذر صوتی حول ایرفویل RAE2822 تحت شرایط هندسه غیرقطعی

منصوری، حسین^۴

آرش محمدی^۳

اکبر محمدی احمدی^۲

امیر گودرزی*^۱

دانشگاه جامع امام حسین (ع) تهران، ایران

دانشگاه تهران، تهران، ایران

دانشگاه تهران، تهران، ایران

دانشگاه جامع امام حسین (ع) تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۱۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۰/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۸؛ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۳۰)

DOR: <https://dorl.net/dor/20.1001.1.23223278.1402.12.2.3.4>

چکیده

از دیرباز عدم قطعیت به عنوان عامل غیرقابل انکار در مطالعه پدیده‌های فیزیکی مورد توجه بوده است. از این رو جهت حصول نتایج قابل اطمینان در کاربردهای مهندسی از طریق پیش‌بینی‌های محاسباتی، تمامی منابع عدم قطعیت موجود در سیستم باید در نظر گرفته شود. پیشرفت‌های اخیر در دینامیک سیالات محاسباتی این امکان را فراهم کرده است که اثرات عدم قطعیت بر میدان‌های جریان و انتقال حرارت پیچیده در کاربردهای مهندسی مورد مطالعه قرار گیرند. در مقاله حاضر آنالیز عدم قطعیت میدان جریان گذر صوتی اطراف ایرفویل RAE 2822 به عنوان یک مسئله چالشی در حوزه دینامیک سیالات محاسباتی تحت اثر عدم قطعیت هندسه ایرفویل ناشی از تolerانس‌های ساخت ارزیابی شده است. در ابتدا کد توسعه یافته بسط چند جمله‌ای آشوب بر روی چند تابع چالشی و غیرخطی اعتبارسنجی گردیده است. سپس برای ایجاد عدم قطعیت هندسی در ایرفویل RAE 2822، روش کارهونن لوو (KL) با بهره‌گیری از تعداد ۱۸ متغیر تصادفی و انجام ۲۶۶۰ شبیه‌سازی مختلف به کار گرفته شده است. نتایج به دست آمده از ضریب فشار غیرقطعی اطراف ایرفویل نشان می‌دهند که عدم قطعیت‌های هندسی با شدت بیشتری مکان وقوع و قدرت شوک نرمال را تحت تأثیر قرار می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: کمی‌سازی عدم قطعیت، بسط چند جمله‌ای آشوب، روش‌های کارا، تحلیل حساسیت، دینامیک سیالات

محاسباتی

Uncertainty Quantification of Transonic RAE2822 Airfoil under Geometrical Uncertainties

(Received: 2023/09/04, Revised: 2024/01/05, Accepted: 2024/02/07, Published: 2024/02/19)

Goudarzi, A.*

Mohammadi Ahmar, A.^۳

Mohammadi, A.^۲

Mansouri, H.

Imam Hossein University,
Tehran, Iran

Tehran University, Tehran, Iran

Imam Hossein University,
Tehran, Iran

ABSTRACT

Uncertainty has been known as an unavoidable parameter since early steps of investigation on physical phenomena. Therefore, to ensure validity of numerical simulations in the engineering applications, all of the related uncertainty sources must be considered. The examination of uncertainty effects on the flow field and heat transfer in the complex applications have been possible by recent advances in the computational fluid dynamics (CFD) methods. In this paper, the analysis of the uncertainty quantification (UQ) of the transonic flow field around the RAE 2822 airfoil is evaluated as a challenging problem in the CFD field under the effect of airfoil geometry uncertainties caused by manufacturing tolerances. At first, the developed code of polynomial chaos expansion (PCE) is validated on the several challenging and nonlinear test functions. Then, to construct geometrical uncertainties in the RAE 2822 airfoil, the Karhunen-Loeve (KL) method is employed by using 18 random variables and performing 2660 different CFD simulations. The obtained results from the non-deterministic pressure coefficient around the airfoil show that the geometric uncertainties more strongly affect the place of occurrence and the strength of the normal shock.

Keywords Uncertainty Quantification, Polynomial Chaos Expansion, Efficient Methods, Sensitivity Analysis, Computational Fluid Dynamic.

۱. دکتری تخصصی (نویسنده پاسخگو): aamirgoudarzi@gmail.com

۲. دکتری تخصصی: akbar.mohammadi.ahmar@gmail.com

۳. دکتری تخصصی: mohammadiarash70@gmail.com

۴. دکتری تخصصی: h-mansouri@modares.ac.ir

۱- مقدمه

UQ، چندین روش کارا ارائه شده است که یکی از کاربردی‌ترین این روش‌ها، روش بسط چندجمله‌ای آشوب^۵ (PCE) است. این روش مبتنی بر بسط طیفی خروجی سیستم تصادفی است [۱،۲] که در ابتدا این روش به صورت مداخله‌گر توسعه یافت. روش مداخله‌گر برای اجرا نیاز به اصلاح کدهای قطعی موجود دارد. از این‌رو به دلیل پیچیدگی و هزینه محاسباتی بالای این فرایند در مسائل CFD و به این دلیل که نرم‌افزارهای بر پایه CFD عمدتاً منبع بسته هستند، روش بسط چندجمله‌ای آشوب به صورت غیر مداخله‌گر^۶ (NIPCE) توسعه یافته است و در چندین پژوهش نیز بکار گرفته شده است [۳-۶]. مزیت روش NIPCE این است که بجای وارد کردن عدم قطعیت در معادلات حاکم و رسیدن به تعداد زیاد معادلات، تنها در تعدادی نمونه که به صورت مناسب گزینش شده‌اند حلگرهای قطعی را فراخوانی می‌نمایند و نیازی به اصلاح حلگر عددی ندارد.

آنچه که امروزه به عنوان بسط چندجمله‌ای آشوب (PCE) شناخته می‌شود، برای اولین بار توسط وینر [۲] ارائه گردید. قائم و اسپانوس [۱] این روش را برای اولین بار وارد مسائل مهندسی کردند. آنها از این روش به صورت مداخله‌گر برای بررسی عدم قطعیت در مسائل مربوط به مکانیک جامدات و در ترکیب با روش المان محدود، استفاده کردند. پس از آن، پژوهشگران مختلفی، روش بسط چندجمله‌ای آشوب را به طور موفقیت‌آمیز به محدوده وسیعی از مسائل CFD اعمال کرده‌اند (برای اطلاعات بیشتر به [۷-۱۱] رجوع شود).

در مقاله حاضر کد توسعه یافته روش غیر مداخله‌گر بسط چندجمله‌ای آشوب برای آنالیز عدم قطعیت میدان جریان گذر صوتی اطراف ایرفویل RAE 2822 به عنوان یک مسئله چالشی در حوزه دینامیک سیالات محاسباتی تحت اثر عدم قطعیت هندسه ایرفویل ناشی از تolerانس‌های ساخت ارزیابی شده است. در ابتدا کد توسعه یافته بسط چندجمله‌ای آشوب بر روی توابع چالشی و غیرخطی سو بول [۱۲]، ایشیگامی [۱۳] و بور هول [۱۴] اعتبارسنجی گردیده است. سپس برای ایجاد عدم قطعیت هندسی در ایرفویل RAE 2822، روش کارهونن لوو (KL) [۱۵] با بهره‌گیری از تعداد ۱۸ متغیر تصادفی و انجام ۲۶۶۰ شبیه‌سازی مختلف به کار گرفته شده است.

پیشرفت‌های اخیر در روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) این امکان را برای محققین فراهم کرده است که با دقت^۱ بیشتری میدان‌های جریان و انتقال حرارت پیچیده در کاربردهای مهندسی را مطالعه نمایند. این روش‌ها با این فرض بکار می‌روند که همه ورودی‌های مسئله معلوم هستند در حالی که در عمل، شرایط کاری، ثوابت مدل‌های محاسباتی و هندسه مورد بررسی همواره با عدم قطعیت‌هایی همراه هستند. در نظر نگرفتن این ورودی‌ها به صورت غیرقطعی^۲ ممکن است به نتایج خروجی غیردقیق^۳ منجر گردد. خنک‌کاری لایه‌ای مثالی از جریان‌های پیچیده صنعتی است که حساسیت بالایی به شرایط کاری و هندسی دارد. از این‌رو برای رسیدن به طراحی استوار و قابل اطمینان در چنین جریان‌هایی، بایستی اثرات عدم قطعیت‌های ورودی بر روی خروجی مورد نظر سیستم در نظر گرفته شود. به طور کلی، عدم قطعیت‌ها به دو گروه اصلی یعنی سیستماتیک و تصادفی تقسیم می‌شوند. گروه اول به نقصان و کمبود دانش از فرایند فیزیکی مورد بررسی مربوط می‌شوند با استفاده از روش‌های مدل‌سازی دقیق‌تر و افزایش دانش نسبت به ماهیت فیزیکی مسئله می‌توان عدم قطعیت سیستماتیک را تا حد زیادی کاهش داد. در حالی که، علت وجود گروه دوم عمدتاً ناشی از تصادفی بودن ذاتی همچون خواص مواد، شرایط مرزی و هندسی است و در نتیجه امکان کاهش (حداقل امکان برطرف کردن کامل) آن نیز وجود ندارد.

به منظور رسیدن به نتایج قابل اطمینان در کاربردهای مهندسی از طریق پیش‌بینی‌های دینامیک سیالات محاسباتی (CFD)، تمامی منابع عدم قطعیت موجود در سیستم بایستی در نظر گرفته شود. چندین روش توسط محققین مختلف برای انجام کمی‌سازی عدم قطعیت^۴ (UQ) انجام یافته است. رایج‌ترین روش برای انجام این هدف روش مونت کارلو (MC) است که می‌تواند به سادگی انجام شود. اگرچه مشکل اساسی این روش همگرایی کند آن است و معمولاً برای رسیدن به نتایجی با دقت مطلوب نیاز به تعداد بسیار زیادی نمونه دارد. برای بهبود نرخ همگرایی تحلیل

⁵ Polynomial chaos expansion

⁶ Non-intrusive polynomial chaos expansion

¹ Accuracy

² Non-deterministic

³ Inaccurate

⁴ Uncertainty quantification

۲- چارچوب احتمالاتی

۲-۱- بسط چندجمله‌ای آشوب غیر مداخله‌گر

در مقاله حاضر، روش چندجمله‌ای آشوب (PCE) برای تحلیل UQ استفاده شده است. در نظر بگیرید که $\mathbf{y} = \mathcal{M}(\xi)$ به صورت یک مدل ریاضی یا فیزیکی باشد که در آن \mathbf{y} و $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d\}$ به ترتیب بیانگر پاسخ مدل یا کمیت مورد علاقه^۱ (QoI) و مجموعه متغیرهای ورودی است. هنگامیکه بردار ورودی ξ از طریق تابع توزیع احتمال مشترک^۲ $f(\xi)$ غیرقطعی باشند \mathbf{y} نیز تصادفی خواهد گردید. با استفاده از نظریه آشوب همگن [۲]، قائم و اسپانوس [۱] نشان دادند هنگامیکه متغیرهای تصادفی ورودی ξ مستقل باشند می‌توان پاسخ مدل را به صورت یک سری از پایه‌های چندجمله‌ای متعامد بیان کرد. بنابراین میدان تصادفی با مرتبه p برای d متغیر تصادفی $\xi \equiv \{\xi_i\}_{i=1}^d$ را می‌توان بشکل بسط چندجمله‌ای آشوب به صورت زیر ارائه کرد.

$$u(\mathbf{x}; \xi) = \sum_{i=0}^p u_i(\mathbf{x}) \psi_i(\xi) \quad (1)$$

که در آن تعداد جملات در عبارت جمع از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P + 1 = \binom{P + d}{d} = (p + d)! / (p! d!) \quad (2)$$

در معادله (۱)، u_i ها جملات مجهولی هستند که بایستی تعیین شوند و $\psi_i(\xi)$ ها نیز متعلق به چندجمله‌ای‌های چند متغیره بوده که نسبت به تابع توزیع احتمال مشترک $f(\xi)$ متعامد یک^۳ هستند یعنی $\langle \psi_i(\xi), \psi_j(\xi) \rangle = \delta_{ij}$ که در آن δ_{ij} بیانگر دلتای کرونکر است [۱۶]. علاوه بر این، به دلیل استفاده از توزیع یکنواخت برای متغیرهای غیرقطعی ورودی، چندجمله‌ای‌های لژاندر به عنوان پایه‌های متناظر PCE در مطالعه حاضر هستند.

۲-۲- محاسبه ممان‌های آماری

در پژوهش حاضر، روش رگرسیون^۴ [۱۷] برای محاسبه ضرایب مجهول PCE استفاده شده است. روش محاسبه به این صورت است که در ابتدا مجموعه از $N = 2(P + 1)$ نمونه بردار تصادفی ورودی $\Xi = \left\{ \left\{ \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(N)} \right\} \right\}$

تولید گردیده و سپس برای هر یک از نمونه‌ها، کمیت مورد علاقه $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)}\}^T$ ارزیابی می‌شود که در آن $\mathbf{y}^{(i)} = \mathcal{M}(\xi^{(i)})$ است. در نهایت با حل سیستم خطی فرامعین زیر با روش حداقل مربعات^۵، ضرایب محاسبه می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \psi_0(\xi^1) & \dots & \psi_i(\xi^1) & \dots & \psi_p(\xi^1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \psi_0(\xi^s) & \dots & \psi_i(\xi^s) & \dots & \psi_p(\xi^s) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \psi_0(\xi^N) & \dots & \psi_i(\xi^N) & \dots & \psi_p(\xi^N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\xi^1) \\ \vdots \\ u_i(\xi^s) \\ \vdots \\ u_p(\xi^N) \end{bmatrix} \quad (3)$$

در پژوهش حاضر برای تولید نمونه‌ها، از روش نمونه‌گیری شبه تصادفی سو بول استفاده گردیده است [۱۸].

به دلیل اینکه پایه‌های PCE متعامد یکه هستند؛ بنابراین مقادیر متوسط و واریانس کمیت موردعلاقه به ترتیب از روابط (۴) و (۵) محاسبه می‌گردند [۱۷].

$$\mu(\mathbf{x}) = \langle u(\mathbf{x}; \xi) \rangle = u_0(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \text{Var} \left(\sum_{i=0}^p u_i(\mathbf{x}) \psi_i(\xi) \right) = \sum_{i=1}^p u_i^2(\mathbf{x}) \langle \psi_i \psi_i \rangle \quad (5)$$

۳- اعتبارسنجی کد PCE

۳-۱- تابع سو بول

کد توسعه یافته برای کمی سازی عدم قطعیت با استفاده از روش PCE بر روی تابع تحلیلی سو بول [۱۲] اعتبارسنجی شده است. این تابع به صورت رابطه (۶) ارائه می‌شود.

$$Y = \prod_{i=1}^q \frac{|4X_i - 2| + a_i}{1 + a_i} \quad (6)$$

که در آن متغیرهای ورودی X_i ، $i = 1, \dots, q$ به صورت یکنواخت در بازه‌ی [0, 1] توزیع شده‌اند و a_i ها مقادیر نامنفی هستند. در کاربردهای عددی، q برابر ۸ می‌باشد و $a = [1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 500]$ است. واریانس، D ، تابع Y و اندیس‌های سو بول را می‌توان به صورت تحلیلی از روابط زیر محاسبه کرد.

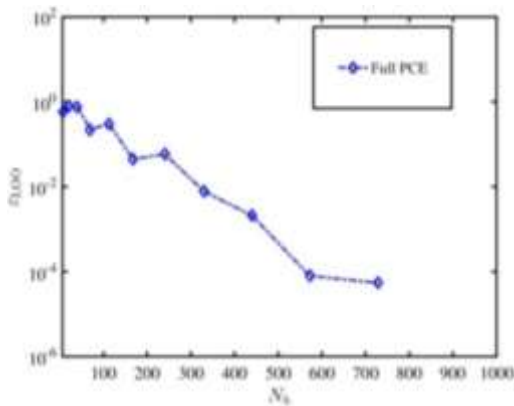
⁵ Least-square

¹ Quantity of interest

² Joint probability distribution function

³ Orthonormal

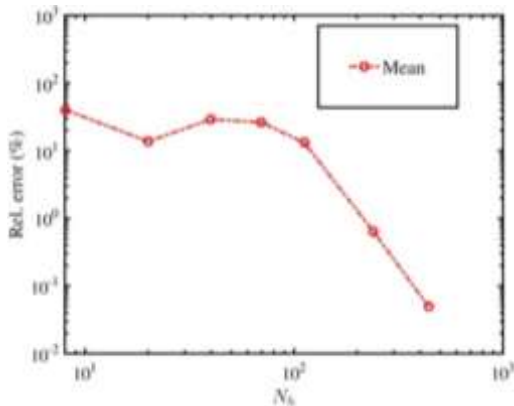
⁴ Regression



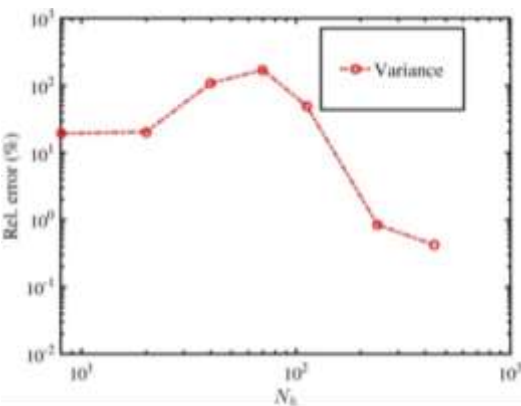
شکل (۱): نرخ همگرایی تابع ایشیگامی با

استفاده از ϵ_{LOO}

همچنین نمودارهای همگرایی میانگین و واریانس برای محاسبات بسط چندجمله‌ای آشوب کامل برای تابع ایشیگامی در شکل ۲ رسم شده است.



(الف)



(ب)

شکل (۲): خطاهای نسبی در (الف) میانگین و (ب)

واریانس با استفاده از روش بسط چندجمله‌ای آشوب کامل

$$D = \prod_{i=1}^q (D_i + 1) - 1, \quad D_i = \frac{1}{3(1 + a_i)^2} \quad (7)$$

$$S_{i_1, \dots, i_s} = \frac{1}{D} \prod_{i=1}^s D_i \quad (8)$$

نتایج به دست آمده از روش عددی و نتایج حل تحلیلی در جدول ۱ ارائه شده است. مطابق جدول ۱ کد UQ توسعه یافته توانسته با خطاهای ۰/۰۱٪ و ۱/۵۲۱٪ بترتیب میانگین و واریانس تابع را پیش بینی نماید. علاوه بر این مقادیر خطای به دست آمده برای اندیس‌های سو بول نیز خطایی کمتر از ۲٪ را برای همه اندیس‌ها نشان می‌دهد.

جدول (۱): نتایج به دست آمده از حل تحلیلی و عددی و

خطای نسبی

پارامتر	تحلیلی	PCE	خطای نسبی (%)
μ	۱.۰	۰.۹۹۹۹	۰.۰۱
σ^2	۰.۱۳۸۰	۰.۱۴۰۱	۱.۵۲۱۷
S_1	۰.۶۰۳۷	۰.۵۹۲۸	۱.۸۰۵۵
S_2	۰.۲۶۸۳	۰.۲۶۳۷	۱.۷۱۴۵
S_3	۰.۰۶۷۱	۰.۰۶۵۸	۱.۹۳۷۴
S_4	۰.۰۱۹۹	۰.۰۱۹۸	۰.۵۰۲۵
S_5	۰.۰۰۵۴	۰.۰۰۵۳	۱.۸۵۱۸
S_6	۰.۰۰۰۹	۰.۰۰۰۹	۰
S_7	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰
S_8	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰

۳-۲- تابع ایشیگامی

نمونه آزمایشی بعدی برای ارزیابی روش توسعه یافته، تابع ایشیگامی کاملاً غیرخطی است که به صورت گسترده در آنالیز عدم قطعیت و تحلیل حساسیت بکار گرفته می‌شود [۱۷]. تابع ایشیگامی به شرح زیر می‌باشد [۱۳].

$$f = \sin(\xi_1) + 7 \sin^2(\xi_2) + 0.1 \xi_3^4 \sin(\xi_1) \quad (9)$$

این تابع بستگی به سه پارامتر ورودی، $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ دارد که به صورت یکنواخت در بازه $[-\pi, \pi]$ توزیع شده است. شکل (۱) نرخ همگرایی تابع ایشیگامی را با استفاده از ϵ_{LOO} نشان می‌دهد.

۳-۳- تابع بورهول

تابع تصادفی بورهول به عنوان تابع آزمایشی بعدی مورد بررسی قرار گرفته است [۱۴]. مدل دقت بالای تابع بورهول به صورت زیر فرض می شود.

$$f = \frac{2\pi T_u (H_u - H_l)}{\ln(r/r_w) \left(1 + \frac{2LT_u}{\ln(r/r_w)r_w^2 K_w} + \frac{T_u}{T_l} \right)} \quad (10)$$

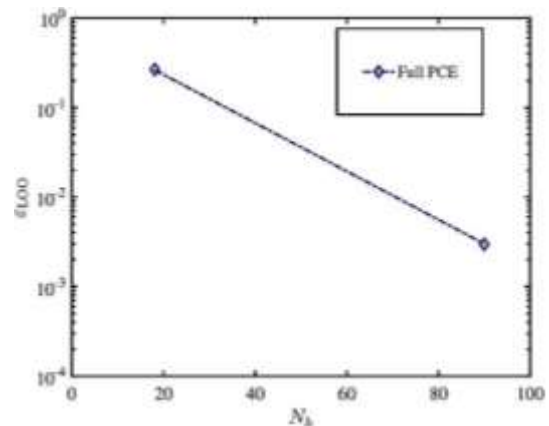
همان طور که در جدول ۲ ارائه شده است تابع بورهول بستگی به هشت متغیر تصادفی دارد که همگی آنها به صورت یکنواخت توزیع شده اند.

جدول (۲): توزیع متغیرهای تصادفی در تابع بورهول [۱۴].

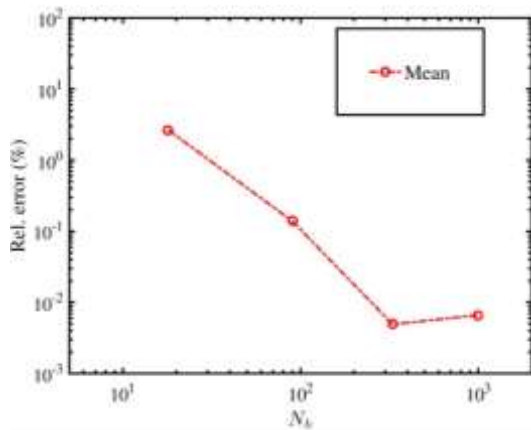
متغیر تصادفی	تابع توزیع احتمال
r_w	یکنواخت [۰.۵۰ و ۰/۱۵]
r	یکنواخت [۱۰۰ و ۵۰۰۰۰]
T_u	یکنواخت [۶۳۷۰۰ و ۱۱۵۶۰۰]
H_u	یکنواخت [۹۹۰ و ۱۱۰۰]
T_l	یکنواخت [۶۳.۱ و ۱۱۶]
H_l	یکنواخت [۷۰۰ و ۸۲۰]
L	یکنواخت [۱۱۲۰ و ۱۶۸۰]
K_w	یکنواخت [۹۸۵۵ و ۱۲۰۴۵]

مشابه فرایند طی شده در تحلیل عدم قطعیت تابع ایشیگامی، شکل ۳ ϵ_{LOO} برای مدل جایگزین برحسب تعداد نمونه های دقت-بالای مختلف را نشان می دهد.

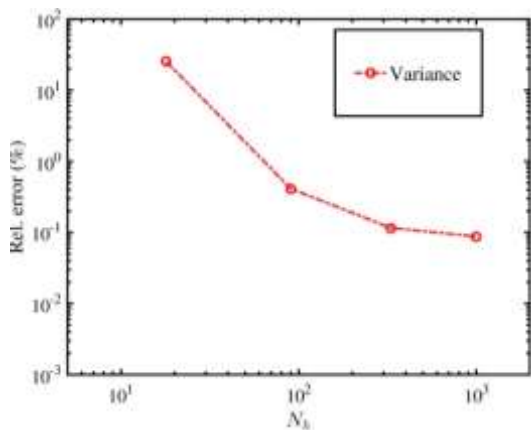
شکل ۴ نمودارهای همگرایی میانگین و واریانس برای محاسبات بسط چندجمله ای آشوب کامل تابع بورهول را نشان می دهد.



شکل (۳): نرخ همگرایی تابع بورهول با استفاده از ϵ_{LOO}



(الف)



(ب)

شکل (۴): خطاهای نسبی در (الف) میانگین و (ب)

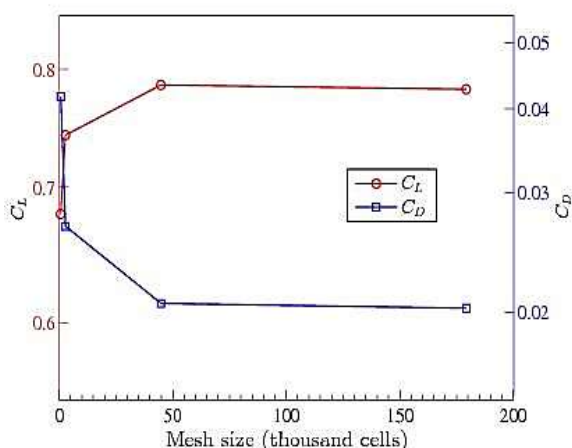
واریانس با استفاده از بسط چندجمله ای آشوب کامل.

به طور خلاصه نتایج اعتبارسنجی مدل توسعه یافته بر روی سه تابع غیرخطی و چالشی نشان داد که با افزایش مرتبه چندجمله ای آشوب (افزودن تعداد نمونه های تصادفی)، خطا نسبت به داده های تحلیلی کاهش چشمگیری دارد. علاوه بر این، تعداد نمونه های مورد نیاز برای هر تابع تحلیلی یا هندسه محاسباتی را می توان بر حسب دقت مورد انتظار و با استفاده از ϵ_{LOO} به دست آورد.

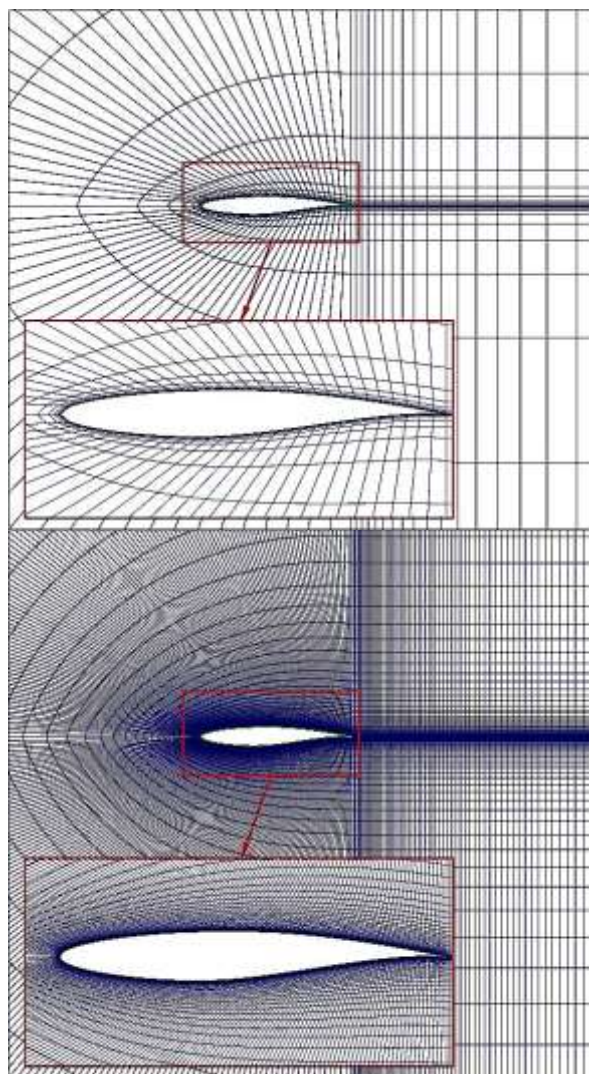
۴- نتایج و بحث

۴-۱- معرفی مدل محاسباتی

در این بخش به منظور ارزیابی عملکرد روش بسط چندجمله ای آشوب در مسائل دینامیک سیالات محاسباتی واقعی، به آنالیز عدم قطعیت جریان گذر صوتی پیرامون ایرفویل RAE۲۸۲۲ پرداخته می شود. جریان اطراف این ایرفویل را به دلیل وقوع شوک قوی و برهم کنش میان لایه مرزی با شوک نرمال می توان مسئله ای چالشی برای



شکل (۵): بررسی استقلال نتایج از شبکه با استفاده از شبکه های محاسباتی مختلف با دو ضریب برآ و پسا.



شکل (۶): دو نمونه از شبکه های محاسباتی استفاده شده.

ارزیابی عملکرد بسط چندجمله‌ای آشوب در نظر گرفت. آنالیز عدم قطعیت جریان در این مسئله تحت تأثیر عدم قطعیت‌های هندسی و شرایط کاری توسط پژوهشگران مختلف انجام شده است [۱۹ و ۲۰]. برای نمونه کومار و همکاران [۱۹]، صالحی و همکاران [۲۰] از این مسئله برای ارزیابی عملکرد مدل‌های آنالیز عدم قطعیت بهره گرفته‌اند. هندسه و شرایط جریان اطراف ایرفویل RAE۲۸۲۲ توسط کوک و همکاران [۲۱] بیان شده است. در این مسئله شرایط شبیه‌سازی که خارج از محدوده طراحی ایرفویل هستند، عبارتند از: ۱- عدد ماخ جریان آزاد $M = 0.734$ ، ۲- زاویه حمله $\alpha = 2.79$ درجه و ۳- عدد رینولدز جریان $Re = 6.5 \times 10^6$

در این مسئله محاسبات قطعی با استفاده از حلگر حجم محدود فلونت انجام می‌شود. معادلات حاکم بر مسئله معادلات دوبعدی تراکم‌پذیر ناویر-استوکس متوسط‌گیری شده هستند که برای مدل‌سازی تنش‌های رینولدز در آنها از مدل توربولانس اسپالارت-آلماراس [۲۲] استفاده می‌شود. تمامی ترم‌های جابه‌جایی در معادلات حاکم با استفاده از روش پادبادسوی^۱ مرتبه دو گسسته‌سازی می‌شوند.

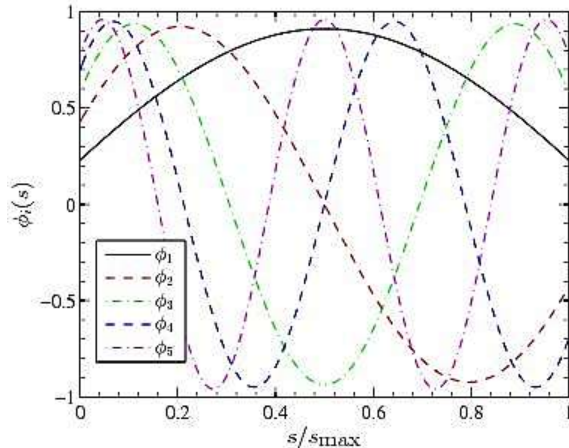
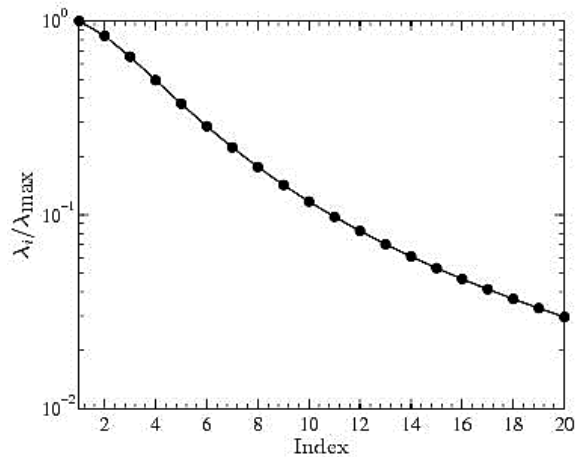
در شکل ۵ نتایج حل قطعی برای دو پارامتر ضریب برآ C_L و ضریب پسا C_D روی ۴ شبکه محاسباتی با تعداد سلول مختلف نشان داده شده است. در این شبکه‌ها درشت‌ترین شبکه تنها دارای 6.5×10^2 سلول است در حالی که ریزترین شبکه حدود 1.75×10^5 سلول دارد. در تمامی این شبکه‌ها فاصله اولین گره محاسباتی از دیواره به گونه‌ای انتخاب شده است که مقدار y^+ زیر یک باشد و زیرلایه‌ی لزج با دقت مناسب حل شود. مطابق شکل شبکه‌های درشت که دارای 6.5×10^2 و 2.7×10^3 سلول هستند نتایج متفاوتی را برای هر دو پارامتر پیش‌بینی می‌نمایند. در حالی که شبکه‌های ریزتر که دارای 4.48×10^4 و 1.79×10^5 سلول هستند، نتایج یکسانی را برای هر دو پارامتر پیش‌بینی می‌کنند. لذا در ادامه محاسبات از شبکه با 4.48×10^4 سلول برای محاسبات با دقت بالا استفاده می‌شود. دو نمونه از شبکه‌های محاسباتی استفاده شده در شکل ۶ نشان داده شده‌اند.

¹ Upwind

در بسط کارهونن لوو قسمت های تصادفی و مشخصه پروسه تصادفی مستقل از یکدیگر فرض می شوند. متغیرهای تصادفی ξ_n با توزیع یکنواخت دارای متوسط صفر و واریانس واحد هستند، لذا بازه تغییرات آنها به صورت $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]^{ns}$ است. مقادیر ویژه و توابع ویژه نظیر هسته کوواریانس در شکل ۸ نشان داده شده اند. مطابق شکل ۸ با افزایش اندیس n اندازه مقادیر ویژه کاهش یافته و فرکانس توابع ویژه افزایش می یابد. با استفاده از معیار رابطه (۱۳) تعداد $n_s = 18$ تابع ویژه اول در بسط کارهونن لوو باید در نظر گرفته شوند.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_s} \lambda_i}{\sum_i \lambda_i} \geq 0.95 \quad (13)$$

لذا مسئله حاضر دارای $n_s = 18$ متغیر تصادفی است. این متغیرها از یکدیگر مستقل بوده و همگی با مقدار متوسط صفر و واریانس یک در بازه $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ به صورت یکنواخت توزیع شده اند. در شکل ۹ تعدادی از هندسه های تصادفی تولید شده با استفاده از بسط کارهونن لوو نشان داده شده اند.



شکل (۸): مقادیر ویژه و توابع ویژه هسته کوواریانس مختصات نقاط ایرفویل

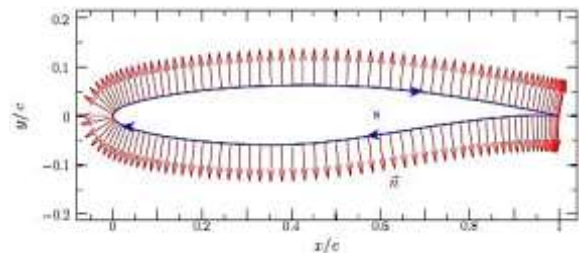
در این مسئله همان طور که بیان شد عدم قطعیت در هندسه ایرفویل بررسی می شود. این عدم قطعیت ها ناشی از خطا در فرایند ساخت و یا تغییر هندسه در طی عمر کاری آن است. عدم قطعیت در هندسه ایرفویل به صورت یک پروسه اغتشاشی در راستای عمود بر سطح ایرفویل در نظر گرفته می شود. پروسه تصادفی مذکور با استفاده از تابع کوواریانس به صورت زیر تعریف می شود.

$$R(s_1, s_2) = \sigma^2 e^{-\frac{|s_1 - s_2|}{b}} \quad (11)$$

که در آن $\sigma = 0.002$ انحراف معیار و $b = 0.2$ طول همبستگی است. در رابطه فوق s_1 و s_2 مختصات مکان نقاط در راستای سطح ایرفویل هستند. در شکل ۷ مختصات مکان نقاط به همراه جهت بردارهای نرمال بر سطح در هر نقطه از ایرفویل نشان داده شده اند. مطابق شکل بردار مکان نقاط از لبه فرار در سطح زیرین ایرفویل شروع شده و پس از رسیدن به لبه حمله روی سطح بالایی ایرفویل ادامه می یابد. با استفاده از بسط کارهونن لوو [۱۵] عدم قطعیت در هندسه به صورت زیر اعمال می شود.

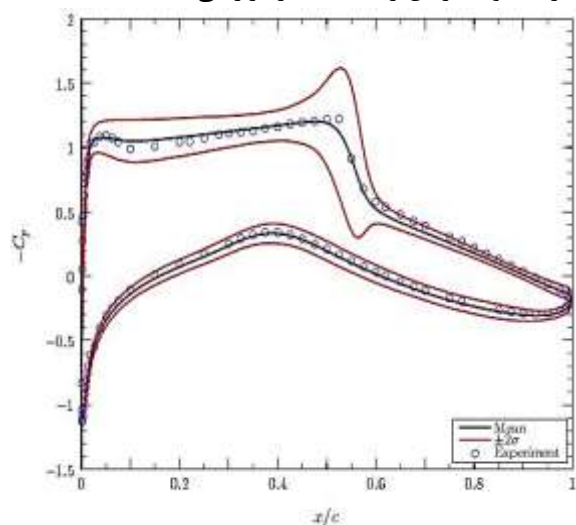
$$X(s, \xi) = \bar{X}(s) + \sum_{n=1}^{n_s} \sqrt{\lambda_n} \phi_n(s) \xi_n \cdot \vec{n}(s), \quad (12)$$

که در آن $\bar{X}(s)$ مقدار متوسط مختصات هندسه در مکان s در هندسه قطعی است، ϕ_n و λ_n به ترتیب مقادیر ویژه و توابع ویژه هسته کوواریانس هستند. جهت نرمال بر سطح که راستای تغییرات مختصات هندسه ایرفویل را نشان می دهد با بردار \vec{n} مشخص شده است. در این مسئله همه متغیرهای تصادفی در بسط کارهونن لوو با تابع توزیع احتمال یکنواخت در نظر گرفته می شوند. استفاده از متغیرهای با تابع توزیع احتمال غیر یکنواخت همچون توزیع گاوسی یا بتا نیز امکان پذیر است ولی نوع توزیع متغیر تصادفی در اهداف این بخش که ارزیابی عملکرد روش بسط چندجمله ای آشوب است، تأثیری ندارد.

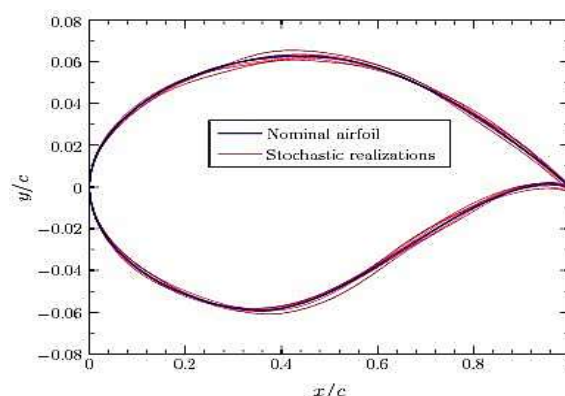


شکل (۷): مختصات s و بردارهای عمود بر سطح ایرفویل

آشوب از مرتبه $p = 3$ و نمونه‌های روی شبکه محاسباتی با $4/48 \times 10^4$ سلول نتایج آنالیز عدم قطعیت ارائه می‌شود. در این حالت برای بسط چندجمله‌ای آشوب کامل از مرتبه $p = 3$ با $n_s = 18$ متغیر تصادفی به $N = 2660$ نمونه تصادفی برای محاسبه ضرایب بسط نیاز است. در شکل ۱۱ نتایج آنالیز عدم قطعیت برای ضریب فشار C_p روی سطح ایرفویل آورده شده است. در شکل ۱۱ نتایج با داده‌های آزمایشگاهی کوک و همکاران [۲۱] نیز مقایسه شده است. مطابق شکل ۱۱ نتایج آزمایش دقیقاً در باند تغییرات $\pm 2\sigma$ قرار گرفته‌اند در حالی که این مقادیر در برخی نقاط با مقادیر متوسط تفاوت دارند که بخش عمده این تفاوت ناشی از وجود عدم قطعیت‌های اجتناب‌ناپذیر در مسئله است. از طرفی عمده تغییرات در مقدار ضریب فشار در ناحیه اطراف شوک نرمال که همراه با کاهش سریع فشار است رخ می‌دهد. بنابراین می‌توان گفت عدم قطعیت‌های هندسی در نظر گرفته شده با شدت بیشتری مکان وقوع و قدرت شوک نرمال را تحت تأثیر قرار می‌دهند.



شکل (۱۱): نتایج آنالیز عدم قطعیت هندسی ایرفویل بر ضریب فشار روی سطوح مکشی و فشاری ایرفویل با استفاده از بسط چندجمله‌ای آشوب کامل از مرتبه $p = 3$. در شکل ۱۲ و شکل ۱۳ به ترتیب کانتورهای مقدار متوسط و انحراف معیار ضریب فشار و عدد ماخ محاسبه شده با استفاده از بسط چندجمله‌ای آشوب از مرتبه $p = 3$ نشان داده شده‌اند. مطابق با نتایج بیشترین تغییرات در مقدار این متغیرها نیز در اطراف ناحیه وقوع شوک نرمال رخ داده است. بر این اساس در نواحی از جریان با طبیعت غیرخطی و ذاتا آشوبناک، اثر عدم قطعیت به شکل قابل



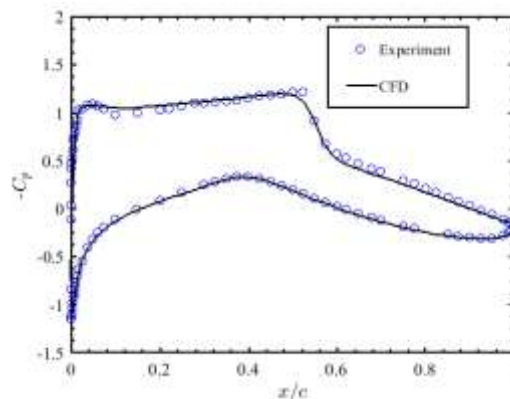
شکل (۹): تعدادی از نمونه‌های تصادفی هندسه ایرفویل.

۲-۴- اعتبارسنجی

برای اعتبارسنجی مدل محاسباتی، نتایج شبیه‌سازی عددی حاضر با نتایج تجربی کوک و همکاران [۲۱] در شکل ۱۰ مقایسه شده است. نتایج این اعتبارسنجی با استفاده از مدل آشفتگی اسپالارات-ماراس برای ضریب فشار C_p روی سطح ایرفویل آورده شده است. پارامتر ضریب فشار به صورت زیر

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad (14)$$

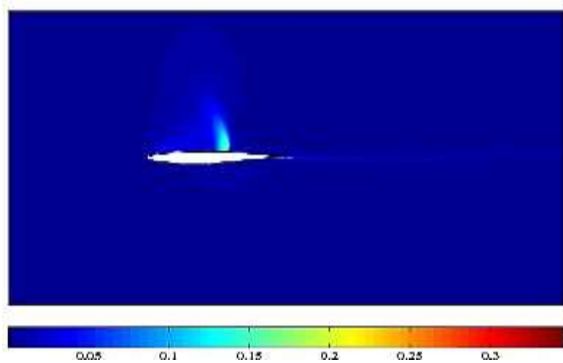
تعریف می‌شود که در آن p بیانگر فشار استاتیک روی ایرفویل و p_∞ ، U_∞ و ρ_∞ نیز به ترتیب بیانگر فشار، سرعت و چگالی جریان آزاد هستند. مطابق شکل ۱۰ نتایج حل عددی توافق مناسبی با نتایج آزمایشگاهی دارد از این رو در ادامه از همین مدل آشفتگی در تحلیل UQ استفاده خواهد شد.



شکل (۱۰): اعتبارسنجی حل عددی با نتایج تجربی

۳-۳- ارائه نتایج آنالیز عدم قطعیت

در این بخش نتایج آنالیز عدم قطعیت جریان گذر صوتی اطراف ایرفویل RAE۲۸۲۲ تحت تأثیر عدم قطعیت هندسی ارائه می‌شوند. با استفاده از بسط چندجمله‌ای



شکل (۱۳): نتایج آنالیز عدم قطعیت هندسی ایرفویل بر کانتور عدد ماخ اطراف ایرفویل با استفاده از بسط چندجمله‌ای آشوب کامل از مرتبه $p = 3$.

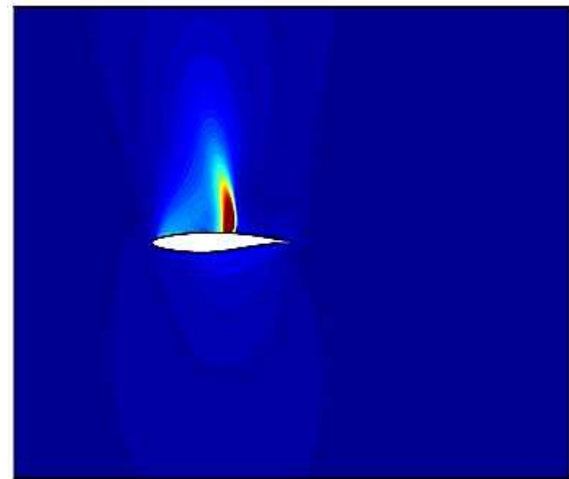
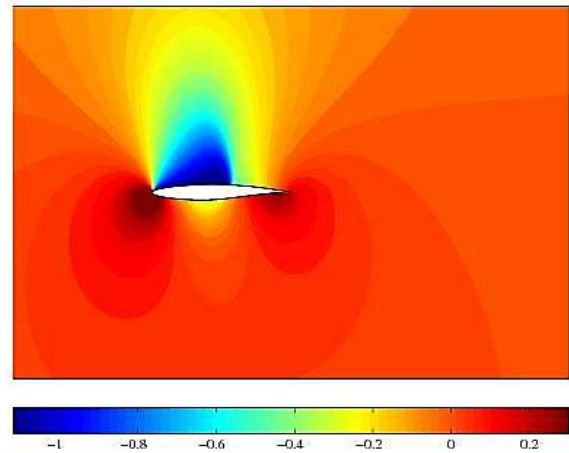
۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به آنالیز عدم قطعیت جریان گذر صوتی اطراف ایرفویل RAE2822 تحت اثر هندسه غیرقطعی پروفیل سازنده ایرفویل پرداخته شد. به منظور مدل‌سازی هندسه تصادفی پره از بسط کارهونن-لوو با در نظر گرفتن هسته کوواریانس نمایی و ۱۸ متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت استفاده شده است. نتایج آنالیز عدم قطعیت، سازگار با فیزیک مسئله بودند چرا که مقدار تغییرات توابع هدف در ناحیه وقوع شوک نرمال اطراف پره به مراتب بالاتر پیش‌بینی شده است. مطابق با نتایج بیشترین تغییرات در مقدار این متغیرها نیز در اطراف ناحیه وقوع شوک نرمال رخ داده است. بر این اساس در نواحی از جریان با طبیعت غیرخطی و ذاتاً آشوبناک، اثر عدم قطعیت به شکل قابل ملاحظه‌ای تقویت و بر نتایج عددی حاصل در مقایسه با شرایط حل قطعی مؤثر است."

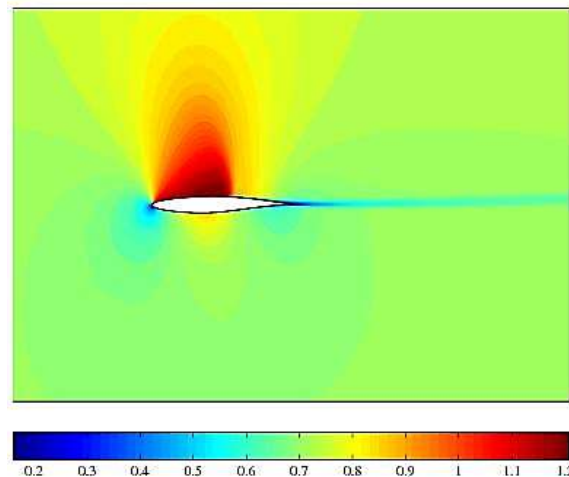
۶- مراجع

- [1] Ghanem, R.G. and P.D. Spanos, Stochastic Finite Element Method: Response Statistics, in Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach. 1991, Springer. p. 101-119.
- [2] Wiener, N., The homogeneous chaos. American Journal of Mathematics, 1938. 60(4): p. 897-936.
- [3] Raisee, M., D. Kumar, and C. Lacor, A non-intrusive model reduction approach for polynomial chaos expansion using proper orthogonal decomposition. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015. 103(4): p. 293-312.
- [4] Salehi, S., et al., On the flow field and performance of a centrifugal pump under operational and geometrical uncertainties. Applied Mathematical Modelling, 2018. 61: p. 540-560.

ملاحظه ای تقویت و بر نتایج عددی حاصل در مقایسه با شرایط حل قطعی مؤثر است.



شکل (۱۲): نتایج آنالیز عدم قطعیت هندسی ایرفویل بر کانتور ضریب فشار اطراف ایرفویل با استفاده از بسط چندجمله‌ای آشوب کامل از مرتبه $p = 3$.



- [13] Ishigami, Tsutomu, and Toshimitsu Homma. "An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models." In [1990] Proceedings. First international symposium on uncertainty modeling and analysis, pp. 398-403. IEEE, 1990.
- [14] An, Jian, and Art Owen. "Quasi-regression." *Journal of complexity* 17, no. 4 (2001): 588-607.
- [15] Wang, Limin. *Karhunen-Loeve expansions and their applications*. London School of Economics and Political Science (United Kingdom), 2008.
- [16] A. Mohammadi-Ahmar, M. Raisee, Multi-fidelity uncertainty quantification of film cooling flow under random operational and geometrical conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 152 (2020) 119548.
- [17] A. Mohammadi-Ahmar, A. Mohammadi, M. Raisee, Efficient uncertainty quantification of turbine blade leading edge film cooling using bi-fidelity combination of compressed sensing and Kriging, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 162 (2020) 120360.
- [18] Sobol', I.y.M., On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1967. 7(4): p. 784-802.
- [19] D. Kumar, M. Raisee, and C. Lacor, "An efficient non-intrusive reduced basis model for high dimensional stochastic problems in CFD," *Computers & Fluids*, Vol. 138, pp. 67-82, 2016,
- [20] S. Salehi, M. Raisee, M. J. Cervantes, and A. Nourbakhsh, "Efficient uncertainty quantification of stochastic CFD problems using sparse polynomial chaos and compressed sensing," *Computers & Fluids*, Vol. 154, pp. 296-321, 2017,
- [21] P. Cook, M. Firmin, and M. McDonald. *Aerofoil RAE 2822: pressure distributions, and boundary layer and wake measurements*. RAE, 1977.
- [22] P. Spalart and S. Allmaras, "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows," in 30th aerospace sciences meeting and exhibit, p. 439,
- [5] Carnevale, M., et al., Uncertainty quantification: A stochastic method for heat transfer prediction using LES. *Journal of Turbomachinery*, 2013. 135(5): p. 051021.
- [6] Mohammadi, A. and M. Raisee, Effects of operational and geometrical uncertainties on heat transfer and pressure drop of ribbed passages. *Applied Thermal Engineering*, 2017. 125: p. 686-701.
- [7] Knio, O.M., H.N. Najm, and R.G. Ghanem, A stochastic projection method for fluid flow: I. basic formulation. *Journal of computational Physics*, 2001. 173(2): p. 481-511.
- [8] Lacor, C. and S. Smirnov. Non-deterministic compressible navier-stokes simulations using polynomial chaos. in *Proc. ECCOMAS Conf.* 2008.
- [9] Dinescu, C., et al., Assessment of intrusive and non-intrusive non-deterministic CFD methodologies based on polynomial chaos expansions. *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, 2010. 2(1-2): p. 87-98.
- [10] Xiu, D. and D.M. Tartakovsky, Numerical methods for differential equations in random domains. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2006. 28(3): p. 1167-1185.
- [11] Xiu, D. and G.E. Karniadakis, Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of computational physics*, 2003. 187(1): p. 137-167.
- [12] Sobol', Ilya M. "Theorems and examples on high dimensional model representation." *Reliability Engineering and System Safety* 79, no. 2 (2003): 187-193.