Radar

Vol. 10, No. 2, Autumn & Winter 2022, Serial No. 27,pp.39-48

ISSN: 2345-4024 , E-ISSN: 2345-4032

Investigating the Quantum Radar Cross-Section of an Elliptical Surface Target and its Influencing Factors

S. M. Mir Tabaee*[1] , M. Reza Nezhadi[2]

[1]* PhD student, Engineering Sciences Studies, Imam Ali (AS) University of Technology, Tehran, Iran

(Received:2022 /08/09, Revised: 2022/12/05, Accepted: 2022/12/31, Published: 2023/01/21)

DOR: https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.23454024.1401.10.2.3.4

Abstract

There are many uses of quantum information for remote sensing applications such as quantum radar. Quantum radars are an advanced technology with many potentials and applications. Quantum Radar Cross Section (QRCS) is an important parameter in quantum radars' subject that shows how "big" an object looks to a quantum radar and describes how much return one gets when illuminating an object with a small number of photons. In this research, in order to better analyze and predict the cross-section of a quantum radar, we first use the particle approach of photons to express the quantum radar cross-section (QRCS) of a flat elliptical target. Then, by applying Fourier transforms we developed the closed-form analytical expression of the quantum radar cross-section of the mentioned elliptical surface. this analytical expression can predict the QRCS in both monostatic and bistatic radars. Then we examine the effects of each of the variables, such as the wavelength of the photons, the number of photons in each pulse, and the angle of the photon transmitter in the cross-section of the quantum radar. We also give a cross-section comparison between classical and quantum radars to present the advantages of quantum radars over classical radars.

Keywords: : Quantum radar, Quantum radar cross section, Remote sensing.

**Corresponding Author Email: mirtabaee_58@yahoo.com*

«راوار»
سال دهم، شماره ۲، فصل پاییز و زمستان ۱۴۰۱؛ ص ۴۸-۳۹

علمی – پژوهشی

بررسی سطح مقطع رادار کوانتومی سطح بیضوی و عوامل مؤثر بر آن

سید مصطفی میرطبایی[۱*]، میثم رضانژادی[۲]

۱- دانشجوی دکتری، مطالعات علوم مهندسی دانشگاه افسری امام علی(ع)، تهران ، ایران ۲- پژوهشگر، گروه طراحی جامدات، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۱۸، بازنگری: ۱۴۰۱/۰۹/۱۴، پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰، انتشار: ۱۴۰۱/۱۱/۰۱)

DOR: https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.23454024.1401.10.2.3.4

چکیده

امروزه علاقه زیادی در استفاده از اطلاعات کوانتومی برای کاربردهای سنجش‌ازدور مانند رادار کوانتومی وجود دارد. رادارهای کوانتومی نوعی فناوری پیشرفته با ظرفیت‌های بالقوه و کاربردهای فراوان می‌باشد. سطح مقطع راداری کوانتومی (QRCS) یک پارامتر مهم در مبحث رادارهای کوانتومی است، این کمیت اندازه‌گیری می‌کند که یک شی چقدر از نظر یک رادار کوانتومی "بزرگ" به نظر می‌رسد و چگونگی پراکندگی تعداد انگشت شماری فوتون از یک هدف مایکروسکوپی را توصیف می‌کند. در این پژوهش به‌منظور تحلیل بهتر و پیش‌بینی سطح مقطع رادار کوانتومی، ما ابتدا با استفاده از رهیافت رفتار ذره‌ای فوتون‌ها، به بیان سطح مقطع راداری کوانتومی (QRCS) یک هدف بیضوی می‌پردازیم. سپس با استفاده از تبدیلات فوریه به بیان تحلیلی سطح مقطع رادار کوانتومی سطح بیضوی مذکور اشاره می‌کنیم، این بیان تحلیلی می‌تواند QRCS را در هر دو رادار تک‌پایه و دوپایه پیش‌بینی کند. سپس تأثیرات هریک از پارامترهای مؤثر همچون طول‌موج فوتون‌ها، تعداد فوتون‌های تابیده‌شده در هر پالس و زاویه قرارگرفتن فرستنده فوتون‌ها در محاسبه سطح مقطع رادار کوانتومی بررسی می‌شود. همچنین یک مقایسه بین سطح مقطع راداری کلاسیک و کوانتومی ارائه داده می‌شود تا مزیت‌های رادارهای کوانتومی نسبت به رادارهای کلاسیک نمایش داده شود.

کلیدواژه‌ها: رادار کوانتومی، سطح مقطع رادار کوانتومی، سنجش‌ازدور

۱- مقدمه

بر اساس مطالعات اخیر، می‌توان از اثرات مکانیکی کوانتومی برای تقویت فناوری‌های سنجش از راه دور مانند رادار استفاده کرد [۱]. رادارهای کلاسیک، با ارسال پالس‌های الکترومغناطیسی به اهداف و دریافت پژواک آن، اطلاعاتی مانند فاصله، سرعت و ارتفاع اهداف را فراهم می‌کنند [۲]. اهداف با بازتاب پایین که در محیطی با پس‌زمینه پر اختلال و نویز قرارگرفته‌اند با استفاده از سامانه‌های کلاسیک به‌سختی قابل‌شناسایی هستند. بعلاوه، در سال‌های اخیر پژوهش‌های فراوانی برای پنهان‌سازی اهداف از دید رادارهای کلاسیک انجام‌شده است که به‌عنوان‌مثال می‌توان استفاده از پوشش پلاسمایی [۳] یا استفاده از ماده جاذب [۴] در ساخت اهداف رادار گریز اشاره کرد. در مقابل، استفاده از ویژگی‌های مکانیک کوانتومی در رادارها به‌طور قابل‌توجهی دقت تشخیص را بهبود می‌بخشد [۵]. فرستنده رادارهای کوانتومی یک فوتون یا چند فوتون برای شناسایی اهداف ارسال می‌کند که این ویژگی در تضاد با رادارهای کلاسیکی که از پالس‌های الکترومغناطیسی پیوسته شامل تعداد بی‌نهایت فوتون استفاده می‌کند، می‌باشد. همچنین، گیرنده رادار کوانتومی، حالت کوانتومی فوتون‌های دریافتی را پردازش می‌کند [۶]. رادار کوانتومی به‌عنوان یک مفهوم نظری جذاب با نتایج تجربی و نظری امیدوارکننده است که می‌تواند تأثیر قابل‌توجهی در زمینه‌های غیرنظامی و نظامی داشته باشد [۷]–[۹]. به‌عنوان‌مثال این فناوری جدید کاربردهای بالقوه‌ای در زمینه‌هایی مانند، کشف

* رایانامه نویسنده مسئول: mirtabaee_58@yahoo.com

اهداف پنهان، اکتشاف فضایی، دفاع سیاره‌ای و کشف ریزساختارها دارد [۱۰]. سامانه‌های راداری، از سیگنال جمع‌آوری‌شده در گیرنده که توسط فرستنده ساطع می‌شود و توسط هدف بازتاب می‌شود برای تشخیص و شناسایی هدف استفاده می‌کنند [۱۱]. مشابه سطح مقطع راداری کلاسیک (CRCS) در رادارهای سنتی، مفهوم سطح مقطع راداری کوانتومی (QRCS) در رادارهای کوانتومی معرفی‌شده است [۸]. این کمیت اندازه‌گیری می‌کند که یک شی چقدر ازنظر یک رادار کوانتومی "بزرگ" به نظر می‌رسد و چگونگی پراکندگی تعداد انگشت‌شماری فوتون از یک هدف مایکروسکوپی را توصیف می‌کند[۱]. در پژوهش‌های اولیه، محاسبات و تحلیل‌های سطح مقطع راداری سطح مستطیلی و دایره‌ای برای رادار کوانتومی تک‌پایه موردبررسی قرارگرفته است. اگر آنتن‌های فرستنده و گیرنده رادار به یکدیگر نزدیک باشند یا از یک آنتن واحد برای ارسال و دریافت استفاده شود، رادار تک‌پایه محسوب می‌شود[۱۲]. در این محاسبات تأثیر ابعاد جسم، طول‌موج فوتون‌های ارسالی موردبررسی و مطالعه قرارگرفته است [۱۳]–[۱۶]. بعدازآن، محققین توانستند معادلات سطح مقطع راداری مربوط به رادارهای دوپایه یعنی رادارهایی که فرستنده و گیرنده آن در یک محل قرار ندارند را به دست آورند و همچنین این معادلات را بر اساس تبدیلات فوریه بیان کنند که امکان دست یافتن به معادلات تحلیلی سطح مقطع راداری کوانتومی را برای اجسام دوبعدی ساده را فراهم می‌کند [۱۷]–[۱۹]. بااین‌حال محققین در پژوهش‌های گذشته بیشتر به مطالعه رادارهای تک‌پایه و همچنین ارائه الگوریتم‌های عددی برای محاسبه سطح مقطع راداری کوانتومی پرداختند[۲۰]–[۲۳] و در مورد رادارهای دوپایه اطلاعات و مقایسه‌های کمی ارائه‌شده است. در این پژوهش سعی شده است تأثیرات طول‌موج فوتون‌های ارسالی، تعداد فوتون‌ها در هر پالس و همچنین زاویه فرستنده در سطح مقطع راداری برای جسم دوبعدی بیضوی در رادارهای کوانتومی موردبررسی قرار گیرد، همچنین نتایج حاصل را با آنچه باحالت کلاسیکی بیان‌شده مقایسه شده و مزیت‌های احتمالی رادارهای کوانتومی نسبت به رادارهای کلاسیک بیان شود. برای رسیدن به اهداف ذکرشده با پیروی ازآنچه در منابع آمده است[۲۴] به بیان معادله‌های مربوط به محاسبه سطح مقطع راداری کوانتومی می‌پردازیم. سپس به‌صورت عددی و تحلیلی سطح مقطع راداری کوانتومی دوپایه‌ای یک سطح بیضوی محاسبه و نتایج حاصل را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. پس‌ازآن، تأثیرات طول‌موج فوتون‌های ارسالی و زاویه موردبحث قرار می‌گیرد و همچنین مقایسه‌ای بین سطح مقطع رادار کلاسیکی و کوانتومی ارائه خواهیم داد و در آخر تأثیرات تعداد فوتون‌های ارسالی در محاسبه سطح مقطع بیان می‌شود.

۲- مبانی نظری

۲-۱- سطح مقطع رادار کوانتومی با رهیافت ذره‌ای فوتون‌ها

برای محاسبه حالت کلی سطح مقطع رادار کوانتومی، از نظریه پراکندگی ذره سخت همسان استفاده می‌کنیم و همچنین، اثرات جذب را نادیده می‌گیریم و خواهیم دید آنچه با استفاده از این دیدگاه به دست می‌آید با آنچه با استفاده از الکترودینامیک کوانتومی گزارش‌شده است، مطابقت دارد [۱۸]. نظریه پراکندگی تک ذره در مکانیک کوانتومی در بسیاری از منابع به‌طور مبسوط شرح داده‌شده است[۲۵], [۲۶] و در این پژوهش به‌طور خلاصه آنچه به ما به فهم بهتر موضوع کمک می‌کند بیان می‌شود و با استفاده از آن سطح مقطع راداری کوانتومی (QRCS) برای اهداف مایکروسکوپی به دست می‌آوریم.

تابع موج ذره قبل از پراکندگی که در راستای $\boldsymbol{k}$ حال حرکت است را $|\psi\rangle$ در نظر می‌گیریم و ذره بعد از برهمکنش باهدف در راستای $\boldsymbol{k}'$ پراکنده می‌شود و تابع موج آن را $|\psi'\rangle$ فرض می‌کنیم که می‌توان آن را مجموعی از تابع موج ذره آزاد و موج کروی پراکنده از هدف در نظر گرفت،

$$\langle \mathbf{x}|\psi'\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\left[e^{i\boldsymbol{k}.\mathbf{x}} + f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\frac{e^{ikr}}{r}\right] \qquad (۱)$$

که $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ دامنه پراکندگی است و احتمال پراکندگی ذره در راستای $\boldsymbol{k}'$ را بیان می‌کند، r فاصله مرکز هدف تا نقطه مشاهده می‌باشد. مقدار دامنه پراکندگی طبق تقریب بورن به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = -\frac{1}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}\int e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\mathbf{x}'}\,V(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \qquad (۲)$$

که $V(\mathbf{x}')$ پتانسیل هدف که سبب پراکندگی می‌شود در نظر گرفته می‌شود و $\mathbf{x}'$ فاصله از مرکز هدف تا مابقی نقاط هدف می‌باشد. m جرم ذره است و $\hbar = h/2\pi$ است که h ثابت پلانک می‌باشد. در مبحث رادارهای کوانتومی ما به دنبال پراکندگی از اهداف مایکروسکوپی که از تعداد زیادی اتم

تشکیل‌شده است می‌باشیم. درنتیجه هر یک از اتم‌های تشکیل‌دهنده هدف را به‌عنوان یک مرکز پراکندگی در نظر می‌گیریم و پتانسیل هدف را به‌صورت شبه‌پتانسیل فرمی در نظر می‌گیریم [۲۴].

$$V(\mathbf{x}') = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\sum_{n=1}^{N} b\,\delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(n)}\right) \tag{۳}$$

که $\mathbf{x}^{(n)}$ مکان nامین اتم است و b طول پراکندگی هر یک از اتم‌ها می‌باشد که در اینجا برای تمامی اتم‌ها یکسان در نظر گرفته‌شده است و N تعداد اتم‌های هدف را نشان می‌دهد. درنتیجه دامنه پراکندگی به‌صورت زیر بیان می‌شود: [۲۴]

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \\ &= -b\int e^{-i\boldsymbol{k}'.\mathbf{x}'}\sum_{n=1}^{N}\delta\left(\mathbf{x}'-\mathbf{x}^{(n)}\right)e^{i\boldsymbol{k}.\mathbf{x}'}d\mathbf{x}' \\ &= -b\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\mathbf{x}^{(n)}} \end{aligned} \tag{۴}$$

درنتیجه، اندازه توان دوم دامنه پراکندگی برابر است با:

$$|f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2 = |b|^2\left|\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\mathbf{x}^{(n)}}\right|^2 \tag{۵}$$

هدف بعدی ما، به‌دست‌آوردن سطح مقطع راداری کوانتومی σ_Q هدف می‌باشد. یک تعریف مناسب از سطح مقطع رادار کوانتومی، تعریف آن برحسب شدت‌ها است که مشابه حالت کلاسیک می‌باشد[۱].

$$\sigma_Q = \lim_{R\to\infty} 4\pi R^2\frac{\langle I_s\rangle}{\langle I_i\rangle} \tag{۶}$$

که R فاصله رادار از هدف و $\langle I_s\rangle$ مقدار انتظاری شدت پراکنده‌شده و $\langle I_i\rangle$ مقدار انتظاری شدت اولیه می‌باشد.

می‌توان نشان داد دیفرانسیل سطح مقطع برحسب دامنهٔ پراکندگی از رابطه زیر پیروی می‌کند. [۲۶]

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega} = |f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2 \tag{۷}$$

$\tilde{\sigma}$ تعداد ذرات فرودی که از یک صفحه عمود برجهت برخورد در واحد سطح در واحد زمان عبور می‌کند تعریف می‌شود و یکای آن $1/s.m^2$ می‌باشد که s ثانیه و m متر است. درنتیجه اگر دامنه پراکندگی را در انرژی ذره $\mathrm{E}_{k'}$ ضرب کنیم آنچه به دست می‌آید چگالی شدت پراکنده‌شده در راستای $\boldsymbol{k}'$ می‌باشد. [۲۴]

$$\langle I_s\rangle = \mathrm{E}_{k'}|f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2 \tag{۸}$$

و برای به‌دست‌آوردن $\langle I_i\rangle$ از تقریب فرکانس بالا استفاده می‌کنیم یعنی شدت فرودی برابر است با مجموع شدت پراکنده‌شده از هدف در تمام فضا، در این صورت:[۲۴]

$$\begin{aligned} &\int_{S_T}\langle I_i\rangle\, dS \\ &\approx \iint_{S\supset T}\mathrm{E}_{k'}R^2|f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2\, sin\theta' d\theta' d\varphi' \end{aligned} \tag{۹}$$

که انتگرال سمت چپ بر روی سطح هدف S_T اعمال می‌شود و $S\supset T$ زاویه فضایی یک نیم‌کره اطراف هدف می‌باشد. دلیل در نظر گرفتن نیم‌کره این است که ذره (فوتون) به پشت هدف مایکروسکوپی پراکنده نمی‌شود. همچنین، در تقریب فرکانس بالا، طول‌موج ذره فرودی در مقایسه با ابعاد هدف کوچک در نظر گرفته می‌شود پس می‌توان شدت فرودی بر روی هدف را یکنواخت در نظر گرفت. درنتیجه:

$$\int_{S_T}\langle I_i\rangle\, dS \approx \langle I_i\rangle \mathrm{A}_\perp \tag{۱۰}$$

که $\mathrm{A}_\perp$ سطح مقطع هندسی هدف می‌باشد. درنتیجه برای مقدار انتظاری شدت فرودی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\langle I_i\rangle \\ &= \frac{\mathrm{E}_{k'}}{\mathrm{A}_\perp}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R^2|f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2 sin\theta' d\theta' d\varphi' \end{aligned} \tag{۱۱}$$

و با جای‌گذاری $\langle I_s\rangle$ و $\langle I_i\rangle$ در σ_Q خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\sigma_Q(\theta,\varphi) \\ &= 4\pi\mathrm{A}_\perp\frac{|f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}|f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2 sin\theta' d\theta' d\varphi'} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با قراردادن $|f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2$ از معادله (۵) در معادله (۱۲) خواهیم داشت: [۲۴]

$$\begin{aligned} &\sigma_Q(\theta,\varphi) \\ &= 4\pi\mathrm{A}_\perp\frac{\left|\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\mathbf{x}^{(n)}}\right|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\mathbf{x}^{(n)}}\right|^2 sin\theta' d\theta' d\varphi'} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

۲-۱-۱- تعمیم معادله سطح مقطع رادار کوانتومی در حالت کلی

سطح مقطع راداری در معادله (۱۳) برای حالتی به دست آمد که تعداد ذرات فرودی (فوتون‌های فرودی) در هر پالس برابر با یک است. حال به محاسبه سطح مقطع راداری در حالت کلی یعنی زمانی که تعداد ذرات ورودی در هر پالس بیشتر از یک است می‌پردازیم. برای این هدف، ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که دو ذره فرودی در هر پالس داریم. سپس با رویکردی مشابه هنگامی تعداد ذرات فرودی M در هر پالس است، حالت کلی را به دست می‌آوریم. در حالتی که تعداد ذرات فرودی دو است، تابع موج اولیه هرکدام را می‌توان به‌صورت $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ نمایش داد. درنتیجه در فضای هیلبرت تابع موج سیستم را می‌توان به‌صورت ضرب تانسوری دو تابع موج نوشت $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle$، قابل‌ذکر است که ذرات در ابتدا در راستای $\boldsymbol{k_1}$ و $\boldsymbol{k_2}$ درحرکت هستند و سپس در راستای $\boldsymbol{k'_1}$ و $\boldsymbol{k'_2}$ پراکنده می‌شوند. مشابه معادله (۱) تابع موج کلی بعد از پراکندگی به‌صورت زیر به دست می‌آید: [۲۴]

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \psi'_1, \psi'_2 \rangle &= \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\right)^2 \Bigg[e^{i\boldsymbol{k_1}.\mathbf{x_1}} e^{i\boldsymbol{k_2}.\mathbf{x_2}} \\ &+ e^{i\boldsymbol{k_1}.\mathbf{x_1}} f_2(\boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k'_2}) \frac{e^{ik_2 r_2}}{r_2} \\ &+ e^{i\boldsymbol{k_2}.\mathbf{x_2}} f_1(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k'_1}) \frac{e^{ik_1 r_1}}{r_1} \\ &+ f_1(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k'_1}) f_2(\boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k'_2}) \frac{e^{ik_1 r_1}}{r_1} \frac{e^{ik_2 r_2}}{r_2} \Bigg]\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

جمله اول در عبارت (۱۴) بیان می‌کند که هیچ‌یک از دو ذره فرودی باهدف برهمکنش نداشته‌اند، جمله دوم و سوم فقط یکی از دو ذره باهدف برهمکنش داشته و در جمله آخر هر دو ذره فرودی باهدف برهمکنش داشته‌اند. در بررسی رادارهای کوانتومی ما فقط ازجمله آخر استفاده می‌کنیم یعنی هر دو ذره فرودی باهدف برهمکنش می‌کنند و با استفاده از $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k'})$ که در حالت تک ذره با فرض پتانسیل شبه فرمی (عبارت (۵)) به دست آوردیم عبارت (۱۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \psi'_1, \psi'_2 \rangle &= \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\right)^2 \frac{e^{ik_1 r_1}}{r_1} \frac{e^{ik_2 r_2}}{r_2} \\ &\times \left(b \sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k'_1}).\mathbf{x}^{(n)}} \right) \\ &\times \left(b \sum_{m=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k'_2}).\mathbf{x}^{(m)}} \right)\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

حال با قراردادن رابطه (۱۵) در رابطه (۸) و (۱۱) و قرار دادن حاصل آن‌ها در رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$\sigma_Q(\theta, \varphi) = 4\pi \mathrm{A}_{\perp} \times \frac{\left| \left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}).\mathbf{x}^{(n)}} \right) \right|^4}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}).\mathbf{x}^{(n)}} \right) \right|^4 sin\theta' d\theta' d\varphi'} \qquad (۱۶)$$

حال مانند آنچه برای حالت دو ذره فرودی انجام دادیم، حالت M ذره فرودی (فوتون فرودی) را بررسی می‌کنیم، در این حالت نیاز به M ضرب تانسوری بردارهای حالت و قرار دادن حاصل آن در معادله (۲) است. همچنین مانند حالت دو ذره فرودی، برای مبحث رادارهای کوانتومی فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که تمام ذرات فرودی باهدف برهمکنش می‌کنند (مشابه رابطه (۱۵)). در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M | \psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_M \rangle &= \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\right)^M \\ &\times \left[b^M \prod_{q=1}^{M} \frac{e^{ik_q r_q}}{r_q} \left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k_q} - \boldsymbol{k'_q}).\mathbf{x}_{\boldsymbol{q}}^{(\boldsymbol{n})}} \right) \right]\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

ازآنجایی‌که تمام ذرات در یک راستا باهدف برخورد می‌کنند و همچنین راستای مشاهده همگی یکسان است می‌توان $\boldsymbol{k_q} \to \boldsymbol{k}$ و $\boldsymbol{k'_q} \to \boldsymbol{k'}$ در نظر گرفت. در این حالت سطح مقطع رادار کوانتومی را به‌صورت نوشته می‌شود [۲۴].

$$\sigma_Q(\theta, \varphi) = 4\pi \mathrm{A}_{\perp} \times \frac{\left| \prod_{q=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}).\mathbf{x}_q^{(n)}} \right) \right|^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \prod_{q=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}).\mathbf{x}_q^{(n)}} \right) \right|^2 sin\theta' d\theta' d\varphi'} \qquad (۱۸)$$

ازآنجایی‌که هر یک از سری جمع عبارت (۱۸) مقداری یکسانی دارد می‌توان از $\prod_i^{\gamma} (\sum_n)_i \to (\sum_n)^{\gamma}$ استفاده کرد. درنتیجه: [۲۴]

$$\sigma_Q(\theta,\varphi) = 4\pi A_{\perp} \times \frac{\left|\left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\mathbf{x}^{(n)}}\right)\right|^{2M}}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\mathbf{x}^{(n)}}\right)\right|^{2M} sin\theta' d\theta' d\varphi'} \qquad (۱۹)$$

عبارت (۱۹) سطح مقطع رادار کوانتومی هدفی با N اتم توسط M ذره (فوتون) فرودی در هر پالس را نشان می‌دهد.

۲-۲- سطح مقطع رادار کوانتومی برحسب تبدیلات فوریه

برای حل تحلیلی سطح مقطع رادار کوانتومی آن را برحسب تبدیلات فوریه بیان می‌کنیم. معادله (۱۹) برحسب سری جمع می‌باشد و با توجه اینکه اتم‌ها در هدف در محلی به‌صورت اختیاری قرارگرفته‌اند، بررسی تحلیلی سطح مقطع راداری با استفاده مستقیم معادله (۱۹) کار دشواری خواهد بود و می‌توان از آن فقط در تحلیل‌های عددی استفاده کرد. در ادامه نشان خواهیم داد بیان معادله سطح مقطع راداری برحسب تبدیلات فوریه امکان بررسی تحلیلی اهدافی با هندسه دوبعدی را میسر خواهد کرد.

کار خود را با دامنه پراکندگی $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ شروع می‌کنیم. اگر $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{K}$ در نظر بگیریم، از معادله (۲) خواهیم داشت:

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = -\frac{1}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}\int e^{iK.\mathbf{x}'}V(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\mathcal{F}(V(\mathbf{x})) \qquad (۲۰)$$

در عبارت (۲۰) دیده می‌شود که دامنه پراکندگی تبدیل فوریه توزیع پتانسیل اتم‌های هدف می‌باشد.

در قسمت قبل توزیع پتانسیل را به‌صورت مجموعه‌ای از تابع دلتای دیراک در نظر گرفتیم اما می‌توان در شرایطی که تعداد اتم‌ها زیاد باشد و فاصله آن‌ها نسبت به یکدیگر کم باشد، تابع توزیع پتانسیل را به‌صورت پیوسته در نظر گرفت به‌طوری‌که:

$$V(\mathbf{x}') = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}' \in S \\ 0, & other \end{cases} \qquad (۲۱)$$

که S سطح هدف موردنظر ما است. درنتیجه سطح مقطع رادار کوانتومی σ_Q برحسب تبدیل فوریه برابر است با:

$$\sigma_Q = 4\pi A_{\perp}\frac{|\mathcal{F}(V(\mathbf{x}'))|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}|\mathcal{F}(V(\mathbf{x}'))|^2 sin\theta' d\theta' d\varphi'} \qquad (۲۲)$$

برای حالتی که چند فوتون به هدف تابیده می‌شود، روش بسیار مشابه است. ما حالتی را با درنظرگرفتن دو فوتون به‌عنوان‌مثال ارائه می‌کنیم. دامنه پراکندگی برای هر ذره با عبارت (۲۰) به دست می‌آید؛ بنابراین، دامنه پراکندگی کل $f_T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ برابر است با:

$$f_T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = \int e^{iK_1.\mathbf{x}_1'}V(\mathbf{x}_1')d\mathbf{x}_1'\int e^{iK_2.\mathbf{x}_2'}V(\mathbf{x}_2')d\mathbf{x}_2' = \mathcal{F}(V(\mathbf{x}_1))\mathcal{F}(V(\mathbf{x}_2)) = \mathcal{F}(V(\mathbf{x}))^2 \qquad (۲۳)$$

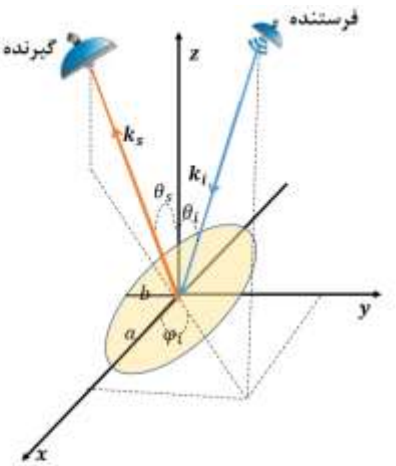
با همین استدلال، هنگامی‌که تعداد فوتون‌های تابشی M است دامنه پراکندگی را می‌توان، توان Mام تبدیل فوریه توزیع پتانسیل هدف در نظر گرفت. درنتیجه، در حالت کلی برای سطح مقطع رادار کوانتومی σ_Q برحسب تبدیل فوریه که به‌وسیله M فوتون تشخیص داده می‌شود، برابر است: [۲۴]

$$\sigma_Q = 4\pi A_{\perp}\frac{|\mathcal{F}(V(\mathbf{x}'))|^{2M}}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}|\mathcal{F}(V(\mathbf{x}'))|^{2M} sin\theta' d\theta' d\varphi'} \qquad (۲۴)$$

خوانندگان گرامی می‌توانند برای بررسی جزئیات بیشتر و مفصل‌تر مطالب ذکرشده بخش مبانی نظری این پژوهش و محاسبه سطح مقطع رادار کوانتومی به [۲۴][۱۹], [۲۷] مراجعه کنند.

۲-۳- حل تحلیلی سطح مقطع رادار کوانتومی سطح بیضوی

به‌منظور محاسبه سطح مقطع رادار کوانتومی برای صفحه بیضوی، محور مختصات را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که قطر بزرگ a و قطر کوچک b صفحه بیضوی به ترتیب در راستای X و Y محور مختصات قرار گیرد. (شکل (۱))



شکل (۱): نمایی از رادار دوپایه و زوایای تابش و پراکندگی بر صفحه بیضوی.

مطابق شکل (۱)، $\boldsymbol{k_i}$ و $\boldsymbol{k_s}$ به ترتیب راستای تابش فوتون‌ها را از فرستنده رادار به سمت هدف و راستای قرار گرفتن گیرنده رادار را نمایش می‌دهد، درنتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k_i} &= -k(sin\theta_i cos\varphi_i \ , sin\theta_i sin\varphi_i) \\ \boldsymbol{k_s} &= -k(sin\theta_s cos\varphi_s \ , sin\theta_s sin\varphi_s) \\ \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{k_i} - \boldsymbol{k_s} \\ &= k(sin\theta_s cos\varphi_s - sin\theta_i cos\varphi_i \ , \\ &\quad sin\theta_s sin\varphi_s - sin\theta_i sin\varphi_i)\end{aligned} \tag{۲۵}$$

درنتیجه، با جای‌گذاری رابطه (۲۵) در رابطه (۲۰) خواهیم داشت:

$$\mathfrak{F}(V(\mathbf{x}')) = \int_{-a}^{a} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} e^{iK_x x + iK_y y} dy dx \tag{۲۶}$$

گیرنده رادار را صفحه اصلی در نظر می‌گیریم و ازآنجاکه فرستنده در صفحه XOZ قرار دارد پس، $\varphi_s = \varphi_i + \pi$ و $\varphi_i = 0$ درنتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K_x} &= -k(sin\theta_s - sin\theta_i) \\ \boldsymbol{K_y} &= 0\end{aligned} \tag{۲۷}$$

باتوجه‌به عبارت (۲۷) و قرار دادن آن در عبارت (۲۶) برای $\mathfrak{F}(V(\mathbf{x}'))$ خواهیم داشت:

$$\mathfrak{F}(V(\mathbf{x}')) = \frac{-2AJ_1(ka(sin\theta_s - sin\theta_i))}{ka(sin\theta_s - sin\theta_i)} \tag{۲۸}$$

که A مساحت صفحه بیضوی و برابر πab و J_1 تابع بسل مرتبه اول می‌باشد.

$A_\perp$ بر اساس زاویه دید برای هدف تغییر می‌باشد. برای اجسام مسطح، سطح مقطع برخورد در زوایای حدی ($\theta_i = \pi/2$) صفر می‌شود و زمانی که به‌صورت عمود ($\theta_i = 0$) نگاه کنیم حداکثر می‌شود. در این صورت می‌توان $A_\perp$ را به‌صورت زیر در نظر گرفت [۱۸]

$$A_\perp = A_\theta = A|cos\theta_i| \tag{۲۹}$$

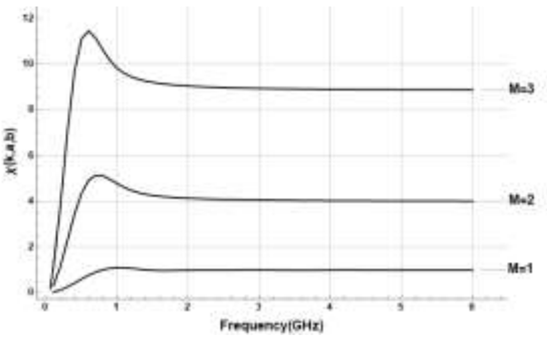
حال برای محاسبه مخرج کسر عبارت (۲۴) سطح مقطع راداری به‌طور مشابه آنچه در منابع برای سطح بیضوی آمده است[۲۷]، خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\beta)} re^{ik_x r cos\beta} dr d\beta\right|^2 sin\theta' d\theta' d\varphi' = A\lambda^2\chi(k,a,b) \tag{۳۰}$$

که $r(\beta) = \frac{ab}{\sqrt{(b\ cos\beta)^2 + (a\ sin\beta)^2}}$ می‌باشد. در این صورت سطح مقطع راداری کوانتومی هنگامی‌که تنها یک فوتون در هر پالس به هدف تابیده می‌شود به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_Q = \frac{1}{\chi(k,a,b)}\frac{16\pi A^2}{\lambda^2}|cos\theta_i|\left(\frac{J_1(ka(sin\theta_s - sin\theta_i))}{ka(sin\theta_s - sin\theta_i)}\right)^2 \tag{۳۱}$$

مقدار $\chi(k,a,b)$ در شکل (۲) به‌صورت عددی محاسبه‌شده است و مشاهده می‌شود اندازه‌ای آن در تقریب فرکانس‌های بالا (طول‌موج کوچک‌تر از ابعاد هدف) برابر با M^2 می‌شود.



شکل (۲): مقدار $\chi(k,a,b)$ برای صفحه بیضوی به شعاع بزرگ $a = 3$ و شعاع کوچک $b = 2$ برای فرکانس‌های مختلف.

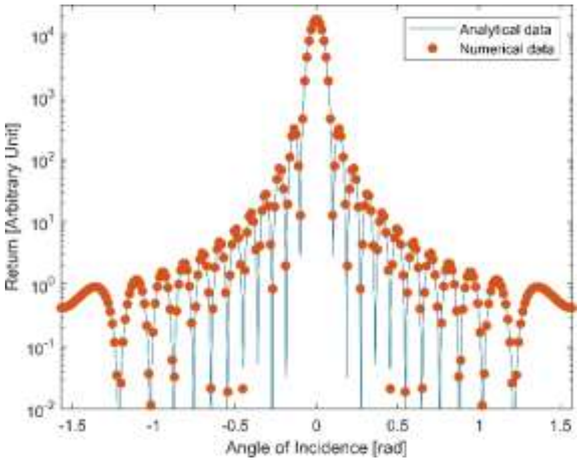
درنتیجه، در حالت کلی که تعداد فوتون‌های تابیده برابر با M باشد، سطح مقطع راداری برای سطح بیضوی از رابطه (۲۴) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_Q \simeq \frac{1}{M^2}\frac{16\pi A^2}{\lambda^2}|cos\theta_i|\left(\frac{J_1(ka(sin\theta_s - sin\theta_i))}{ka(sin\theta_s - sin\theta_i)}\right)^{2M} \tag{۳۲}$$

۳- نتایج و بحث

به‌طورکلی فرض بر این است که الگوی به‌دست‌آمده برای سطح مقطع رادار کوانتومی (*QRCS*) یک اثر مکانیکی کوانتومی صرفاً ناشی از تداخل کوانتومی است؛ مانند شبیه‌سازی گزارش‌شده در پژوهش‌های پیشین [۲۴]، اثرات پراش و جذب نادیده گرفته‌شده است. در این بخش، ما با یک حالت ساده شروع می‌کنیم و هر بار یک متغیر را در معادله σ_Q تغییر می‌دهیم تا ببینیم چگونه بر پاسخ‌های اندازه‌گیری شده تأثیر می‌گذارد. تمامی شبیه‌سازی‌ها توسط برنامه‌نویسی متلب انجام‌شده است.

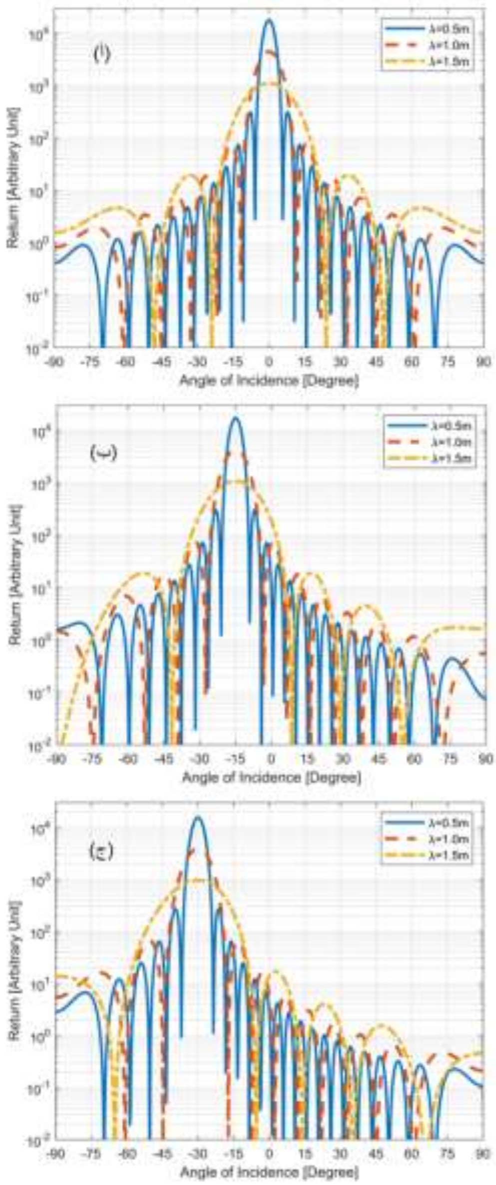
شکل (۳) مقایسه آنچه به‌صورت عددی و تحلیلی برای سطح مقطع راداری برای یک سطح بیضوی به دست می‌آید، نشان می‌دهد. برای انجام محاسبات شعاع بزرگ بیضی $a = 3m$ و شعاع کوچک بیضی $b = 2m$ در نظر گرفته‌شده است همچنین تعداد فوتون ارسالی $M = 1$ در هر پالس و طول‌موج آن $\lambda = 0.5m$ در نظر گرفته‌شده است. همچنین زاویه فرستنده $\theta_i = 0$ در نظر گرفته‌شده است. در شکل(۳) محور افقی و عمودی به ترتیب، زاویه گیرنده و شدت برگشتی را نمایش می‌دهد.



شکل (۳): سطح مقطع راداری محاسبه‌شده به‌صورت عددی و تحلیلی برای یک صفحه‌ی بیضوی به شعاع بزرگ $a = 3m$ و شعاع کوچک $b = 2m$ و زاویه تابش $\theta_i = 0^{\circ}$. محور افقی زاویه پراکندگی برحسب رادیان نمایش می‌دهد. محور عمودی شدت پیش‌بینی اندازه‌گیری شده.

همان‌طور که در شکل (۳) نشان داده‌شده است، آنچه برای سطح مقطع راداری کوانتومی برای یک سطح بیضوی به‌صورت عددی (عبارت (۱۹)) و به‌صورت تحلیلی (عبارت (۳۲)) به دست می‌آید مطابقت بسیار بالایی دارد و صحت آنچه به‌صورت تحلیلی محاسبه‌شده است را نشان می‌دهد.

با قراردادن زاویه تابش غیرصفر و همچنین طول‌موج‌های مختلف در عبارت (۳۲) مشاهده می‌شود که با افزایش طول‌موج فوتون ارتفاع قله مرکزی کاهش ولی پهنای آن افزایش می‌یابد. کاهش قله مرکزی ناشی از آن است که طبق عبارت (۳۲) سطح مقطع رادار کوانتومی برای سطح بیضوی با طول فوتون فرودی رابطه عکس دارد $\sigma_Q \propto \frac{1}{\lambda^2}$ و همچنین افزایش پهنای قله ناشی از کاهش k با افزایش طول‌موج می‌باشد. همچنین در شکل (۴) دیده می‌شود که با افزایش زاویه تابش فرودی $\theta_i = 0^{\circ}$ و 15° و 30° مکان قله مرکزی جابجایی به‌اندازه زوایای ذکرشده خواهد داشت این امر به سبب جمله $sin\theta_i$ در صورت و مخرج معادله (۳۲) به‌عنوان یک ثابت می‌باشد.

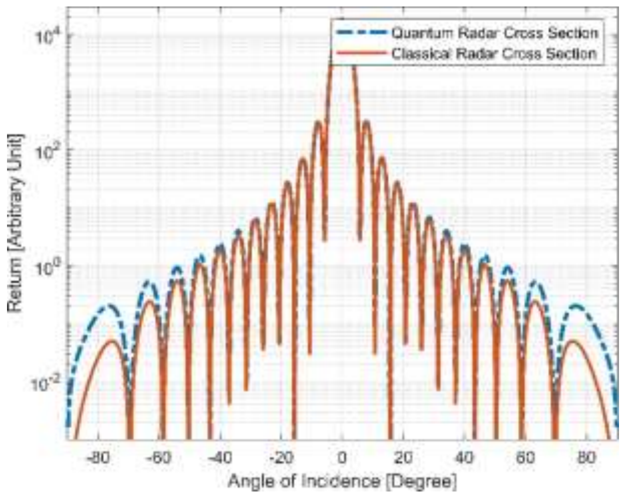


شکل (۴): سطح مقطع راداری برای یک صفحه‌ی بیضوی به شعاع بزرگ $a = 3m$ و شعاع کوچک $b = 2m$ و طول‌موج فوتون فرودی $1.5m$ و $1.0m$ و$0.5m$ = λ. آ) $\theta_i = 0^{\circ}$ ب) $\theta_i = 15^{\circ}$. ج) $\theta_i = 30^{\circ}$. محور افقی زاویه پراکندگی برحسب درجه نمایش می‌دهد. محور عمودی شدت پیش‌بینی اندازه‌گیری شده.

در بررسی دیگر سطح مقطع رادار کوانتومی σ_Q و سطح مقطع راداری کلاسیک σ_c برای جسم بیضوی مقایسه شده است. طبق آنچه به‌وسیله الکترودینامیک برای سطح مقطع راداری کلاسیک در مراجع گزارش‌شده است[۲۴]، σ_c به‌صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_c = \frac{16\pi A^2}{\lambda^2}(cos\theta_i)^2\left(\frac{J_1(ka(sin\theta_s - sin\theta_i))}{ka(sin\theta_s - sin\theta_i)}\right)^2 \quad (۳۳)$$

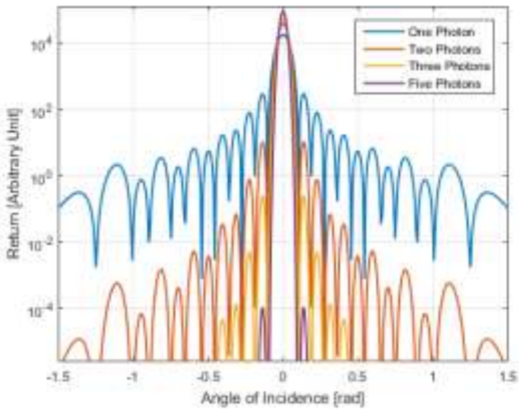
در شکل (۵) مقایسه‌ای ازآنچه برای یک سطح بیضوی به شعاع بزرگ $a = 3m$ و شعاع کوچک $b = 2m$ و طول‌موج $\lambda = 0.5m$ به‌صورت کلاسیک و کوانتومی به دست می‌آید، آورده شده است.



شکل (۵): مقایسه سطح مقطع راداری صفحه بیضوی به‌صورت کوانتومی و کلاسیکی.

همان‌طور که در شکل (۵) دیده می‌شود با دور شدن از قله مرکزی و در قله‌های کناری رادار کوانتومی عملکرد بهتری نسبت به رادار کلاسیکی دارد این امر در رابطه‌های بیان‌کننده آن‌ها به‌وضوح مشخص است. سطح مقطع رادار کلاسیک σ_c با $(cos\theta)^2$ و سطح مقطع رادار کوانتومی σ_Q با $|cos\theta|$ متناسب است. همچنین با مقایسه روابط سطح مقطع رادار کلاسیک و سطح مقطع رادار کوانتومی دیده می‌شود که عملکرد بهتر رادار کوانتومی در قله‌های کناری مستقل از اندازه هدف است که این بیان‌کننده مزیت رادار کوانتومی نسبت به رادار کلاسیک می‌باشد.

در انتها با قراردادن تعداد فوتون مختلف در هر پالس $M = 1,2,3,5$ در رابطه (۳۲) مشاهده می‌شود که ارتفاع قله اصلی با افزایش تعداد فوتون‌ها افزایش و پهنای آن با افزایش تعداد فوتون‌ها کاهش می‌یابد. همچنین ارتفاع قله‌های غیرمرکزی به‌صورت نمایی کاهش پیدا می‌کند. شکل (۶)



شکل (۶): سطح مقطع رادار کوانتومی برای صفحه بیضوی به شعاع بزرگ $a = 3m$ و شعاع کوچک $b = 2m$ اندازه‌گیری شده با تعداد مختلف فوتون در هر پالس.

۴- نتیجه‌گیری

استفاده از رادارهای کوانتومی یک روش بالقوه قدرتمند برای شناسایی و تشخیص اهداف است که در آن از ویژگی پراکندگی فوتون‌ها استفاده می‌شود. در این مطالعه، سطح مقطع راداری کوانتومی صفحه بیضوی به‌عنوان یک حالت کلی‌تر نسبت به صفحه دایره‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، با استفاده از تبدیلات فوریه عبارت تحلیلی سطح مقطع راداری دوپایه کوانتومی برای صفحه بیضوی به دست آورده شده است. علاوه بر این، عبارت تحلیلی به‌دست‌آمده توسط داده‌های عددی مورد صحت سنجی قرار گرفته که نشان‌دهنده رویکردی صحیح ما می‌باشد. همچنین، نتایج ما نشان می‌دهد که با افزایش فرکانس (کاهش طول‌موج)، هم‌ارتفاع قله اصلی و هم تعداد گره‌ها در الگوی سطح مقطع راداری متناسب با آن بالا می‌روند. بعلاوه، ما با مقایسه نتایج بین سطح مقطع راداری کوانتومی و کلاسیک را برای صفحه بیضوی با یکدیگر مشاهده کردیم که توانایی تشخیص رادار کوانتومی در قله‌های جانبی (زاویه‌های پراکندگی زیاد) بیشتر از رادار کلاسیک می‌باشد و درنهایت تعداد تأثیرات تعداد فوتون‌ها در هر پالس را در سطح مقطع رادار کوانتومی را به دست آوردیم و دیدیم که با افزایش تعداد فوتون‌ها ارتفاع قله مرکزی افزایش پیدا می‌کند. ضمناً قابل‌ذکر است در این پژوهش اثرات پراش و جذب نادیده گرفته‌شده است.

۵- مراجع

[1] M. Lanzagorta, "Quantum Radar," Synth. Lect. Quantum Comput., vol. 3, no. 1, pp. 1–139, Oct. 2011.

[2] B. Zohuri, Radar Energy Warfare and the Challenges of Stealth Technology. Cham: Springer International Publishing, 2020.

[3] H. Soroush, R. Khoshkhoo, and M. H. Shams, "Radar Cross Section Reduction of a Flat Square Plate Using Plasma Coating Caused By Dielectric Barrier Discharge (DBD) Plasma Actuator," J. "Radar," vol. 8, no. 1, pp. 27–37, 2020. (InPersian) https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.23454024.1399.8.1.3.8

[4] D. Hamunpeyma and A. Alighanbari, "Non-uniform and Partial Coating of an Aircraft for Achievement of the Minimum Radar Cross Section with the Minimum Weight of Absorbent," J. "Radar," vol. 5, no. 2, pp. 27–40, 2017. (In Persian).https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.23454024.1396.5.2.3.9

[5] A. Salmanogli and D. Gokcen, "Analysis of Quantum Radar Cross-Section by Canonical Quantization Method (Full Quantum Theory)," IEEE Access, vol. 8, pp. 205487–205494, 2020.

[6] M. Lanzagorta, "Low-brightness quantum radar," 2015, p. 946113.

[7] S. Lloyd, "Enhanced Sensitivity of Photodetection via Quantum Illumination," Science (80-.)., vol. 321, no. 5895, pp. 1463–1465, Sep. 2008.

[8] M. Lanzagorta, "Quantum radar cross sections," in Quantum Optics, 2010, vol. 7727, p. 77270K.

[9] Q. Wang et al., "Super-resolving quantum LiDAR with even coherent states sources in the presence of loss and noise," Phys. Lett. A, vol. 380, no. 44, pp. 3717–3723, Nov. 2016.

[10] M. Krelina, "Quantum Technology for Military Applications," EPJ Quantum Technol., vol. 8, no. 1, Mar. 2021.

[11] L. Nicolaescu and T. Oroian, "Radar cross section," in 5th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Service. TELSIKS 2001. Proceedings of Papers (Cat. No.01EX517), vol. 1, pp. 65–68.

[12] R. Yang, T. Zhang, Z. He, H. C. Yin, and R. Chen, "An Efficient Analysis Method for Monostatic quantum radar cross section," in 2019 International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology (ICMMT), 2019, pp. 1–3.

[13] C. Fang, "The Simulation of Quantum Radar Scattering for 3D Cylindrical Targets," in 2018 IEEE International Conference on Computational Electromagnetics (ICCEM), 2018, pp. 1–3.

[14] K. Liu, Y. Jiang, X. Li, Y. Cheng, and Y. Qin, "New results about quantum scattering characteristics of typical targets," in 2016 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2016, pp. 2669–2671.

[15] C. Fang and K. Han, "Analytical Formulation for the Quantum Radar Scattering of the Rectangular Plate," in 2019 IEEE 2nd International Conference on Electronic Information and Communication Technology (ICEICT), 2019, pp. 677–681.

[16] Z. Tian, D. Wu, Y. Xu, X. Zhou, Y. Zhang, and T. Hu, "Closed-form model and analysis for the enhancement effect of a rectangular plate in the scattering characteristics of multiphoton quantum radar," Opt. Express, vol. 30, no. 12, p. 20203, Jun. 2022.

[17] M. J. Brandsema, R. M. Narayanan, and M. Lanzagorta, "Theoretical and computational analysis of the quantum radar cross section for simple geometrical targets," Quantum Inf. Process., vol. 16, no. 1, p. 32, Jan. 2017.

[18] C. Fang, "The Closed-Form Expressions for the Bistatic Quantum Radar Cross Section of the Typical Simple Plates," IEEE Sens. J., vol. 20, no. 5, pp. 2348–2355, Mar. 2020.

[19] M. J. Brandsema, R. M. Narayanan, and M. Lanzagorta, "Analytical formulation of the quantum electromagnetic cross section," 2016, p. 98291H.

[20] C. Fang, "The calculation of quantum radar scattering characteristic for the 3D circular cone target," in 2018 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility and 2018 IEEE Asia-Pacific Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC/APEMC), 2018, pp. 248–250.

[21] C. Fang, "The Analysis of Mainlobe-Slumping Quantum Effect of the Cube in the Scattering Characteristics of Quantum Radar," IEEE Access, vol. 7, pp. 141055–141061, 2019.

[22] C. Fang and S. Xinyang, "The Analysis of Quantum Radar Scattering for the Typical Pyramid Structure," in 2019 International Applied Computational Electromagnetics Society Symposium - China (ACES), 2019, pp. 1–2.

[23] C. Fang, "The Simulation and Analysis of Quantum Radar Cross Section for Three-Dimensional Convex Targets," IEEE Photonics J., vol. 10, no. 1, pp. 1–8, Feb. 2018.

[24] M. J. Brandsema, "Formulation and Analysis of the Quantum Radar Cross Section," 2016.