

## Effect of Hydrostatic Pressure on the Free Vibrations of Hybrid Cylindrical Shell

Rashid Mohammadi<sup>1</sup>, Mohammad Meskini <sup>2\*</sup>, Heshmatollah Mohammadkhanlo <sup>3</sup>

<sup>1</sup> M.Sc Student, Faculty of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

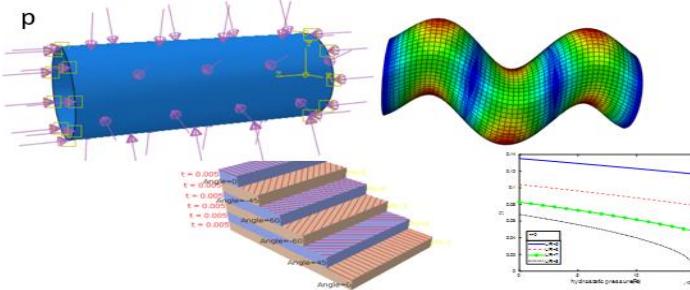
<sup>2</sup> Assistant Professor, Faculty of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

<sup>3</sup> Associate Professor, Faculty of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

### HIGHLIGHTS

- Increasing hydrostatic pressure decreases the natural frequency.
- Effect of composite material on natural frequency of hybrid cylindrical shell.
- Generalized Differential Quadrature method

### GRAPHICAL ABSTRACT



### ARTICLE INFO

#### Article history:

Article Type: Research paper

Received: 29 February 2024

Received in revised form: 17 March 2024

Accepted: 11 May 2024

Available online: 18 June 2024

\*Correspondence: m.meskini@ssau.ac.ir

#### How to cite this article:

R. Mohammadi, M. Meskini, H. Mohammadkhanlo. Effect of hydrostatic pressure on the free vibrations of hybrid cylindrical shell. Journal of Aerospace Mechanics. 2024; 20(2):87-103.

#### Keywords:

Hydrostatic pressure

Free vibrations

First order shear deformation theory

Hybrid

Cylindrical shells

### ABSTRACT

Considering the increasing use of hybrid cylindrical shells in various industries, the free vibration analysis of these types of structures is very important. In this research, the free vibrations of the hybrid cylindrical shell under the influence of hydrostatic pressure have been analyzed and investigated. Investigating the hydrostatic pressure in hybrid shells is one of the important and required things for the optimal design of the structure, investigating the performance of the structure in different environmental conditions, bearing and resistance to pressure, etc. The boundary conditions for the cylindrical shell have been considered as fixed, free and simple, the equations governing the structure of the hybrid cylindrical shell are based on the displacement field and the stress and strain relations in matrix form using the first-order shear deformation theory of the shell and Hamilton's principle obtained and using generalized differential quadratic numerical method, the governing equations of the structure were solved and the effect of fiber angle, composite materials, hydrostatic pressure, composite to metal ratio, length to radius and thickness to radius of the cylinder on the natural frequency of the shell was investigated and analyzed. Numerical results have been compared and validated with the results of the research. The results show that the hybrid shell with the distribution of composite materials and in a specific volume ratio shows better behavior against different hydrostatic pressure.



## اثر فشار هیدرو استاتیک بر روی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای هیبریدی

رشید محمدی<sup>۱</sup>، محمد مسکینی<sup>۲\*</sup>، حشمت‌الله محمدخانلو<sup>۳</sup><sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

### برجسته‌ها

- افزایش فشار هیدرو استاتیک فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد.
- تأثیر ماده کامپوزیتی در فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هیبریدی
- روش دیفرانسیلی مربعات تعمیم‌یافته

### مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

بازنگری: ۱۴۰۲/۱۲/۲۷

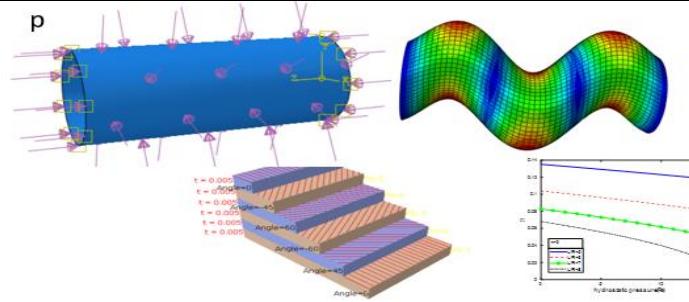
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۲۲

ارائه بخط: ۱۴۰۳/۰۳/۲۹

نویسنده مسئول:

m.meskini@ssau.ac.ir

کلیدواژه‌ها:  
فشار هیدرو استاتیک  
ارتعاشات آزاد  
ثواری تغییرشکل برشی مرتبه اول  
هیبرید  
پوسته‌های استوانه‌ای



### چکیده گرافیکی

### چکیده

با توجه به استفاده روزافزون از پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی در صنایع مختلف تحلیل ارتعاشات آزاد این نوع سازه‌ها دارای اهمیت زیادی می‌باشد. در این پژوهش، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) تحت تأثیر فشار هیدرو استاتیکی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. بررسی فشار هیدرو استاتیکی در پوسته‌های هیبریدی به عنوان یکی از موارد مهم و موردنیاز برای طراحی بهینه سازه، بررسی عملکرد سازه در شرایط مختلف محیطی، تحمل و مقاومت در برابر فشار و ... هست. هدف این تحقیق، بررسی تغییرشکل و رفتار سازه تحت فشار هیدرو استاتیکی مختلف است. شرایط مرزی را برای پوسته استوانه‌ای به صورت گیردار، آزاد و ساده در نظر گرفته شده است، معادلات حاکم بر ساختار پوسته استوانه‌ای هیبریدی بر اساس میدان جابجایی و روابط تنش و کرنش به صورت ماتریسی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها و اصل همیلتون به دست آمده و با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، معادلات حاکم بر سازه حل گردیده و تأثیر زاویه الیاف، مواد کامپوزیتی، فشار هیدرو استاتیکی، نسبت کامپوزیت به فلز، طول به شعاع و ضخامت به شعاع استوانه بر روی فرکانس طبیعی پوسته بررسی و تحلیل شده است. نتایج عددی با نتایج تحقیقات انجام شده موردم مقایسه و صحت سنجری قرار گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که پوسته هیبریدی با توزیع مواد مرکب و در نسبت حجمی خاص، رفتار بهتری در برابر فشار هیدرو استاتیکی مختلف نشان می‌دهد.



\* این مقاله یک مقاله با دسترسی آزاد است که تحت شرایط و ضوابط مجوز (CC BY-NC) Creative Commons Attribution Non-Commercial توزیع شده است.

نویسنده‌ان

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ره)

از روش انرژی استفاده کردند. آن‌ها اثر پارامترهایی از قبیل نسبت ارتفاع به عرض تقویت‌کننده‌ها، ضخامت پوسته و نسبت طول به شعاع پوسته را مورد مطالعه قراردادند. آن‌ها نشان دادند تقویت‌کننده‌ها فرکانس طبیعی پوسته‌های کامپوزیتی را افزایش می‌دهند. در سال ۱۹۹۸ سوزوکی، شیکانای و چینو [۵] بررسی‌های عددی بر روی مخازن استوانه‌ای با سطح مقطع متقاضان لمینت و اپوکسی تقویت‌شده در جهت بافت الیاف انجام دادند. با استفاده از روش مینیمم لاغرانژین فرکانس طبیعی، شکل مودها و توزیع گشتاور خمی را به دست آوردن و ویژگی‌های آن‌ها را موردنبررسی قراردادند. نگ و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۳ به بررسی کردن تأثیر پارامترهای مختلف بر روی ویژگی‌های فرکانس پوسته‌های مخروطی چندلایه کامپوزیتی پرداختند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که ویژگی‌های مواد کامپوزیتی تأثیر قابل توجهی بر ویژگی‌های فرکانسی دارد، که این تأثیر برای شماره مواد محیطی بزرگ‌تر، بیشتر اهمیت پیدا می‌کند. جعفری و باقری [۷] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک تقویت‌شده با رینگ را بررسی کردند که در آن فواصل بین رینگ‌ها و نیز خروج از مرکز آن‌ها متغیر بود. روش آن‌ها برای بهینه‌سازی مسئله غیریکنواخت پوسته‌های استوانه‌ای با ترکیبات شرایط مرزی مختلف مناسب بود. آن‌ها دریافتند با بهینه‌سازی مقادیر پارامترهای توزیع در تقویت‌کننده‌ها با جرم ثابت، فرکانس‌های طبیعی را می‌توان به طور قابل توجهی افزایش داد. از اولین فعالیت‌های تحقیقاتی در حوزه بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌های مشبك کامپوزیتی از نوع استوانه‌ای می‌توان به تحقیق گلمن [۸] در سال ۲۰۰۷ اشاره نمود. این محقق با محاسبه فرکانس طبیعی پوسته مشبك کامپوزیتی استوانه‌ای ساخته شده از الیاف کربن و رزین اپوکسی به بررسی پایداری دینامیکی این سازه با در نظر گرفتن خواص میرایی سازه پرداخت. گلمن خرابی مخزن سوخت را با نیروهای محاسبه شده از معادلات حرکتی که ضرایب میرایی و امتدادهای خطی ناشی از تغییرات بارهای ضربه‌ای را در برمی‌گیرد، پیش‌بینی کرد. در سال ۲۰۱۲ خلیلی و همکارانش [۹] به بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌های هیبریدی با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مرتبه بالا پرداختند. لانگ ژائو [۱۰] در

## ۱- مقدمه

پوسته‌های هیبریدی سازه‌هایی هستند که از ترکیب مواد مختلف با خواص متفاوت و با استفاده از ساختارهایی مانند پوسته شکل ساخته می‌شوند. این ساختارها عموماً از ترکیب مواد فلزی و غیرفلزی (مانند فیبرهای کربنی، فیبرهای شیشه‌ای یا مواد کامپوزیتی دیگر) تشکیل شده و هدف از آن‌ها بهبود خواص مکانیکی و سازگاری با محیط است. مزایای استفاده از پوسته‌های هیبریدی ترکیب و بهبود خواص مکانیکی، بهینه‌سازی وزن با حفظ مقاومت، انعطاف‌پذیری طراحی و ... است. پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی به دلیل خصوصیات مکانیکی، سبکی و مقاومت در برابر فشار، در صنایع متنوعی از جمله صنایع هواپضا، صنایع دفاعی، خودروسازی، خطوط لوله انتقال، صنایع دریایی، انرژی و... مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ردی ولیو [۱] با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییرشکل برشی، پوسته‌های چندلایه الاستیک را بررسی کردند، این تئوری حالت اصلاح شده تئوری پوسته سندرز است و توزیع سهمی‌وار کرنش برشی عرضی در سرتاسر ضخامت پوسته را در نظر می‌گیرد. نتایج بدست‌آمده نشان داد که نظریه مرتبه بالاتر از نظریه مرتبه اول دقیق‌تر است. در سال ۱۹۹۶ راند و استاووسکی [۲] پاسخ و فرکانس‌های ویژه را برای پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای دوراً و تحت شرایط مرزی مختلف موردنبررسی قراردادند. آن‌ها در تحقیقاتشان از تئوری تقریب لاو و روش گالرکین استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که سفتی محیطی یکی از مهم‌ترین عوامل در محاسبه فرکانس‌های طبیعی است. در سال ۱۹۹۸ لام و لوی [۳] اثر شرایط مرزی را بر یک پوسته استوانه‌ای دوراً جدار نازک موردنبررسی قراردادند. آن‌ها در پژوهش خود از تئوری لاو و روش گالرکین استفاده کردند و نتایج را با منابع دیگر تطبیق داده‌اند. پوسته موردمطالعه دارای آرایش لایه‌ای ۰ ۹۰ ۰ است. با افزایش تعداد موج‌های محیطی، فرکانس‌ها در شرایط مرزی مختلف به هم نزدیک می‌شوند، همچنین با افزایش موج‌های محیطی فرکانس‌ها ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابند. در سال ۱۹۹۸ لی و کیم [۴] ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای در حال چرخش با تقویت‌کننده‌های متعامد مورد تجزیه و تحلیل قراردادند، آن‌ها در تحقیقاتشان

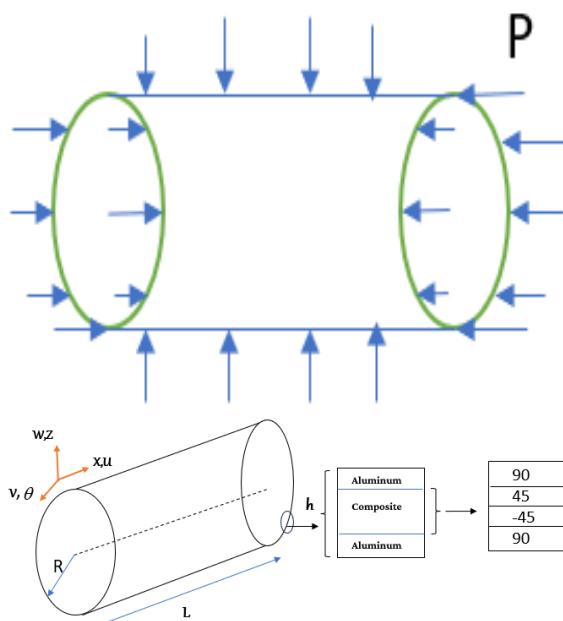
کاهش می‌یابد اما نسبت فرکانس غیرخطی به خطی افزایش می‌یابد. در مقابل، با افزایش سختی اولیه، فرکانس‌های طبیعی پنل‌ها افزایش می‌یابد اما نسبت فرکانس غیرخطی به خطی کاهش می‌یابد. کین و همکاران [۱۵] به تجزیه و تحلیل تأثیر شرایط مرزی، نیروی کوربولیس و اثر گریز از مرکز به وجود آمده توسط چرخش بر روی ویژگی‌های ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای پرداختند. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داد طول پوسته در مقایسه با ضخامت و شعاع بیرونی دیسک، تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی دارد، همچنین تغییرات سفتی فنرهای چرخشی کمترین تأثیر را بر مدهای متقارن دارد. لوباتین و همکارانش [۱۶] در سال ۲۰۱۷ با استفاده از تجزیه فوریه و روش گالرکین به بررسی یکراه حل تحلیلی برای مشکل کمانش برای یک پوسته استوانه‌ای مرکب که انتهای آن توسط دیسک‌های صلب بسته شده و تحت فشار هیدرو استاتیکی قرار گرفته پرداختند. کینی و همکارانش [۱۷] در سال ۲۰۱۸ با توجه به نظریه پوسته تغییرشکل برآمدۀ از پنل‌های مخروطی اول و نظریه دائل، فرکانس‌های طبیعی در پنل‌های مخروطی کامپوزیتی ساخته شده از ماتریس پلیمری تقویت شده یکنواخت را مورد تجزیه و تحلیل قراردادند. نتایج تحقیق نشان داد افزایش کسر حجمی CNT در پنل‌های مخروطی، فرکانس طبیعی آن را به دلیل سفتی بالاتر CNT‌ها در مقایسه با ماتریس پلیمری افزایش می‌دهد. در سال ۲۰۲۱ شن [۱۸] کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی کربن/اپوکسی تحت فشار هیدرو استاتیکی را مورد تحقیق و بررسی قرارداد. او با استفاده از روش گالرکین، فشار بحرانی، پاسخ کرنش و مسیر ترک را بررسی کرد. آن‌ها یک تفاوت نسبی  $\frac{3}{4}7\%$  بین فشار کمانش بحرانی محاسبه شده از تجزیه و تحلیل عددی و داده‌های تجربی مشاهده کردند. شاهگلیان و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۲۲ ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی ساندویچی با هسته شبکه را به صورت عددی و تجربی مورد بررسی و تحلیل قراردادند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد فرکانس طبیعی پوسته کامپوزیتی ساندویچی به ترتیب  $1/6$  و  $4/68$  برابر فرکانس طبیعی پوسته‌های تقویت شده و تقویت نشده است. جیانگ و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۲۳ بر روی ویژگی‌های

سال ۲۰۱۳ با استفاده از فرضیه لیروایز فرکانس‌های طبیعی و رفتارهای ارتعاشی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی را موردنرسی قراردادند و نتایج حاصله را با نتایج تحلیلی و تجربی مقایسه نمودند و با ترکیب روش‌های تحلیلی و تجربی به پیش‌بینی رفتار ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های چندلایه پرداختند. در سال ۲۰۱۴ همت نژاد و رحیمی [۱۱] ارتعاشات آزاد استوانه تقویت شده کامپوزیتی را بر مبنای تئوری تغییرشکل برآمدۀ اول موردمطالعه قراردادند. ایشان نتایج حل تحلیلی را با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار المان محدود اعتبارسنجی نموده‌اند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد به طور کلی فرکانس طبیعی پوسته تقویت شده بیشتر است، اما با افزایش ضخامت تأثیر تقویت کننده‌ها کاهش یافته و برای یک ضخامت مشخص، حضور تقویت کننده اثر چندانی روی فرکانس ندارد. در سال ۲۰۱۶ تیولو و همکاران [۱۲] به بررسی تغییرشکل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با سفتی متغیر پرداختند. آن‌ها در تحقیق خود برای دست‌یابی به مزیت‌های کامل تغییر سفتی پوسته‌ها با تغییر جهت گیری فیبرها، پاسخ آن‌ها به انواع مختلف بارگذاری‌های خارجی را موردنرسی قراردادند. آن‌ها دریافتند شرایط مرزی نیز نقش مهمی در توزیع تنش و رفتار تغییرشکل پوسته مخروطی بریده شده دارد، همچنین با یک لبه بریده ثابت، تنש کششی با دور شدن از لبه بریده افزایش می‌یابد. در سال ۲۰۱۷ زارعی و رحیمی [۱۳]، به بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های کامپوزیتی استوانه‌ای و مخروطی تحت شرایط مرزی مختلف پرداختند و معادلات مربوطه را بر مبنای تئوری استخراج نمودند. آن‌ها اثرات تغییرات پارامترهای هندسی را نیز بر فرکانس‌های طبیعی موردنرسی قراردادند. نتایج نشان داد که برای ضخامت‌های پایین فرکانس طبیعی سازه تقویت شده نسبت به سازه بدون تقویت کننده بیشتر است زیرا در ضخامت‌های پایین سرعت افزایش سفتی بیشتر از سرعت افزایش جرم سازه است. شن و یانگ [۱۴] در سال ۲۰۱۷ درباره تأثیر خواص گرادیان مواد، تغییرات دما، محتوای آب و پارامترهای هندسی پوسته بر روی ویژگی‌های ارتعاش آن تحقیق و بررسی انجام دادند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش دما، فرکانس‌های طبیعی پنل‌ها

طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتropیک با سایر مقالات و همچنین فرکانس طبیعی پوسته هیبریدی با نرمافزار المان محدود آباکوس صحه‌گذاری شده است، سپس اثر فشار هیدرو استاتیکی را در معادلات وارد کرده و تأثیر آن روی فرکانس طبیعی پوسته هیبریدی بررسی شده است.

## ۲- معادلات حاکم

پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز با مختصات استوانه‌ای در شکل ۱ نشان داده شده است. محورهای  $w$  و  $\theta$  به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی‌های طولی، محیطی و شعاعی در طول مختصات استوانه‌ای  $x$  و  $z$  می‌باشند. ماده تشکیل‌دهنده بخش کامپوزیتی از کربن/اپوکسی، شیشه/اپوکسی و آرامید/اپوکسی، همچنین قسمت فلزی از جنس آلومینیوم است که تحت فشار هیدرو استاتیکی قرار گرفته است.



شکل (۱): پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) تحت فشار هیدرو استاتیک.

## ۱-۲- میدان جابجایی

میدان جابجایی برای پوسته استوانه‌ای با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت معادله (۱) بیان می‌گردد.

ارتعاش-اکوستیک آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای چندلایه پر از مایع، تحت فشار هیدرو استاتیک اولیه پرداختند. آن‌ها از تئوری لاو برای به دست آوردن معادلات استفاده کردند. نتایج به دست‌نشان داد که شرایط مرزی و زاویه الیاف بر فرکانس طبیعی تأثیر دارند همچنین افزایش فشار هیدرو استاتیک داخلی باعث افزایش سفتی و فرکانس طبیعی می‌شود. در سال ۲۰۲۳ جی چو [۲۱] به تجزیه و تحلیل ارتعاشات پنل‌های استوانه‌ای متخلخل تقویت شده با صفحه‌های گرافن پرداخت. چو از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول با روش المان طبیعی استفاده کرد. او دریافت که ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای به‌طور قابل ملاحظه‌ای تحت تأثیر الگوی توزیع و تخلخل است. تائز کوسکن و همکاران [۲۲] به بررسی پاسخ ارتعاشی مodal و تصادفی با پروفیل‌های گنبدی تحت فشار داخلی  $50^{\circ}$ ،  $100^{\circ}$  و  $150^{\circ}$  بار به صورت عددی پرداختند و اثرات شدت فشار داخلی بر ویژگی‌های دینامیکی شناسایی شد. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد، شدت فشار داخلی فرکانس طبیعی به فرکانس‌های بالاتر منتقل می‌کند. منگ و همکاران [۲۳] در سال ۲۰۲۴ به بررسی عددی بر روی خواص ارتعاش آزاد و تصادفی پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم با استفاده از تئوری الاستیستیه سه‌بعدی پرداختند. آن‌ها از روش ریلی-ریتز استفاده کردند و صحت سنجی نتایج به‌دست‌آمده را با المان محدود مقایسه کردند. تأثیر ابعاد هندسی و خواص مواد را بر فرکانس‌های ذاتی و پاسخ‌های تصادفی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی سه‌بعدی بررسی کردند.

با توجه به پژوهش‌های انجام‌شده در سال‌های اخیر، کارهای تحقیقاتی در حوزه پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی متشكل از کامپوزیت - فلز عمدها به رفتار ارتعاشی بدون در نظر گرفتن تأثیر فشار هیدرو استاتیک بر روی فرکانس طبیعی است. در این پژوهش ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی با شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد تحت فشار هیدروستاتیک با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پوسته و روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته بررسی و تحلیل شده است که استخراج معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای هیبریدی با استفاده از اصل همیلتون انجام‌شده است. در ابتدا برای اطمینان از درستی نتایج فرکانس

با اضافه کردن مشخصات برشی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، روابط تنش و کرنش برای پوسته استوانهای به صورت رابطه (۴) است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ماتریس  $[\bar{Q}]$  همان ماتریس سختی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 & (5) \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q)m^2n^2 + \\ Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{16} &= -Q_{22}mn^3 + Q_{11}m^3n - (Q_{12} + \\ 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{26} &= -Q_{22}m^3n + Q_{11}mn^3 + (Q_{12} + \\ 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - \\ n^2)^2 \end{aligned}$$

و داریم:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} = \frac{\nu_{21}E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (6)$$

$G_{23}$  و  $E_2$  مدولهای الاستیسیته،  $G_{12}$  و  $E_1$  مدولهای برشی و  $\nu_{12}$  ضرایب پواسون هستند.

## ۲-۲- اصل همیلتون

برای استخراج معادلات حاکم و به دست آوردن شرایط مرزی از روش انرژی و اصل همیلتون [۲۵] استفاده می‌شود.

$$u(x, \theta, z) = u_0(x, \theta) + z\varphi_x \quad (1)$$

$$v(x, \theta, z) = v_0(x, \theta) + z\varphi_\theta$$

$$w(x, \theta, z) = w_0(x, \theta)$$

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varphi_\theta = \frac{\partial v}{\partial z}$$

که در آن  $u_0$  و  $v_0$  تغییر مکان‌های لایه میانی پوسته، موقعیت نقطه موردنظرسی نسبت به لایه میانی  $\varphi_x$  و  $\varphi_\theta$  چرخش حول محورهای  $x$  و  $\theta$  می‌باشد.

با داشتن میدان جابجایی برای پوسته در تئوری برشی مرتبه اول در دستگاه استوانهای (روابط ۱) و روابط سینماتیکی برای مؤلفه‌های میدان کرنش‌ها به صورت روابط (۲) است [۲۶]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x \quad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + zk_\theta$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^0 + zk_{x\theta}$$

$$\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz}^0$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \gamma_{\theta z}^0$$

در این روابط  $\varepsilon_x$  و  $\varepsilon_\theta$  به ترتیب، کرنش‌ها در جهت‌های محوری و محیطی و  $\varepsilon_{xz}$  و  $\varepsilon_{\theta z}$  کرنش‌های برشی در فاصله  $z$  از سطح میانی می‌باشند.  $\gamma_{x\theta}^0$ ،  $\gamma_{xz}^0$ ،  $\gamma_{\theta z}^0$  و  $\gamma_{xz}^0$  کرنش‌های سطح میانی و  $k_x$ ،  $k_\theta$  و  $k_{x\theta}$  انحناهای سطح میانی می‌باشند و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz}^0 = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z}^0 = \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \\ k_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ k_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \\ k_{x\theta} = \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} \end{cases} \quad (3)$$

که در این روابط  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب، مؤلفه‌های تغییر مکان لایه میانی پوسته در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند و  $\varphi_x$  و  $\varphi_\theta$  به ترتیب شبیه در صفحه  $x-z$  و شبیه در صفحه  $z-\theta$  می‌باشند.

$$\int \rho(1, z, z^2) dz = I_0, I_1, I_2 \quad (21)$$

که  $M, N$  و  $I$  به ترتیب نشان دهنده نیروی منتجه، ممان منتجه، نیروی برشی و ممان اینرسی بوده است،  $K_s$  بیانگر

ضریب تصحیح برشی بوده که برابر با مقدار  $5/6$  است. با قراردادن روابط جابجایی و روابط تنش-کرنش در معادلات تعادل روابط زیر به دست آمده است.

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + A_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ B_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) + A_{16} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \\ B_{16} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} \right) + B_{26} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + \\ A_{26} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + A_{66} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) + B_{66} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta \partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \\ I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + A_{26} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + B_{26} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + \\ A_{66} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + \\ A_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \right) + B_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + A_{22} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + B_{22} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right) + A_{44} k_s \left( \frac{1}{R} \varphi_\theta + \right. \\ \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} v \right) + A_{45} k_s \left( \frac{1}{R} \varphi_x + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \\ I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} A_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ A_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - A_{11} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A_{44} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \right. \\ \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - B_{11} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) - A_{12} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right. \\ \left. \frac{w}{R^2} \right) - B_{12} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) - A_{16} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\ B_{16} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} \right) + N_x^0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ N_\theta^0 \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + B_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ B_{16} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + D_{16} \left( \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + \\ B_{26} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta} \right) + D_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \\ + B_{66} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) + D_{66} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + D_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + A_{55} k_s \left( \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\ A_{45} k_s \left( \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \right) - I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \\ I_{02} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$B_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} + D_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta \partial x} + B_{22} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \right. \quad (26)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (7)$$

انرژی کرنشی [۲۶] و [۲۷] پوسته استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} R d\theta dx \quad (8)$$

$$\delta U = \int_v (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dv \quad (9)$$

انرژی جنبشی [۲۸] پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۱۰) است.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R dz dx d\theta \quad (10)$$

تغییرات انرژی جنبشی برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta T = \int_v \rho v \delta v dv = \int_v \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dv \quad (11)$$

با فرض اینکه فشار هیدرولیک استاتیک فشار یکنواخت وارد شده از طرف سیال به اطراف استوانه به مقدار  $p$  باشد، کار خارجی برای نیروهای وارد شده به استوانه به شکل زیر محاسبه می‌شود [۲۹].  $N_\theta^0$  نیروی شعاعی و  $N_x^0$  نیروی محوری است.

$$W_{\text{external}} = \frac{1}{2} N_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} N_\theta^0 \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \quad (12)$$

$$N_x^0 = \frac{-PR}{2}$$

$$N_\theta^0 = -PR$$

معادلات تعادل به دست آمده از اصل همیلتون:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} Q_{\theta z} = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + N_x^0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) +$$

$$N_{x\theta}^0 \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial v}{\partial dx} \right) + N_\theta^0 \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_{xz} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - Q_{\theta z} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \quad (17)$$

تمامی نیروها و ممان‌هایی که بر یک‌چند لایه استوانه‌ای وارد می‌شود، به صورت رابطه (۲۱) است.

$$\int \sigma_i dz = N_i, \quad (i = x, \theta, x\theta) \quad (18)$$

$$\int \sigma_i z dz = M_i, \quad (i = x, \theta, x\theta) \quad (19)$$

$$\int k_s \sigma_i dz = Q_i, \quad (i = xz, \theta z) \quad (20)$$

تابع نسبت به یک جهت مختصاتی به صورت مجموع وزنی مقادیر آن تابع در برخی نقاط مشخص استوار است.

$$f_x(x_i) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad (28)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

در رابطه  $f_x(x_i, t)$  مشتق تابع  $f$  نسبت به جهت مختصاتی  $x$  در نقطه  $x_i$  است و  $c_{ij}^{(1)}$  ضرایب وزنی برای تقریب مشتق اول هستند. نکته اساسی در این روش، نحوه تعیین ضرایب وزنی مناسب است. محققین مختلفی برای تعیین این ضرایب به شیوه مناسب تلاش کرده‌اند. بلمن و همکارانش [۳۰] با استفاده از دو تابع آزمون مختلف، دو شیوه برای تعیین این ضرایب پیشنهاد کردند که هر یک با مشکلاتی همراه بود. در سال ۲۰۱۱ بوجکارو و متونکو [۲۸] برای برطرف کردن این مشکلات، رابطه جدیدی برای ضرایب وزنی ارائه کردند، اما استفاده از این روش برای مشتقات مرتبه بالاتر با دشواری‌هایی همراه بود. شو با استفاده از تقریب چندجمله‌ای و آنالیز خطی فضای برداری روش مربعات تفاضلی را گسترش داده و روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته را ارائه کرد [۳۱]، وی با بکار گیری روش GDQ ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی را با استفاده از تئوری پوسته کلاسیک لاو مطالعه کرد [۳۲]. روشی که شو ارائه کرد، تمامی روش‌های قبل را شامل می‌شود. در روش GDQ که در کتاب شو آمده از توابع درون‌یابی لاغرانژ برای ضرایب وزنی و به دست آوردن رابطه بازگشتی، که از نقاط شبکه و محل قرارگیری نقاط نمونه مستقل است، استفاده می‌شود.

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}, & i \neq j \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)}, & i = j \end{cases} \quad (29)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

که در رابطه (۳۱) داریم:

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (30)$$

از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته می‌توان برای تقریب مشتق مرتبه بالاتر نیز استفاده کرد. برای مشتق مرتبه  $m$  تابع  $(x/f)^m$  در نقطه  $x_i$  به صورت رابطه (۳۳) (بیان می‌گردد).

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} |_{x=x_i} = \sum_{j=1}^M C_{ij}^{(m)} f(x_j) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big) + B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} D_{22} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right) + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + B_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & B_{26} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) + D_{26} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta \partial x} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + B_{66} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) - A_{55} k_s \left( \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - A_{44} k_s \left( \varphi_\theta + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \right) - I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

ضرایب  $c_{ij}$ ,  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  و  $C_{ij}$  در آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \int \bar{Q}_{ij} dz &= A_{ij} \\ \int z \bar{Q}_{ij} dz &= B_{ij} \\ \int z^2 \bar{Q}_{ij} dz &= D_{ij} \end{aligned} \quad (27)$$

شرطی مرزی مختلف برای پوسته استوانه‌ای در دو انتهای آن به صورت زیر از اصل همیلتون به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} V = W = N_x = M_x = M_{x\theta} &= 0 && \text{شرطی مرزی ساده} \\ N_x = N_{x\theta} = M_x = M_{x\theta} &= \varphi_{xz} && \text{شرطی مرزی آزاد} \\ &= 0 && \\ U = V = W = \varphi_x = \varphi_\theta &= 0 && \begin{array}{l} \text{شرطی مرزی} \\ \text{گیردار} \end{array} \end{aligned}$$

### ۳- روش حل معادلات (روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته)

در سال‌های اخیر روش مربعات دیفرانسیلی به دلیل دقت و نرخ همگرایی بالا مورد توجه پژوهشگران علوم مختلف قرار گرفته است. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته بر اساس آنالیز تقریب چندجمله‌ای مرتبه بالا و همچنین تجزیه و تحلیل فضای برداری خطی استوار است. ماهیت روش مربعات دیفرانسیلی مشتق جزئی تابع یکنواخت نسبت به متغیری هست که توسط مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده شده است. ضرایب وزنی مربوط به آن، به مسئله خاصی مربوط نیست و تنها به نقاط شبکه و مرتبه مشتق بستگی دارد. در این روش نقاط شبکه به صورت اختیاری و بدون هیچ محدودیتی انتخاب شده است. روش مربعات دیفرانسیلی، یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل جزئی است که علی‌رغم استفاده از تعداد گره کم، از دقت بالایی برخوردار است. اساس این روش بر تخمین مشتق جزئی یک

$$\begin{cases} u(x, \theta, t) = U(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ v(x, \theta, t) = V(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \\ w(x, \theta, t) = W(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \varphi_x(x, \theta, t) = \varphi_x(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \varphi_\theta(x, \theta, t) = \varphi_\theta(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \end{cases} \quad (35)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی پوسته و  $n$  شمارنده موج محیطی است.

### ۱-۴- گسسته سازی معادلات حرکت با استفاده از روش GDQM

می‌توان با جایگذاری روابط (۳۵) در روابط (۲۱) الی (۲۶) و استفاده از روش GDQM ماتریس K را به صورت روابط (۳۶) الی (۴۰) به دست آورد.

$$K_{11} = A_{11}U^{(2)} - A_{16}\frac{2n}{R}U^{(1)} - A_{66}\frac{n^2}{R^2}U + I_0\omega^2U \quad (36)$$

$$K_{12} = A_{12}\frac{n}{R}V^{(1)} + A_{16}V^{(2)} + A_{66}\frac{n}{R}V^{(1)} - A_{26}\frac{n^2}{R^2}V$$

$$K_{13} = A_{12}\frac{1}{R}W^{(1)} - A_{26}\frac{n}{R^2}W$$

$$K_{14} = B_{11}\varphi_x^{(2)} - B_{16}\frac{2n}{R}\varphi_x^{(1)} - B_{66}\frac{n^2}{R}\varphi_x + I_1\omega^2\varphi_x$$

$$K_{15} = B_{12}\frac{n}{R}\varphi_\theta^{(1)} + B_{16}\varphi_\theta^{(2)} + B_{66}\frac{n}{R}\varphi_\theta^{(1)} - B_{26}\frac{n^2}{R^2}\varphi_\theta$$

$$K_{21} = A_{16}U^{(2)} - A_{26}\frac{n^2}{R^2}U - A_{66}\frac{n}{R}U^{(1)} - A_{12}\frac{n}{R}U^{(1)} \quad (37)$$

$$K_{22} = A_{66}V^{(2)} - A_{26}\frac{2n}{R}V^{(1)} - A_{22}\frac{n^2}{R^2}V - A_{44}k_s\frac{1}{R^2}V + I_0\omega^2V$$

$$K_{23} = A_{26}\frac{1}{R}W^{(1)} - A_{22}\frac{n^2}{R}W - A_{44}k_s\frac{n}{R^2}W + A_{45}k_s\frac{1}{R}W$$

$$K_{24} = B_{16}\varphi_x^{(2)} - B_{26}\frac{n^2}{R^2}\varphi_x - B_{66}\frac{n}{R}\varphi_x^{(1)} - B_{12}\frac{n}{R}\varphi_x^{(1)} + A_{45}k_s\frac{1}{R}\varphi_x$$

$$K_{25} = B_{26}\frac{2n}{R}\varphi_\theta^{(1)} + B_{66}\varphi_\theta^{(2)} - B_{22}\frac{n^2}{R^2}\varphi_\theta + A_{55}k_s\frac{1}{R}\varphi_\theta + I_1\omega^2\varphi_\theta$$

$$K_{31} = -A_{12}\frac{1}{R}U^{(1)} - A_{26}\frac{n}{R^2}U \quad (38)$$

$$K_{32} = -A_{54}\frac{1}{R}V^{(1)} - A_{55}\frac{n}{R^2}V - A_{22}\frac{n}{R^2}V - A_{26}\frac{1}{R}V^{(1)}$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

که در آن  $C_{ij}$  ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه  $i$ ام،  $N$  تعداد نقاط شبکه و  $x_i$  مختصات نقطه  $i$ ام است.

رابطه کلی برای ضرایب وزنی تقریب مشتقات مرتب بالاتر مطابق رابطه (۳۲) است:

$$C_{ij}^{(n)} = \begin{cases} n \left( C_{ij}^{(1)} C_{ii}^{(n-1)} - \frac{C_{ii}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right), & i \neq j \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(n)}, & i = j \end{cases} \quad (32)$$

$$n = 2, 3, \dots, N-1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N;$$

با توجه به قانون مربعات رابطه (۳۱) ماتریسی به فرم رابطه (۳۳) است:

$$\{f(x)^n\}_j = [C^{(n)}] \{f(x)\}_j \quad (33)$$

هرچند انتخاب مختصات گرهها در این روش کاملاً اختیاری است و هیچ محدودیتی ندارد، اما نحوه توزیع گرهها بر پایداری نتایج و روند همگرایی آنها تأثیرگذار است. شو نشان داد که توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت یا همان چبیشف-گوس-لوباتو که به انحصار توزیع چبیشف نامیده می‌شود، نتایج پایدارتری نسبت به توزیع یکنواخت خواهد داشت. این توزیع با تعداد گرههای کم و محاسبات کمتر قادر است جواب‌هایی با دقت بیشتر به دست بیاورد. تراکم نقاط در این نوع توزیع (چبیشف-گوس-لوباتو) در نقاط نزدیک به مرزها بیشتر از نقاط میانی بوده و همگرایی در نقاط پایین‌تر اتفاق خواهد افتاد. همچنین در این تحقیق از تعداد نقاط ۱۵ در شبکه انتخابی صورت گرفته بدین علت است که در این تعداد نقاط، نتایج به دست آمده به همگرایی رسیده است و بعد از آن تغییراتی در نتایج به دست آمده وجود نداشته است. نقاط نمونه چبیشف-گوس-لوباتو شامل:

$$X_i = \frac{L}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right) \quad (34)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

در این مقاله توزیع نقاط چبیشف-گوس-لوباتو انتخاب شده و از روش GDQM استفاده شده است.

### ۴- حل معادلات پوسته استوانه‌ای با استفاده از روش GDQM

میدان جابجایی در پوسته استوانه‌ای بر اساس روش GDQM به صورت رابطه (۳۵) بیان می‌شود.

خواص مکانیکی آلومینیوم، شیشه/اپوکسی، آرامید/اپوکسی و کربن/اپوکسی در جدول ۱ آمده است.

### ۱-۵- اعتبارسنجی نتایج

برای اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، با استفاده از روش تحلیلی (متلب) در این پژوهش، ابتدا نتایج تحلیل ارتعاش آزاد سازه برای فرکانس بدون بعد ارتعاش آزاد  $\Omega = \omega R \sqrt{\frac{1 - v^2}{E}}$  که  $\omega$  فرکانس طبیعی سازه،  $v$  چگالی،  $E$  مدول الاستیسیته و  $\rho$  بیانگر ضریب پواسون سازه است را برای یک پوسته استوانهای ایزوتوپیک با شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد با مقالات چانگ [۳۳]، ارشد [۳۴]، وانگ [۳۵] و لوی [۳۶] در جدول ۲ و جدول ۳ آورده شده است، سپس نتایج حاصل با استفاده از روش حاضر برای فرکانس طبیعی پوسته استوانهای کامپوزیت-فلز ۴ لایه که لایه خارجی و لایه داخلی از جنس آلومینیوم و ۴ لایه میانی از جنس شیشه/اپوکسی با زوایای الیاف مختلف است را با نتایج به دست آمده از نرم افزار المان محدود (نرم افزار آباکوس) در جدول ۴ مقایسه گردیده است. لازم به توضیح است که در جدول ۲ مقدار مدول الاستیسیته برابر با ۷۰ گیگاپاسکال، ضریب پواسون طولی  $0.3/0$  و چگالی  $2700$  کیلوگرم بر مترمکعب است. در جدول ۳ نیز  $m=1$  است. آباکوس یک نرم افزار معتبر و قدرتمند در زمینه مدل سازی المان محدود برای تحلیل های استاتیکی و دینامیکی است. این نرم افزار امکان ایجاد مدل های پیچیده سازه ها، شبیه سازی، بارگذاری های مختلف و تحلیل نتایج به دقت بالا را فراهم می کند. ابتدا پوسته استوانهای هیبریدی شامل ۴ لایه شیشه/اپوکسی و ۲ لایه آلومینیوم را در نرم افزار آباکوس شبیه سازی کرده، سپس خواص مکانیکی هر لایه را به آن اختصاص داده و شرایط مرزی سازه را مشخص و سازه تحت فشار هیدرو استاتیک قرار داده شده است. با استفاده از المان های مربعی سازه را مش بندی کرده و با تحلیل استاتیکی فرکانس طبیعی سازه استخراج شده است. همان طور که مشاهده می شود تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده، سایر مراجع و المان محدود است. همچنین لایه چینی، شکل مود طولی اول، دوم و سوم پوسته

$$\begin{aligned}
K_{33} &= -A_{54} \frac{1}{R} W^{(1)} + A_{44} W^{(2)} - A_{55} \frac{n^2}{R^2} W - \\
&A_{22} \frac{1}{R} W - A_{54} \frac{1}{R} W^{(1)} + \frac{n^2 P}{R} W - \frac{P R}{2} W^{(2)} + \\
&I_0 \omega^2 W \\
K_{34} &= -A_{45} \frac{n}{R} \varphi_x + A_{44} \varphi_x^{(1)} - B_{12} \frac{1}{R} \varphi_x^{(1)} + \\
&B_{26} \frac{n}{R^2} \varphi_x \\
K_{35} &= A_{55} \frac{n}{R} \varphi_\theta - B_{22} \frac{n}{R^2} \varphi_\theta - B_{26} \frac{1}{R} \varphi_\theta^{(1)} + \\
&A_{54} \frac{n}{R} \varphi_\theta^{(1)} \\
K_{41} &= B_{11} U^{(2)} - B_{16} \frac{2n}{R} U^{(1)} - B_{66} \frac{n^2}{R^2} U - \\
&I_1 \omega^2 U \\
K_{42} &= B_{16} V^{(2)} + B_{12} \frac{n}{R} V^{(1)} - B_{26} \frac{n^2}{R^2} V + \\
&B_{66} \frac{n}{R} V^{(1)} + A_{45} k_s \frac{1}{R} V \\
K_{43} &= B_{12} \frac{1}{R} W^{(1)} - B_{26} \frac{n}{R^2} W + A_{45} k_s \frac{n}{R} W - \\
&A_{44} k_s W^{(1)} \\
K_{44} &= D_{11} \varphi_x^{(2)} - D_{16} \frac{2n}{R} \varphi_x^{(1)} - D_{66} \frac{n^2}{R^2} \varphi_x - \\
&A_{44} k_s \varphi_x + I_2 \omega^2 \varphi_x \\
K_{45} &= D_{12} \frac{n}{R} \varphi_\theta^{(1)} + D_{16} n \varphi_\theta^{(1)} - D_{26} \frac{n^2}{R^2} \varphi_\theta + \\
&D_{66} \frac{n^2}{R} \varphi_\theta - A_{45} k_s \varphi_\theta \\
K_{51} &= -B_{12} \frac{n}{R} U^{(1)} - B_{26} \frac{n^2}{R^2} U - B_{16} U^{(2)} - \\
&B_{66} \frac{n}{R} U^{(1)} \\
K_{52} &= -B_{22} \frac{n^2}{R^2} V + B_{26} \frac{2n}{R} V^{(1)} + B_{66} V^{(2)} - \\
&A_{55} \frac{1}{R} V + I_1 \omega^2 V \\
K_{53} &= -B_{22} \frac{n}{R^2} W - D_{22} \frac{n}{R^2} W + B_{66} \frac{1}{R} W^{(1)} + \\
&A_{55} \frac{n}{R} W - A_{45} W^{(1)} \\
K_{54} &= -D_{12} \frac{n}{R} \varphi_x^{(1)} - D_{26} \frac{n^2}{R^2} \varphi_x - D_{16} \varphi_x^{(2)} - \\
&D_{66} \frac{n}{R} \varphi_x^{(1)} - A_{45} \varphi_x \\
K_{55} &= -D_{22} \frac{n^2}{R^2} \varphi_\theta + D_{26} \frac{2n}{R} \varphi_\theta^{(1)} + D_{66} \varphi_\theta^{(2)} - \\
&A_{55} \varphi_\theta + I_2 \omega^2 \varphi_\theta
\end{aligned} \tag{۴۰}$$

در روابط بالا  $U^i, V^i, W^i, \varphi_\theta^i, \varphi_x^i$  مشتقات مرتبه (i) جابجا شده اند.

### ۵- نتایج

در این بخش ارتعاش آزاد پوسته کامپوزیت-فلز که دارای ۴ لایه کامپوزیت و ۲ لایه فلز هست مورد تحلیل و بررسی قرار می گیرد. جنس لایه فلزی از آلومینیوم و لایه های کامپوزیتی از شیشه/اپوکسی، آرامید/اپوکسی و کربن/اپوکسی می باشد.

استوانه‌ای کامپوزیت-فلز به روش المان محدود در شکل ۲ و شکل ۳ نشان داده شده است.

جدول (۱): خواص مکانیکی مواد استفاده شده در پوسته استوانه‌ای هیبریدی.

$\rho(\text{kg/m}^3)$	$v_x$	$G(\text{GPa})$	$E_y(\text{GPa})$	$E_x(\text{GPa})$	ماده
۲۷۰۰	۰/۳۳	۲۸	۷۲/۴	۷۲/۴	آلومینیوم
۱۸۰۰	۰/۲۶	۴/۱۴	۸/۲۷	۳۸/۶	شیشه/اپوکسی
۱۶۰۰	۰/۲۸	۷/۱۷	۱۰/۳	۱۸۱	کربن/اپوکسی
۱۴۶۰	۰/۲۴	۲/۳	۵/۵	۷۶	آرامید/اپوکسی

جدول (۲): مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد شده برای پوسته استوانه‌ای ایزوتربوپیک.

نتایج حاضر	چانگ [۳۳]	R/H	L/R	شرایط موزی	m	n
۰/۰۱۵۱۱	۰/۰۱۵۰۸	۵۰۰	۱۰	گیردار-گیردار	۱	۴
۰/۰۵۷۹۴	۰/۰۵۷۸۴	۲۰	۱۰	گیردار-گیردار	۱	۲
۰/۴۴۷۵	۰/۴۴۷۲	۵۰۰	۸/۶۷	آزاد-آزاد	۵	۲
۰/۳۵۸۵۶	۰/۳۵۸۵	۲۰	۵	آزاد-آزاد	۱	۱
۰/۳۰۸۱۷	۰/۳۰۷۹	۲۰	۵/۰۷	گیردار-آزاد	۳	۲
۰/۳۰۷۵	۰/۳۰۷۶	۲۰	۱.۱۴	گیردار-آزاد	۱	۲
۰/۳۰۸۴	۰/۳۰۸۱	۲۰	۲.۸۸	گیردار-آزاد	۲	۲
۰/۰۱۴۱۳	۰/۰۱۵۰۸	۵۰۰	۱۰	ساده-ساده	۱	۴

جدول (۳): مقایسه چهار فرکانس طبیعی اول برای پوسته استوانه‌ای ایزوتربوپیک.

گیردار-ساده L/R=20 , H/R=0.01		گیردار-گیردار L/R=20 , H/R=0.002		ساده-ساده L/R=20 , H/R=0.05	
لوی [۳۶]	نتایج حاضر	وانگ [۳۵]	نتایج حاضر	ارشد [۳۴]	نتایج حاضر n
۰/۰۲۳۹۷۴	۰/۰۲۴۲۴۷	۰/۰۳۴۰	۰/۰۳۳۳۵۱	۰/۰۱۶۱۰۶۳	۰/۰۱۶۱۳۲۳ ۱
۰/۰۱۱۲۲۵	۰/۰۱۱۴۵۷	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۱۹۷۷	۰/۰۳۹۲۲۳۲	۰/۰۳۹۲۶۴۸ ۲
۰/۰۲۲۳۱۰	۰/۰۲۲۳۴۴	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۷۲۴۷۶	۰/۱۰۹۴۷۷	۰/۱۰۹۴۱ ۳
۰/۰۴۲۱۳۹	۰/۰۴۲۱۳۷۱	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۹۰۵۹	۰/۲۰۹۰۰۸	۰/۲۰۹۰۰۸ ۴

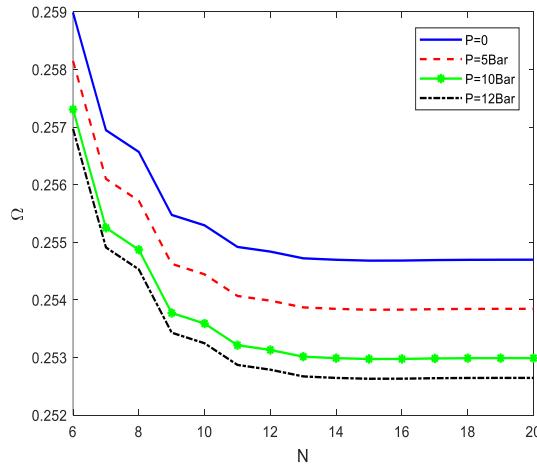
جدول (۴): مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت-فلز ۶ لایه با زاویه الیاف مختلف در شرایط گیردار-گیردار، روش المان محدود با روش تحلیلی (H/R=0.03 , L/R=5).

زاویه چینی الیاف کامپوزیتی	۹۰/۴۵/-۴۵/۹۰	۰/۹۰/۹۰/۰	۴۵/-۶۰/۶۰/-۴۵
المان محدود	نتایج حاضر المان محدود	المان محدود	نتایج حاضر المان محدود
۱۶۸۱/۸	۱۶۷۰/۵	۱۵۵۴/۵	۱۵۷۶/۴۸
۳۲۹۱/۶	۳۲۴۱/۴۱	۳۰۵۰/۸	۳۰۴۸/۹۸
۴۸۸۰/۳	۴۷۳۶/۶۸	۴۵۱۴/۹	۴۴۲۶/۰
N			۵۰۳۸/۴
			۴۸۵۲/۳۱

## ۵-۲- تأثیر فشار هیدرو استاتیک

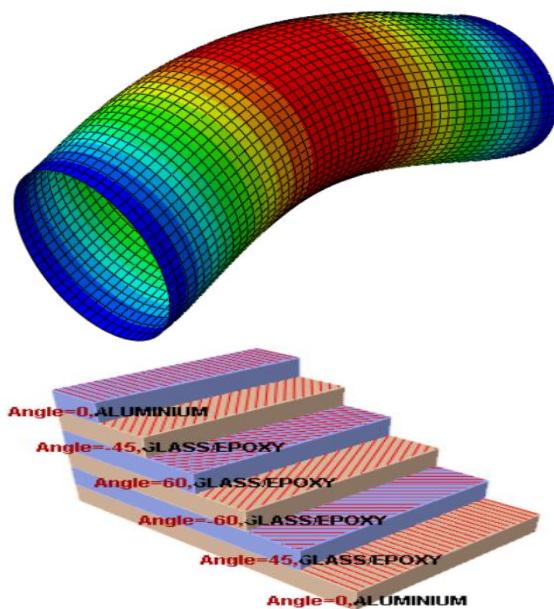
در طراحی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز از ۲ لایه آلومینیوم و ۴ لایه شیشه/پوکسی با زاویه الیاف [۰/۴۵/-۴۵/۹۰] که لایه‌های کامپوزیتی در وسط و لایه فلزی شامل لایه داخلی و خارجی هست استفاده شده است. کلیه نتایج در تحلیل ارتعاش آزاد سازه برای فرکانس طبیعی بدون بعد  $H/R=0.03$ ،  $L/R=5$ ،  $R=0.1\text{m}$ ،  $\Omega = \omega \times \sqrt{\frac{\rho \times H \times R^2}{A(1,1)}}$ ،  $P=5\text{Bar}$  به دست آمده، شرایط مرزی در ابتدا و انتهای سازه گیردار است. در مواردی که شرایط مرزی، فشار هیدرو استاتیک و یا هر کدام از ابعاد تغییر کرده در متن توضیح داده شده است.

در شکل ۴ تأثیر افزایش تعداد نقاط شبکه در همگرایی جواب بررسی شده است. با توجه به شکل با افزایش تعداد نقاط انتخابی شبکه نتایج به همگرایی خوبی رسیده است. همچنین با توجه به شکل تعداد نقاط شبکه انتخابی برای این پژوهش ۱۵ است.

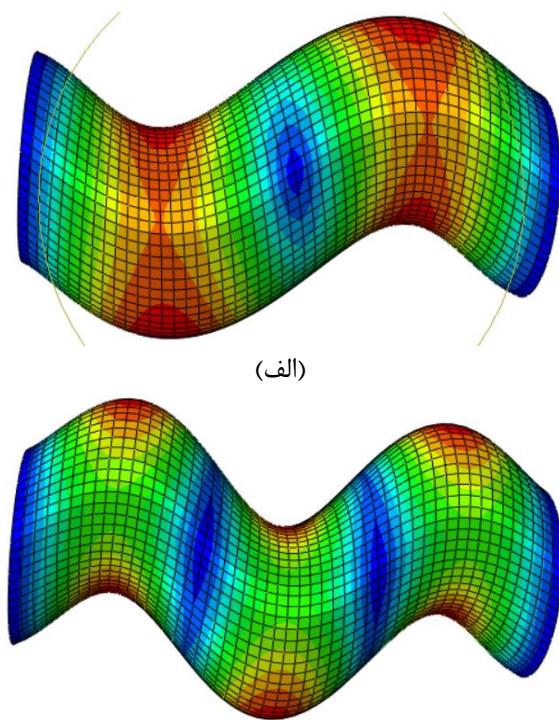


شکل (۴): تأثیر افزایش تعداد نقاط شبکه.

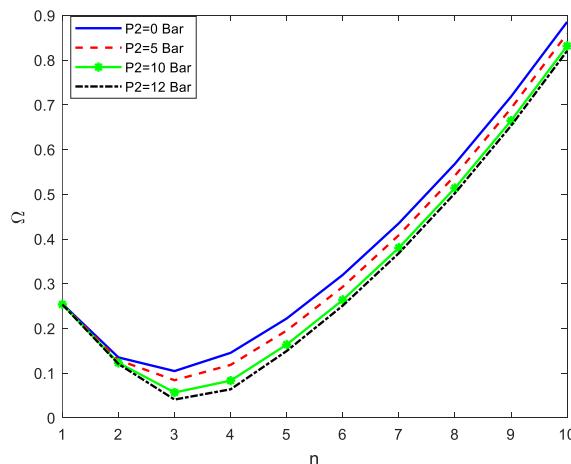
در شکل ۵ تأثیر فشار هیدرو استاتیک بر روی فرکانس طبیعی بی بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی به ازای نسبت طول به شعاع مختلف نشان داده شده است. در مورد پوسته استوانه‌ای هیبریدی با افزایش فشار هیدرو استاتیک فرکانس طبیعی کاهش می‌باید. افزایش فشار هیدرو استاتیکی باعث افزایش تنش‌ها در مواد سازه می‌شود که این تنش‌ها به ویژگی‌های مکانیکی سازه اثر می‌گذارند و باعث کاهش انعطاف‌پذیری و استحکام مواد سازه و درنتیجه



شکل (۲): شکل مود طولی اول پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز با زاویه چینی [۰/۶۰/-۶۰/۴۵].

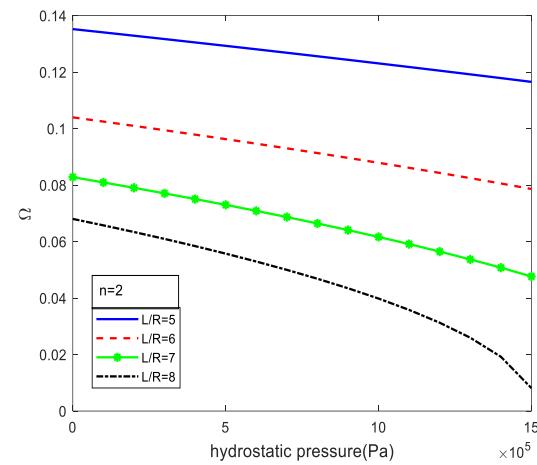


شکل (۳): شکل مود طولی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز با زاویه چینی [۰/۶۰/-۶۰/۴۵]: (الف) مود دوم؛ (ب) مود سوم.

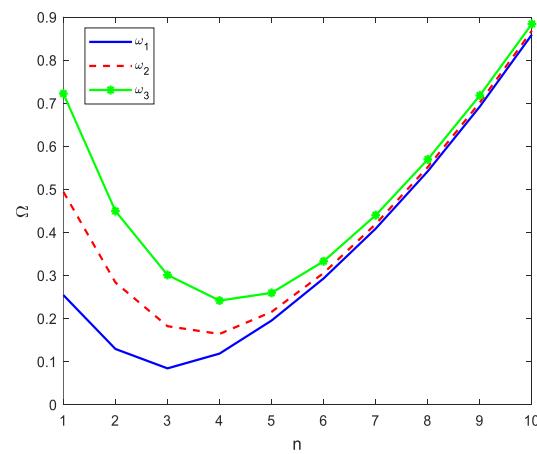


شکل (۷): تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد شده سازه بر حسب مود جانبی به ازای فشار هیدرو استاتیکی مختلف. این پدیده بهاین علت است که ابتدا برای تغییر شکل سازه نیروی کمتری نیاز است و در مودهای جانبی بالاتر از ۴ به نیروی بیشتری احتیاج است. با توجه به شکل ۳ با افزایش مود طولی فرکانس طبیعی بی بعد پوسته استوانهای هیبریدی افزایش می‌یابد. همچنین در شکل ۷ نشان داده شده با افزایش فشار هیدرو استاتیک، فرکانس طبیعی بی بعد شده کاهش بیشتری نسبت به فشارهای پایین‌تر دارد. همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود افزایش نسبت طول به شعاع، در ابتدا برای  $L/R < 4$  باعث کاهش ناگهانی فرکانس طبیعی بی بعد شده اما در ادامه کاهش کمتری پیدا می‌کند، همچنین برای مودهای جانبی بالاتر کاهش فرکانس طبیعی بی بعد شده کمتر است. درنتیجه تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد برای استوانه بلند کمتر از استوانه‌های کوتاه است. اثر نسبت ضخامت به شعاع در فرکانس طبیعی بی بعد شده در شکل ۹ نشان داده شده است. با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس طبیعی بی بعد سازه افزایش پیدا می‌کند. همچنین در نسبت طول به شعاع کمتر، فرکانس طبیعی بی بعد بیشتر می‌شود. درنتیجه در یک فشار ثابت، هرچقدر نسبت ضخامت به شعاع بیشتر و نسبت طول به شعاع کمتر باشد پایداری سازه بیشتر می‌شود. تأثیر مواد کامپوزیتی به کاررفته در سازه بر روی فرکانس طبیعی بی بعد سازه به ازای افزایش فشار هیدرو استاتیک،

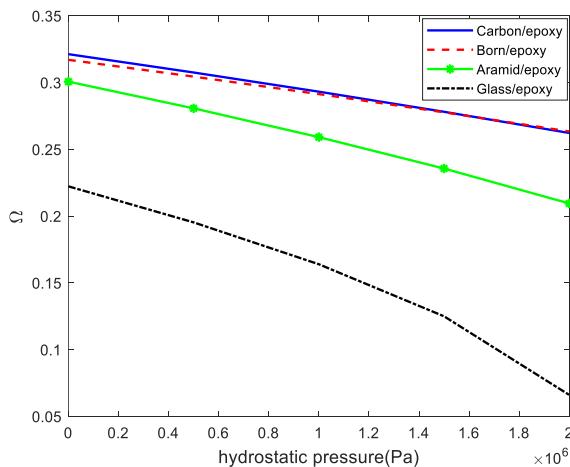
کاهش فرکانس طبیعی بی بعد سازه می‌شود. همچنین با توجه به شکل هر چه نسبت طول به شعاع بیشتر باشد تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد شده بیشتر تحت تأثیر افزایش فشار هیدرو استاتیک قرار می‌گیرد. با افزایش نسبت طول به شعاع فرکانس طبیعی بی بعد شده در فشار هیدرو استاتیک بالاتر کاهش بیشتری پیدا می‌کند. با توجه به شکل ۶ و شکل ۷ در مودهای جانبی  $n \leq 3$  فرکانس طبیعی بی بعد شده پوسته استوانهای هیبریدی کاهش می‌یابد و سپس در  $n > 4$  فرکانس طبیعی بی بعد شده افزایشی می‌شود.



شکل (۵): تأثیر افزایش فشار هیدرو استاتیکی بر روی فرکانس طبیعی بی بعد شده پوسته استوانهای هیبریدی به ازای نسبت طول به شعاع مختلف در مود جانبی دوم.



شکل (۶): تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد شده سازه بر حسب مود جانبی به ازای مود طولی اول، دوم و سوم.



شکل (۱۰): تأثیر افزایش فشار هیدرو استاتیک بر روی فرکانس طبیعی بی بعد شده به ازای الیافهای مختلف.

تأثیر شرایط مرزی مختلف بر روی فرکانس طبیعی بی بعد شده سازه در جدول ۵ نشان داده شده است. فرکانس طبیعی بی بعد در حالت دوسرگیردار نسبت به سایر حالت‌ها بیشتر است، این امر بیانگر این است که سفتی سازه در شرایط مرزی دوسرگیردار از دیگر حالت‌ها بیشتر و بالاتر است. همچنین با افزایش فشار کاوش فرکانس طبیعی بی بعد شده در حالت دوسرگیردار نسبت به حالت‌های دیگر کمتر است. بنابراین پوسته استوانه‌ای هیبریدی تحت فشار هیدرو استاتیک با شرایط مرزی گیردار-گیردار دارای بیشترین پایداری است.

جدول (۵): تأثیر شرایط مرزی در فشارهای مختلف بر روی

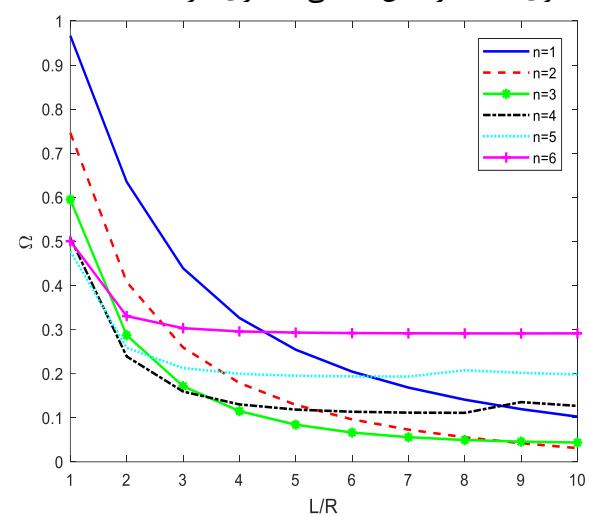
فرکانس طبیعی بی بعد شده

P=30Bar	P=10Bar	P=5Bar	P=0	شرایط مرزی
۰/۲۵۱۵	۰/۲۵۳۸	۰/۲۵۴۴	۰/۲۵۴۹	C-C
۰/۲۱۸۴	۰/۲۲۰۸	۰/۲۲۱۴	۰/۲۲۲۰	C-SS
۰/۱۸۸۲	۰/۱۹۰۹	۰/۱۹۱۶	۰/۱۹۲۲	SS-SS
۰/۰۶۷۹	۰/۰۷۴۳	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۷۳	C-F

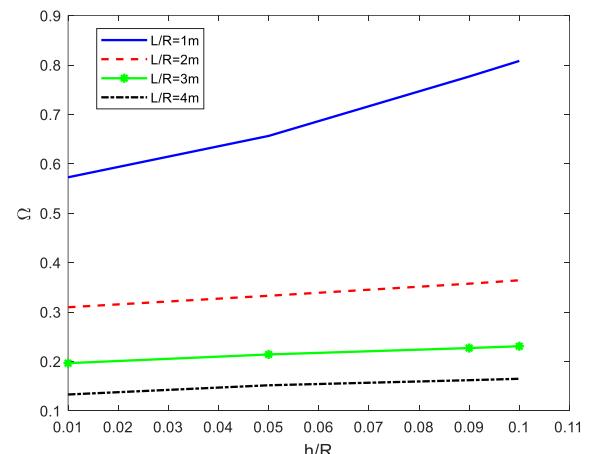
## ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز تحت تأثیر فشار هیدرو استاتیک، ضخامت، طول و شعاع متغیر، در شرایط مرزی مختلف بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روش

در شکل ۱۰ ترسیم شده است. در هر ۴ ماده کامپوزیتی با افزایش فشار هیدرو استاتیک، فرکانس طبیعی بی بعد کاهش می‌یابد. با توجه به شکل برای حالتی که کامپوزیت مورداستفاده در سازه هیبریدی کربن/اپوکسی می‌باشد، فرکانس طبیعی بی بعد از سایر مواد بیشتر است. مواد با سختی بالاتر، فرکانس طبیعی بالاتری دارند، یعنی سرعت انتقال انرژی و توانایی انطباق با ارتعاشات نسبت به مواد دیگر بیشتر است. به همین دلیل، کربن که دارای سختی بالاتری است، فرکانس طبیعی بیشتری دارد.



شکل (۸): تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی بر حسب مودهای جانبی به ازای نسبت طول به شعاع مختلف.



شکل (۹): تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی بر حسب نسبت ضخامت به شعاع به ازای نسبت طول به شعاع مختلف.

composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners. *Advances in Engineering Software*. 1999; 30(9–11): 649–655. DOI [https://doi.org/10.1016/S0965-9978\(98\)00115-X](https://doi.org/10.1016/S0965-9978(98)00115-X).

[5] Suzuki K, Shikanai G and Chino T. Vibrations of composite circular cylindrical vessels. *International journal of Solids and Structures*. 1998; 35(22): 2877–2899. DOI [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00356-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00356-9).

[6] Ng TY, Li H and Lam KY. Generalized differential quadrature for free vibration of rotating composite laminated conical shell with various boundary conditions. *International journal of Mechanical Sciences*. 2003; 45(3): 567–587. DOI [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00042-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00042-0).

[7] Jafari AA and Bagheri M. Free vibration of rotating ring stiffened cylindrical shells with non-uniform stiffener distribution. *Journal Sound and Vibration*. 2006. 296(1–2): 353–367. DOI <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.001>.

[8] Golfman Y and Sudbury MA. Dynamic stability of the lattice structures in the manufacturing of carbon fiber epoxy/composites including the influence of damping properties. *Journal of Advanced Materials*. 2007; 3:11–20.

[9] Khalili SMR, Davar A and Malekzadeh Fard K. Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory. *International journal of Mechanical Sciences*. 2012; 56(1): 1–25. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.002>.

[10] Zhao L and Wu J. Natural frequency and vibration modal analysis of composite laminated plate. *Advanced Materials Research*. 2013; 711: 396–400. DOI <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.711.396>.

[11] Hemmatnezhad M, Rahimi GH and Ansari R. On the free vibrations of grid-stiffened composite cylindrical shells. *Acta Mechanica*. 2014; 225(2): 609–623. DOI <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0976-1>.

[12] Tullu A, Ku TW and Kang BS. Elastic deformation of fiber-reinforced multi-layered composite conical shell of variable stiffness. *Composite Structures*. 2016; 154: 634–645. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.064>.

[13] Zarei M and Rahimi GH. Free vibration analysis of grid stiffened composite conical shells.

دیفرانسیلی مربوطات تعمیم یافته انجام شده است. نتایج نشان می‌دهند که:

(۱) با افزایش فشار هیدرو استاتیکی فرکانس طبیعی بی بعد کاهش پیدا می‌کند.

(۲) با افزایش مود جانبی فرکانس طبیعی بی بعد سازه ابتدا کاهش، سپس افزایشی می‌شود.

(۳) افزایش نسبت ضخامت به شعاع پوسته استوانه‌ای هیبریدی باعث افزایش فرکانس طبیعی بی بعد سازه می‌شود.

(۴) در شرایط مرزی گیردار-گیردار پوسته استوانه‌ای هیبریدی دارای بیشترین فرکانس طبیعی بی بعد شده است.

(۵) در حالتی که ماده کامپوزیتی پوسته استوانه‌ای هیبریدی از جنس کربن/اپوکسی باشد، سازه دارای بیشترین فرکانس طبیعی بی بعد است.

(۶) با افزایش مود طولی فرکانس طبیعی بی بعد سازه افزایش می‌یابد.

(۷) افزایش مقدار نسبت طول به شعاع همواره باعث کاهش فرکانس طبیعی بی بعد سازه می‌شود، که این کاهش فرکانس در ابتدا با شب تندتری شروع شده و در ادامه با شب کمتری ادامه پیدا می‌کند.

## ۷- مراجع

[1] Reddy JN and Liu CF. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International journal Engineering and Science*. 1985; 23(3): 319–330. DOI [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(85\)90051-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(85)90051-5).

[2] Rand O and Stavsky Y. Response and eigenfrequencies of rotating composite cylindrical shells. *Journal Sound and Vibration*. 1996; 192(1): 65–77. DOI <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0176>.

[3] Lam KY and Loy CT. Influence of boundary conditions for a thin laminated rotating cylindrical shell. *Composite Structures*. 1998; 41(3–4): 215–228. DOI [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00012-9](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00012-9).

[4] Lee YS and Kim YW. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating

- [22] Coskun T, Sahin OS. Modal and random vibration responses of composite overwrapped pressure vessels with various geodesic dome trajectories. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2024; 21:07316844241241567. DOI <https://doi.org/10.1177/07316844241241567>.
- [23] Meng S, Zhong R, Wang Q, Shi X, Qin B. Vibration characteristic analysis of three-dimensional sandwich cylindrical shell based on the Spectro-Geometric method. *Composite Structures*. 2024; 327:117661. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117661>.
- [24] Wang RT and Lin ZX. Vibration analysis of ring-stiffened cross-ply laminated cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*. 2006; 295(3–5): 964–987. DOI <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.061>.
- [25] Rao SS. *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, INC. 2007.
- [26] Donnell LH. Stability of thin-walled tubes under torsion. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. 1934 Feb 1;56(2):108. DOI <https://doi.org/10.1115/1.4019670>.
- [27] Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. 2008; ISBN:9780521883.
- [28] Bochkarev SA and Matveenko VP. Natural vibrations and stability of a stationary or rotating circular cylindrical shell containing a rotating fluid. *Computers & Structures*. 2011; 89(7–8): 571–580. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.12.016>.
- [29] Sun Z, Hu G, Nie X, Sun J. An analytical symplectic method for buckling of ring-stiffened graphene platelet-reinforced composite cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2022;10(12):1834. DOI <https://doi.org/10.3390/jmse10121834>.
- [30] Bellman R and Casti J. Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1971; 34(2): 235–238. DOI [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(71\)90110-7](https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90110-7).
- [31] Shu C. Differential quadrature and its application in engineering. Springer London. 2000.
- [32] Shu C and Du H. Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM. *Composites Part B: Engineering*. 1997; 28(3): Journal of Science and Technology of Composites. 2017; 4(1):1–8.
- [14] Shen HS, Xiang Y, Fan Y and Hui D. Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments. *Composites Part B: Engineering*. 2018; 136: 177–186. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.10.032>.
- [15] Qin Z, Yang Z, Zu J and Chu F. Free vibration analysis of rotating cylindrical shells coupled with moderately thick annular plates. *International journal of Mechanical Sciences*. 2018; 142–143: 127–139. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.04.044>.
- [16] Lopatin A. Buckling of composite cylindrical shells with rigid end disks under hydrostatic pressure .*Composite Structures*. 2017; 173: 136–143. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.109>.
- [17] Kiani Y, Dimitri R and Tornabene F. Free vibration study of composite conical panels reinforced with FG-CNTs. *Engineering Structures*. 2018; 172: 472–482. DOI <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.006>.
- [18] Shen KC and Pan G. Buckling and strain response of filament winding composite cylindrical shell subjected to hydrostatic pressure: numerical solution and experiment. *Composite Structures*. 2021; 276(2):114534. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114534>.
- [19] Shahgholian DS, Rahimi G, Zarei M and Salehipour H. Free vibration analyses of composite sandwich cylindrical shells with grid cores: experimental study and numerical simulation. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*.2022; 50(2): 687–706. DOI <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1725565>.
- [20] Wu JH, Liu RJ, Duan Y and Sun YD. Free and forced vibration of fluid-filled laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2023; 202:104925. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2023.104925>.
- [21] Cho JR. Free vibration analysis of functionally graded porous cylindrical panels reinforced with graphene platelets. *Nanomaterials*. 2023; 13(9): 1441. DOI <https://doi.org/10.3390/NANO13091441>.

267–274. DOI [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00052-2](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00052-2).

[33] Chung H. Free vibration analysis of circular cylindrical shells. Journal of sound and Vibration. 1981; 74(3): 331–350. DOI [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(81\)90303-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90303-5).

[34] Arshad S, Naeem MN, Sultana N, Shah AG and Iqbal ASZ. Vibration analysis of bi-layered FGM cylindrical shells. Archive of Applied Mechanics 2011;81:319-43. DOI <https://doi.org/10.1007/s00419-010-0409-8>.

[35] Wang Y and Wu D. Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory. Aerospace Science and Technology. 2017; 66: 83–91. DOI <https://doi.org/10.1016/J.AST.2017.03.003>.

[36] Loy CT, Lam KY and Shu C. Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature. Shock and Vibration. 1997; 4(3): 193–198. DOI <https://doi.org/10.3233/SAV-1997-4305>.