

Free Vibration Behavior of Three-skin Conical Shells with Composite Lattice Core Based on Semi-analytical and Finite Element Methods

Malihe Rahnema¹, Mohammad Morad Sheikhi ², Seyed Reza Hamzeloo ^{2*}

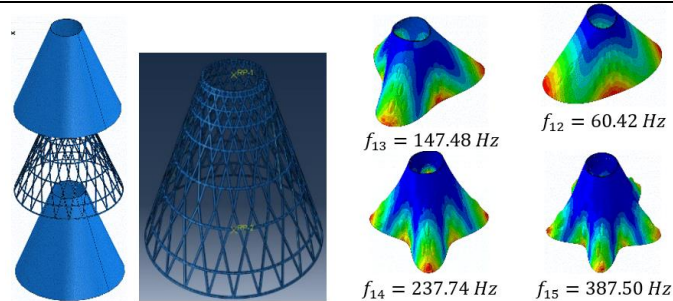
¹ Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

² Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- Free vibration analysis of sandwich conical shells is presented based on the semi-analytical and numerical methods.
- The closed-form solution of natural frequencies is developed for various boundary conditions.
- A comparison between the results of closed-form solution and ABAQUS FEM simulations is presented.

GRAPHICAL ABSTRACT



Three skin conical shell

Free vibration behavior

ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 1 March 2024

Received in revised form: 20 April 2024

Accepted: 25 April 2024

Available online: 6 May 2024

*Correspondence:

rehamzeloo@sru.ac.ir

How to cite this article:

M. Rahnema, M. Sheikhi, S.R. Hamzeloo. Free vibration behavior of three-skin conical shells with composite lattice core based on semi-analytical and finite element methods. Journal of Aerospace Mechanics. 2024; 20 (3):75-86.

Keywords:

Sandwich conical shell

Composite lattice core with hexagonal cells

Free vibration behavior

Classical Donnell's shell theory

ABSTRACT

In this paper, free vibration behavior of three-skin conical shells with arbitrary boundary conditions is studied based on semi-analytical and numerical methods. The three-layer shell consists of identical outer-inner composite face sheets and a lattice core with regular hexagonal cells made of composite helical and circumferential ribs. For this purpose, the dynamic equations along with the boundary conditions of such sandwich shells are derived using the equivalent stiffness method, Donnell's classic shell theory, and Hamilton's principle. The frequency equation is presented by solving the integral form of these governing equations based on the Galerkin method. The vibration mode shapes in the form of forward or backward waves in the circumferential direction and standing waves in the direction of the cone length (Euler-Bernoulli beam modal functions) are used in order to obtain natural frequencies. Also, ABAQUS FE simulations are carried out to verify the vibration behavior predicted by the Galerkin solution method. Finally, parametric studies are performed to investigate the effects of geometric dimensions and boundary conditions on the response quantities. Numerical results show that there is a very good agreement between the natural frequencies obtained by Galerkin and ABAQUS FE methods (i.e., the maximum difference in the results is less than 10%). Also, the effects of face sheet thickness and the rib width on the natural frequencies of three-layer composite lattice conical shell with different supports are significant.

This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution Non-Commercial (CC BY-NC) license.

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ساندویچی با هسته مشبک کامپوزیتی بر مبنای روش‌های نیمه تحلیلی گالرکین و المان محدود

ملیحه رهنما^۱، محمد مراد شیخی^۱، سید رضا حمزه‌لو^۲*

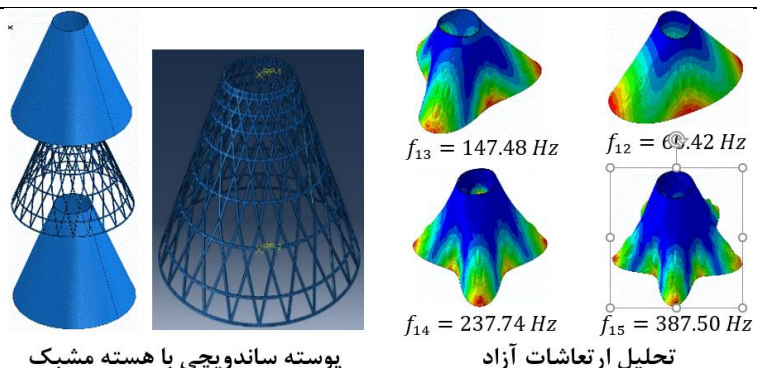
^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

برجسته‌ها

- استخراج معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی پوسته‌های مخروطی ساندویچی با هسته مشبک کامپوزیتی
- ارائه حل فرم بسته برای فرکانس‌های طبیعی برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف
- مقایسه بین نتایج حل نیمه‌تحلیلی و شبیه‌سازی المان محدود آباکوس

چکیده گرافیکی



پوسته ساندویچی با هسته مشبک

تحلیل ارتعاشات آزاد

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:
نوع مقاله: علمی پژوهشی
دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۱
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۰۱
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۰۶
ارائه برخط: ۱۴۰۳/۰۲/۱۷

*نویسنده مسئول:

rehamzeloo@sru.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

پوسته مخروطی ساندویچی
هسته مشبک کامپوزیتی با سلول‌های
شش ضلعی منتظم
تحلیل ارتعاشات آزاد
تئوری مهندسی پوسته

چکیده

در این پژوهش، رفتار ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ساندویچی با هسته مشبک و شرایط تکیه‌گاهی دلخواه بر مبنای روش‌های نیمه-تحلیلی و عددی مورد مطالعه قرار گرفته شده‌اند. پوسته با لایه‌چینی متقارن شامل رویه‌های همسان بیرونی-درونی کامپوزیتی و یک هسته مشبک با سلول‌های شش ضلعی منتظم ساخته شده از ریب‌های هلیکال و محیطی کامپوزیتی مشابه در نظر گرفته شده است. بدین منظور، ابتدا معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشاتی به همراه شرایط مرزی چنین پوسته مخروطی ساندویچی ناقص با استفاده از روش سفتی معادل، تئوری پوسته دائل کلاسیک و اصل همیلتون استخراج می‌گردد. سپس معادله مقدار-ویژه فرکانسی با استفاده از روش گالرکین به همراه شکل مودهای ارتعاشاتی برای شرایط مرزی دلخواه ارائه می‌شود. همچنین به منظور مقایسه با نتایج حل نیمه-تحلیلی، شبیه‌سازی‌های عددی بر مبنای نرم‌افزار المان محدود آباکوس انجام پذیرفته است. سرانجام مطالعات پارامتریک برای بررسی اثرات ابعاد هندسی و شرایط تکیه‌گاهی بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشاتی انجام می‌پذیرد. نتایج عددی نشان می‌دهد بین نتایج تطابق خوبی وجود دارد که ماکزیمم اختلاف کمتر از ۸٪ می‌باشد. همچنین تغییرات فرکانس‌های ارتعاشات با مقادیر پارامترهای هندسی نظیر ضخامت رویه‌ها و عرض سطح مقطع ریب‌های هسته قابل توجه و وابسته به شرایط تکیه‌گاهی می‌باشد.

۱- مقدمه

پوسته‌های ساندویچی با توجه به نسبت بالای سفتی یا استحکام به وزن و قابلیت تحمل بار قابل توجه و تغییر شکل‌های کوچک به عنوان یکی از مهم‌ترین اجزای سازه‌های مهندسی در صنایع مختلف نظیر هوافضا، دریایی و عمران به صورت گسترده بکار برده می‌شوند [۱-۳]. در بسیاری از چنین کاربردهایی، پوسته‌های ساندویچی از سه جزء شامل دو رویه بیرونی-درونی برای تحمل بارهای جانبی و یک هسته میانی جهت افزایش مقاومت کمانشی و ضربه تشکیل می‌شوند. امروزه با گسترش تکنولوژی ساخت مواد پیشرفته، استفاده از انواع مختلف فایبرها، پارچه‌ها و ورق‌های کامپوزیتی در تولید اجزای مختلف ساختارهای ساندویچی به سرعت در حال افزایش می‌باشد [۱-۳]. ساختارهای سلولی مشبک یکی از پرکاربردترین هسته‌های سبک میانی می‌باشد که در تولید آن‌ها از الیاف (ریب‌ها) فلزی یا کامپوزیتی برای ایجاد شبکه‌بندی‌های منتظم استفاده می‌شود [۱]. یا به عبارت دیگر، یک سازه مرکب شبکه‌ای با آرایش منتظم از المان‌های تیر که به یکدیگر متصل شده‌اند که یک محیط پیوسته صفحه‌ای (دوبعدی) یا فضایی (سه‌بعدی) را تشکیل می‌دهند. در اکثر موارد، از دو دسته ریب زاویه‌دار (مقاطع) با سطح مقطع و جنس ماده مشابه برای بهینه‌سازی هم‌زمان وزن و افزایش استحکام در راستای دلخواه بکار برده می‌شوند؛ بنابراین، ساختارهای مشبک در مقایسه با لایه‌های همگن و کامپوزیتی کلاسیک دارای نسبت کمتری از وزن به استحکام و قابلیت تحمل بار می‌باشد که علاوه بر کاهش مواد مصرفی و هزینه‌ها، آن‌ها را مناسب برای استفاده در کاربردهایی که تحت نیروهای اینرسی می‌باشند، می‌نمایند. علاوه بر این ویژگی‌ها، باید به‌به این نکته اشاره نمود که ساختارهای مشبک دارای قابلیت بالای جذب انرژی و عایق حرارتی می‌باشند.

بررسی ادبیات موضوعی بیانگر این می‌باشد که در دهه گذشته توجه بسیاری از پژوهشگران به مطالعه رفتار کمانشی و ارتعاشاتی ساختارهای ساندویچی با هسته مشبک بر مبنای روش‌های تئوری و تجربی جلب شده است. در این زمینه، شاتاو و همکاران [۴]، رفتار کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی کامپوزیتی با هسته‌های غیر همسانگرد مشبک و

تحت فشار هیدرواستاتیک با استفاده از روش اجزای محدود و تئوری کلاسیک پوسته بررسی کردند. زارعی و همکاران [۵]، تحلیل کمانشی پوسته‌های مخروطی ساندویچی چندلایه با هسته تقویت‌شده مشبک را بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و روش سفتی معادل ارائه دادند. یانگ و همکاران [۶]، آسیب‌پذیری مبتنی بر رفتار ارتعاشاتی پل‌های ساندویچی کامپوزیتی با هسته‌های مشبک کربنی موج‌دار را با استفاده از روش‌های تجربی و اجزای محدود موردبررسی قرار دادند. شاهقلیان و همکاران [۷]، به بررسی رفتار ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی کامپوزیتی با هسته‌های مشبک بر مبنای روش تجربی و شبیه‌سازی عددی پرداخته‌اند. زارعی و همکاران رفتار ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی ساندویچی مشبک با سلول‌های لوزی شکل را مورد مطالعه قرار دادند [۸]. عالی‌نیا تأثیر هسته آگزتیک بر ارتعاش پوسته ساندویچی مخروطی را تحت شرایط مرزی مختلف بررسی نمود [۹]. رحیمی و همکاران تأثیر ضخامت‌های متغیر پوسته بر رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی ساندویچی مرکب را مطالعه نمودند [۱۰]. نظری و همکاران [۱۱]، بر اساس روش‌های تجربی و عددی رفتار ارتعاشاتی پوسته‌های کامپوزیتی فلز و الیاف تقویت‌شده با هسته مشبک مورد مطالعه قرار دادند. شاهقلیان و همکاران [۱۲]، کمانش پوسته‌های ساندویچی کامپوزیتی با هسته ایزوگرید تحت فشار خارجی یکنواخت را به صورت تحلیلی بررسی نمودند. کارتون و همکاران [۱۳]، مدل‌های اجزای محدود بر مبنای تئوری‌های تیموشنکو و اوپلر-برنولی برای تیرهای ساندویچی با هسته مشبک ارائه دادند. لی و همکاران [۱۴]، پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته مشبک لانه‌زنبوری تحت ضربه با سرعت پایین را با استفاده از روش عددی ارائه دادند. زارعی و رحیمی [۱۵]، فشار خارجی بحرانی برای کمانش پوسته‌های متصل شده استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی با هسته مشبک بر اساس تئوری مرتبه اول برشی لاو و روش اجزای محدود به دست آوردند.

این مرور مختصر بر ادبیات موضوعی نشان می‌دهد که مطالعات بسیار محدودی به بررسی رفتار مکانیکی پوسته‌های مخروطی ناقص ساندویچی با هسته مشبک پرداخته‌اند. همچنین تاکنون رفتار ارتعاشات آزاد چنین سازه‌ای

$$u_x = u(x, \theta, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, u_y = v(y, \theta, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (۱)$$

$$u_z = w(x, \theta, t)$$

که در رابطه (۱)، u و v به ترتیب جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای در راستای x و y نشان می‌دهند و w خیز جانبی می‌باشد. با جایگذاری بردار جابه‌جایی در روابط کرنش-جابه‌جایی با فرضیات تئوری دائل، مؤلفه‌های کرنش به صورت ذیل حاصل می‌شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - z \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \alpha}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (۲)$$

انرژی کرنشی برای یک پوسته مخروطی ناقص ساندویچی سه‌جزئی بر مبنای تئوری دائل کلاسیک به صورت ذیل محاسبه می‌گردد [۱۶]:

$$\begin{aligned} U &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^L \left\{ -R(x) M_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_{yy} \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{M_{yy}}{R(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + 2M_{xy} \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + R(x) N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + N_{yy} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + N_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + R(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} dx d\theta \end{aligned} \quad (۳)$$

که نتیجه‌های تنش به صورت ذیل تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$(N_{ij}, M_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(1, z) dz \quad (۴)$$

با انجام دو بار انتگرال جزء‌به‌جزء، تغییرات انرژی کرنشی در معادله (۳) به فرم ذیل بازنویسی می‌گردد:

$$\delta U = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^L \delta U^{\text{int}} dx d\theta + \left[\int_{y=-\pi}^{y=\pi} \delta U^{\text{bound}} d\theta \right]_{x=0}^{x=L} \quad (۵)$$

ساخته‌شده از لایه‌ها و فایبرهای کامپوزیتی بررسی نشده است.

در این مطالعه برای اولین بار، مشخصه‌های مودال شامل: فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های پوسته‌های مشبک مخروطی ساندویچی سه‌جزئی با استفاده از روش‌های تحلیلی و حل عددی ارائه خواهند شد. بدین منظور، ابتدا معادلات حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشاتی چنین پوسته‌های ساندویچی بر اساس تئوری دائل کلاسیک و اصل همیلتون استخراج می‌گردد. در ادامه، با استفاده از روش حل گالرکین حل تحلیلی فرم بسته‌ای برای فرکانس‌های طبیعی بر مبنای تکنیک سفتی-جرم ارائه می‌شود. همچنین برای افزایش اعتبار روش نیمه‌تحلیلی، علاوه بر صحت سنجی و مقایسه با نتایج تجربی در حالت آزاد، مدل‌های اجزای محدودی در قالب شبیه‌سازی عددی در شرایط تکیه‌گاهی مختلف با کمک نرم‌افزار آباکوس فراهم شده‌اند. سرانجام، مطالعات پارامتریک متعددی برای بحث و بررسی اثرات ابعاد هندسی و شرایط تکیه‌گاهی بر روی نتایج عددی (شامل: فرکانس‌های طبیعی و کانتورهای شکل مودها) حاصل از اجزای محدود آباکوس و حل فرم بسته انجام می‌پذیرد.

۲- فرمولاسیون تئوری

مطابق با شکل ۱، پوسته مخروطی ناقص با طول یال مخروط L ، شعاع سطح میانی در دو انتها (R_L, R_0) و ضخامت کل h را در نظر بگیرید. یک سیستم مختصات منحنی الخط متعامد روی سطح میانی قرار دارد که به ترتیب نشان‌دهنده جهت در امتداد یال مخروط، راستای محیطی و ضخامت پوسته مخروطی می‌باشند. با توجه به شکل ۱، به‌آسانی می‌توان شعاع متوسط در هر سطح مقطع میانی، زاویه نیم رأس مخروط و مختصات محیطی را به صورت $R(x) = R_0 + x \sin \alpha$ و $\alpha = \sin^{-1}(R_L - R_0/L)$ و $y = R(x)\theta$ تعریف نمود.

۲-۱- معادلات حاکم

بر اساس تئوری پوسته دائل کلاسیک، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت ذیل معرفی می‌گردند [۱۶]:

خمشی ساندویچ سه جزئی متقارن با روابط (۱۰) و (۱۱) تعریف می‌شوند:

$$[N_{xx}, N_{yy}] \quad (۸)$$

$$= [A_{11}(x), A_{12}(x)] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} [A_{12}(x), A_{22}(x)] \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \cos \alpha w \right) \\ N_{xy} = A_{66}(x) \left[\frac{1}{R(x)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ [M_{xx}, M_{yy}] \quad (۹)$$

$$= -[D_{11}(x), D_{12}(x)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - [D_{12}(x), D_{22}(x)] \left[\frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ M_{xy} = -2D_{66}(x) \left[\frac{1}{R(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{R^2(x)} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]$$

$$A_{ij}(x) = 2Q_{ij}^{(f)} t_f + Q_{ij}^{(c)}(x) t_{rip} \quad (۱۰)$$

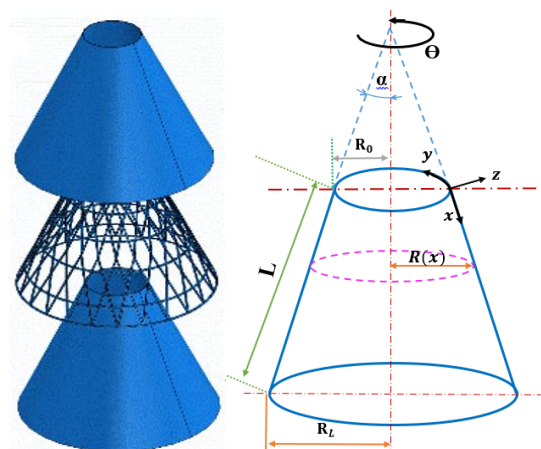
$$D_{ij}(x) = \frac{2}{3} Q_{ij}^{(f)} [(t_f + t_{rip}/2)^3 - (t_{rip}/2)^3] + \frac{1}{12} Q_{ij}^{(c)}(x) (t_{rip})^3$$

$$B_{ij}(x) = \int_{t_{rip}/2}^{t_f+t_{rip}/2} Q_{ij}^{(f)} z dz + \int_{-t_{rip}/2}^{t_{rip}/2} Q_{ij}^{(c)}(x) z dz + \int_{-(t_f+t_{rip}/2)}^{-t_{rip}/2} Q_{ij}^{(f)} z dz = 0 \quad (۱۱)$$

که $Q_{ij}^{(f)}$ و $Q_{ij}^{(c)}$ به ترتیب مؤلفه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته رویه‌ها مشابه و هسته مشبک می‌باشد، با استفاده از روش سفتی معادل در قالب تعادل نیرویی برای یک سلول از مخروط ناقص مشبک [۱۷]، مؤلفه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$Q_{11}^{(c)}(x) = 2 \frac{E_{rip} A_{rip}}{a_h(x) t_{rip}} \cos^4 \varphi_h(x) \quad (۱۲)$$

$$Q_{12}^{(c)}(x) = Q_{66}^{(c)}(x) = 2 \frac{E_{rip} A_{rip}}{a_h(x) t_{rip}} \sin^2 \varphi_h(x) \cos^2 \varphi_h(x)$$



شکل (۱): ابعاد هندسی و سیستم مختصات برای یک پوسته مخروطی ساندویچی با هسته مشبک کامپوزیتی.

که

$$\delta U^{int} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (R(x) N_{xx}) + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \theta} \right] \delta u - \left[\frac{\partial N_{yy}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x} (R(x) N_{xy}) \right] \delta v - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (R(x) M_{xx}) - \frac{\partial M_{yy}}{\partial x} \sin \alpha + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} - 2 \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial M_{xy}}{\partial \theta} - N_{yy} \cos \alpha \right] \delta w \quad (۶)$$

$$\delta U^{bound} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (R(x) M_{xx}) - M_{yy} \sin \alpha + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial \theta} \right] \delta w - (R(x) M_{xx}) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + R(x) N_{xx} \delta u + N_{xy} R(x) \delta v \quad (۷)$$

که با جایگذاری روابط کرنش (۲) در معادلات ساختاری در حالت تنش صفحه‌ای برای رویه‌ها و هسته مشبک با رفتار ارتوتروپیک $\{\sigma_{ij}\}^{(k)} = [Q_{ij}]^{(k)} \{\varepsilon_{ij}\}^{(k)}$ for $k = f, c$ مؤلفه‌های تنش به دست می‌آید [۱۶] و سپس با جایگذاری آن‌ها در رابطه (۴) برای منته‌های تنش خواهیم داشت که ضرایب سفتی معادل برای رفتار تغییر شکل داخل صفحه‌ای و

$$\begin{aligned} \delta w: \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R(x)M_{xx}) - \frac{\partial M_{yy}}{\partial x} \sin \alpha &+ \frac{1}{R(x)} \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial \theta^2} \\ &+ 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} \\ &- 2 \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial M_{xy}}{\partial \theta} \\ &- N_{yy} \cos \alpha - I_0(x) \ddot{w} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} [I_2(x) \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}] \\ &+ \frac{I_2(x)}{R^2(x)} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \theta^2} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

همچنین شرایط مرزی در دو انتهای پوسته ($x = 0, L$) به صورت چهار زوج مرتب ذیل بیان می‌شوند:

$$(N_{xy} = 0 \text{ or } v = 0)$$

$$(N_{xx} = 0 \text{ or } u = 0)$$

$$(M_{xx} = 0 \text{ or } \frac{\partial w}{\partial x} = 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [R(x)M_{xx}] - M_{xy} \sin \alpha + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial \theta} = 0 \text{ or } w = 0$$

با جایگذاری منته‌های تنش از روابط (۸) و (۹) در معادلات (۱۷-۱۵) خواهیم داشت:

$$\delta u: \frac{\partial}{\partial x} \left[R(x)A_{11}(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &+ A_{12}(x) \cos \alpha w + A_{12}(x) \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &+ \frac{A_{66}(x)}{R(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + A_{66}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - I_0(x) \ddot{u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\delta v: \frac{\partial}{\partial x} \left[A_{66}(x) \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + R(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right] \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &+ A_{12}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \\ &+ \frac{A_{22}(x)}{R(x)} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right. \\ &\left. + \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] - I_0(x) \ddot{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta w: \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[R D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{D_{12}}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ + \sin \alpha \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_{12} \frac{\partial w}{\partial x}) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} (D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$Q_{22}^{(c)}(x) = \frac{E_{rip} A_{rip}}{a_h(x) t_{rip}} \left[2 \sin^4 \varphi_h(x) + \frac{a_h(x)}{a_c(x)} \right]$$

که در رابطه (۱۲)، پارامترهای E_{rip} ، A_{rip} و t_{rip} به ترتیب نشان‌دهنده مدول الاستیسیته، سطح مقطع و ضخامت ریب کامپوزیتی می‌باشند. همچنین $\varphi_h(x)$ ، $a_h(x)$ و $a_c(x)$ به ترتیب بیانگر زاویه هلیکال و فاصله بین ریب‌های هلیکال و محیطی می‌باشند [۱۷]. بر طبق مؤلفه‌های جابه‌جایی در رابطه (۱)، تغییرات انرژی جنبشی برای چنین پوسته‌های ساندویچی به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta T &= - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^L I_0(x) \left[\begin{aligned} &\ddot{u} \delta u \\ &+ \ddot{v} \delta v \\ &+ \ddot{w} \delta w \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\begin{aligned} &\dot{u} \delta u \\ &+ \dot{v} \delta v \\ &+ \dot{w} \delta w \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] dx d\theta \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^L \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[I_2(x) \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right] \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{I_2(x)}{R^2(x)} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \theta^2} \right] \delta w - I_2(x) \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \theta^2} \right) \delta w \right] \right\} dx d\theta \\ &- \int_{-\pi}^{\pi} I_2(x) \left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta w \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta w \right) \right] d\theta \Big|_{x=0,L} \end{aligned} \quad (13)$$

که ممان اینرسی‌های جرمی به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} I_0(x) &= R(x) [2\rho^{(f)} t_f + \rho^{(c)} t_{rip}] \\ I_2(x) &= R(x) \left[\frac{2}{3} \rho^{(f)} [(t_f + t_{rip}/2)^3 \right. \\ &\quad \left. - (t_{rip} \right. \\ &\quad \left. /2)^3] + \frac{1}{12} \rho^{(c)} (t_{rip})^3 \right] \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری تغییرات انرژی‌های کرنشی و جنبشی در اصل همیلتون [۱۶] $\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0$ ، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشات آزاد یک پوسته مخروطی ناقص ساندویچی به صورت ذیل حاصل می‌گردد [۱۶]:

$$\delta u: \frac{\partial}{\partial x} (R(x)N_{xx}) + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \theta} - I_0(x) \ddot{u} = 0 \quad (15)$$

$$\delta v: \frac{\partial}{\partial x} (R(x)N_{xy}) + \frac{\partial N_{yy}}{\partial \theta} - I_0(x) \ddot{v} = 0 \quad (16)$$

می‌نمایند و همچنین توابع وزنی u_m و v_m و w_m به ترتیب برای فرم انتگرالی معادلات حاکم می‌توان انتخاب نمود. به دلیل رعایت اختصار، ادامه روند حل تحلیلی به صورت کوتاه توضیح داده خواهد شد و جزئیات روابط ارائه نمی‌شود. با جایگذاری شکل مودهای (۲۱) در فرم ضعیف (انتگرالی) معادلات حاکم (۲۰)، استفاده از تکنیک گالرکین و با انجام انتگرال‌گیری، سیستم معادلات جبری برحسب دامنه‌های ارتعاشات به صورت ذیل حاصل می‌گردد:

$$(K - \omega_{mn}^2 M) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (23)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

که در رابطه (۲۳) که در رابطه (۱۱)، K و M به ترتیب ماتریس‌های سفتی و جرم معادل برای تحلیل ارتعاشاتی پوسته مخروطی ناقص ساندویچی می‌باشد که مؤلفه‌هایش به فرم ذیل تعریف می‌شوند:

$$k_{11} = \int_0^L \left[\frac{d}{dx} [RA_{11} \frac{du_m}{dx}] - n^2 \frac{A_{66}}{R} u_m \right] u_m dx, \quad (25)$$

$$k_{12} = n \int_0^L \left[\frac{d}{dx} [A_{12}(x)v_m] + A_{66}(x) \frac{dv_m}{dx} \right] u_m dx,$$

$$k_{13} = \int_0^L \frac{d}{dx} [A_{12}(x)w_m] \cos \alpha u_m dx$$

$$k_{21} = n \int_0^L \left[\frac{d}{dx} [A_{66}u_m] + A_{12} \frac{du_m}{dx} \right] v_m dx \quad (26)$$

$$k_{22} = \int_0^L \left[n^2 \frac{A_{22}}{R} v_m - \frac{d}{dx} [RA_{66} \frac{dv_m}{dx}] \right] v_m dx$$

$$k_{23} = n \int_0^L \left[\frac{A_{22}}{R} \cos \alpha \right] w_m v_m dx$$

$$k_{33} = \int_0^L \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[RD_{11} \frac{d^2 w_m}{dx^2} - n^2 \frac{D_{12}}{R} w_m + \sin \alpha D_{12} \frac{dw_m}{dx} \right] + \dots \right.$$

$$\begin{aligned} & - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D_{22}}{R^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right] \\ & + \frac{1}{R} \left[D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right. \\ & + \frac{D_{22}}{R} \left(\sin \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D_{66}}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{\sin \alpha}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ & - 2 \frac{\sin \alpha}{R^2} \left[D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{\sin \alpha}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ & + \cos \alpha \left[A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A_{22}}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \cos \alpha w \right) \right] \\ & + m\ddot{w} - \frac{\partial}{\partial x} \left[I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right] - \frac{I}{R^2} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \theta^2} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

۲-۲- حل نیمه تحلیلی بر مبنای روش گالرکین

می‌توان مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی برای آنالیز مودال پوسته‌های مخروطی را به صورت ذیل بیان کرد [۱۸]:

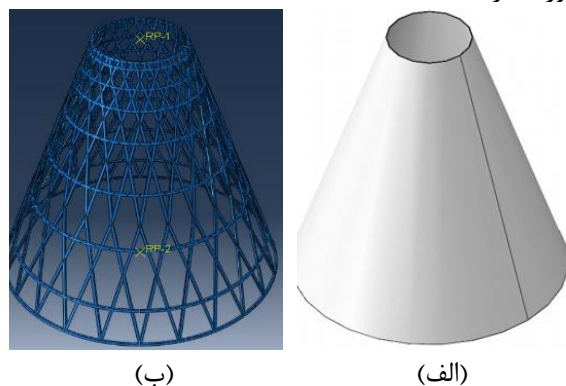
$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= U_{mn} u_m(x) \cos(n\theta + \omega_{mn}t) \\ v(x, \theta, t) &= V_{mn} v_m(x) \sin(n\theta + \omega_{mn}t) \\ w(x, \theta, t) &= W_{mn} w_m(x) \cos(n\theta + \omega_{mn}t) \end{aligned} \quad (21)$$

که در رابطه (۲۱)، U_{mn} ، V_{mn} و W_{mn} ضرایب مجهول هستند که دامنه‌های ارتعاشات در راستاهای مختلف نشان می‌دهند. همچنین پارامترهای m و n به ترتیب بیانگر تعداد نیم‌موج‌ها در راستای یال مخروط و تعداد موج‌ها کامل در جهت محیطی می‌باشد. همان‌طور که در رابطه (۹) مشاهده می‌شود، شکل مودهای ارتعاشاتی به صورت موج‌های پیش یا پس‌رونده در جهت محیطی و موج‌های ایستا در جهت یال مخروط در نظر گرفته شده است. ω_{mn} فرکانس طبیعی ارتعاشات مطابق با شکل مود (m, n) می‌باشد. علاوه بر این، $u_m(x)$ ، $v_m(x)$ و $w_m(x)$ توابع مودال (نشان‌دهنده فرم تغییرات در جهت یال مخروط) می‌باشند. با توجه به تعریف مؤلفه‌های کرنش نرمال محیطی ε_{xy} و برشی ε_{xy} در سطح میانی پوسته ارائه شده در (۲)، می‌توان رابطه ذیل بین توابع مودال نتیجه گرفت [۱۹]:

$$u_m(x) = \frac{dw_m(x)}{dx}, v_m(x) = w_m(x) \quad (22)$$

که تابع مودال $w_m(x)$ به صورت شکل مود تیر اوایلر-برنولی برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف در دو انتها انتخاب می‌شود که در مرجع [۲۰] معرفی شده‌اند. لازم به اشاره است که طاعتی و همکاران [۱۸] نشان دادند که مؤلفه‌های جابه‌جایی در رابطه (۲۱) شرایط مرزی اساسی را برای شرایط مرزی ارضا

می‌گردد. اجزای مختلف پوسته مخروطی ناقص ساندویچی شامل: رویه‌های درونی- بیرونی و هسته مشبک کامپوزیتی با استفاده از المان‌های سه‌بعدی C3D8R با کوچک‌ترین اندازه المان معادل ۱ میلی‌متر در هسته، پس از طی مراحل بررسی هم‌گرایی پاسخ‌ها، مدل‌سازی شده‌اند. شبیه‌سازی‌ها با استفاده از تحلیل فرکانسی برای استخراج مودهای فرکانس طبیعی صورت گرفته است.



شکل (۲): مدل‌های اجزای محدودی از اجزای پوسته مخروطی ناقص ساندویچی: (الف) رویه‌های کامپوزیتی؛ (ب) هسته مشبک با سلول‌های شش‌ضلعی.

مدل سه‌بعدی رویه‌های بیرونی- درونی و هسته مشبک با تولید هندسه یال مخروط با زاویه دوران ۳۶۰ درجه مطابق شکل ۲ ایجاد گردد. برای قسمت مشبک مقدار زاویه قطاعی ۱۵ درجه انتخاب می‌شود. این مقدار در واقع زاویه‌ای است که یک سلول در راستای ارتفاع مخروط تشکیل می‌دهد. شبیه‌سازی اجزای کامپوزیت در نرم‌افزار آباکوس با کمک تعاریف ذکر شده در مطالعات پیشین در نظر گرفته شده است [۲۱].

خواص مکانیکی شامل مدول‌های الاستیسیته، مدول برشی، ضریب پواسون و چگالی مطابق با جدول ۱، به مدل‌های سه‌بعدی رویه‌ها و هسته مشبک اختصاص می‌یابد. لازم به اشاره می‌باشد که یک روش میکرومکانیکی بر مبنای قانون مخلوطها [۲۲] برای به دست آوردن خواص مکانیکی معادل الیاف کامپوزیتی هسته مشبک استفاده شده است. همچنین خواص مکانیکی مربوط به هر یک از الیاف‌های کربن-شیشه، رزین اپوکسی و پارچه کولار بر اساس استاندارد ASTM-D2584 در نظر گرفته شده است [۲۳].

$$\begin{aligned} & -\sin \alpha \frac{d}{dx} \left[D_{12} \frac{d^2 w_m}{dx^2} + \sin \alpha \frac{D_{22}}{R} \frac{dw_m}{dx} \right. \\ & \left. - n^2 \frac{D_{22}}{R^2} w_m \right] - \frac{n^2}{R} \left[D_{12} \frac{d^2 w_m}{dx^2} \right. \\ & \left. - n^2 \frac{D_{22}}{R^2} w_m + \frac{D_{22}}{R} \sin \alpha \frac{dw_m}{dx} \right] \\ & + 2n^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin \alpha}{R^2} w_m - \frac{D_{66}}{R} \frac{dw_m}{dx} \right] \\ & + 2n^2 \frac{\sin \alpha}{R^2} \left[D_{66} \frac{dw_m}{dx} - \frac{\sin \alpha}{R} w_m \right] \\ & + \left[\frac{A_{22}}{R} \cos^2 \alpha \right] w_m \} w_m \end{aligned}$$

$$k_{31} = \int_0^L [\cos \alpha A_{12}(x)] \frac{du_m}{dx} w_m dx \quad (27)$$

$$k_{32} = \int_0^L \left[n \frac{A_{22}(x)}{R(x)} \cos \alpha \right] v_m w_m dx$$

$$m_{11} = - \int_0^L I_0(x) (u_m)^2 dx \quad (28)$$

$$m_{22} = \int_0^L \left[I_0(x) + \delta_L \frac{I_2(x)}{R^2} \right] (v_m)^2 dx$$

$$m_{33} = \int_0^L \left[\left[I_0(x) + n^2 \frac{I_2(x)}{R^2(x)} \right] w_m \right. \\ \left. - \frac{d}{dx} \left[I_2(x) \frac{dw_m}{dx} \right] \right] w_m dx$$

معادله (۲۳) در فرم استاندارد یک مسئله مقدار ویژه برای آنالیز مودال سازه‌ای می‌باشد که فرکانس‌های طبیعی از رابطه ذیل محاسبه می‌شوند:

$$\omega_{mn}^2 = \text{Eigenvalues} (\mathbf{K} \times \mathbf{M}^{-1}) \quad (29)$$

رابطه (۲۹)، سه جفت فرکانس ارتعاشات با علامت‌های مختلف برای شکل مودهای مختلف نتیجه می‌دهد. دو زوج مطابق با ارتعاشات داخل صفحه‌ای در جهت یال و محیط پوسته مخروطی می‌باشد و کوچک‌ترین مقدار از آن‌ها که مربوط به رفتار ارتعاشات عرضی (خیز جانبی) می‌باشد به‌عنوان فرکانس طبیعی انتخاب می‌گردد.

۳- مدل اجزای محدود بر مبنای آباکوس

به‌منظور مقایسه، مطالعه پارامتریک و اعتبارسنجی نسبی نتایج استخراج‌شده از حل نیمه-تحلیلی در بخش پیشین، با استفاده از آباکوس مدل‌های اجزای محدودی برای رویه‌های کامپوزیتی و هسته مشبک با سلول‌های شش‌ضلعی ساخته شده از ریب‌های کامپوزیتی مطابق شکل ۲ فراهم

گرفته شده است. البته برای انجام مطالعات پارامتریک برخی از آن‌ها تغییر می‌نماید.

در جدول ۲، فرکانس‌های ارتعاشات خطی برای چهار شکل مود اول پوسته‌های مخروط ناقص ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی دو سر آزاد با نتایج تجربی ارائه شده در مطالعه پیشین [۲۴] که بر مبنای آزمون مودال استخراج شده‌اند، مقایسه شده‌اند. همان‌طور مشاهده می‌شود، فرکانس‌های طبیعی حاصل از روش تحلیلی و شبیه‌سازی آباکوس تطابق خوبی با داده‌های تجربی دارد. همچنین، ماکزیمم اختلاف بین نتایج حل‌های تحلیلی و اجزای محدود کمتر از ۸٪ می‌باشد. به صورت کلی از حل فرم بسته می‌توان برای طراحی مفهومی، مطالعات پارامتریک و انجام بهینه‌سازی استفاده نمود.

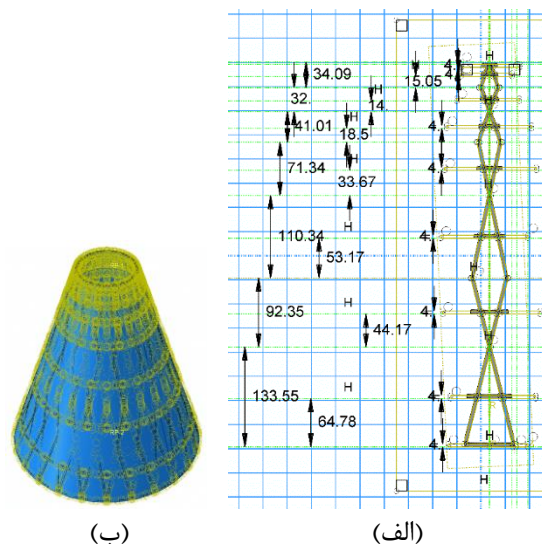
در شکل ۴، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای مطابق اولین، دومین و سومین شکل مدهای ارتعاشاتی برای شرایط مرزی دو سر آزاد حاصل از تحلیل اجزای محدود آباکوس ارائه شده‌اند. همان‌طور دیده می‌شود شبیه‌سازی عددی با نرم‌افزار آباکوس می‌تواند فرم تغییرشکل‌ها و فرکانس‌های ارتعاشات خطی را با دقت قابل قبولی پیش‌بینی نماید.

جدول (۱): خواص مکانیکی اجزای پوسته ساندویچی

اجزا	خواص مکانیکی					
	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	G_{12}	ρ
	(GPa)	(GPa)	(GPa)	-	(GPa)	(kg/m ³)
رویه	۳۰	۳۰	۷	۰/۲	۵	۰/۳۴
ریب	۷۰	۷/۵	۷/۵	۰/۳	۴/۵	۰/۳۴

جدول (۲): مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی پیش‌بینی شده برای پوسته مخروطی ساندویچی مشبک با شرایط تکیه‌گاهی دو سر آزاد

فرکانس‌های طبیعی (Hz)			
چهار شکل مود اول	مطالعه پیشین [۲۴]	مطالعه حاضر	اجزای محدود
گالرکین	محدود	محدود	محدود
$(m, n) = (1, 2)$	۷۲/۱۹	۶۰/۴۲	۶۳/۷۳
$(m, n) = (1, 3)$	۱۷۰/۶۰	۱۴۷/۰۸	۱۵۸/۱۴
$(m, n) = (1, 4)$	۲۶۸/۷۵	۲۳۷/۸۷	۲۵۸/۷۳
$(m, n) = (1, 5)$	۳۹۹/۲	۳۸۷/۵۰	۳۹۰/۳



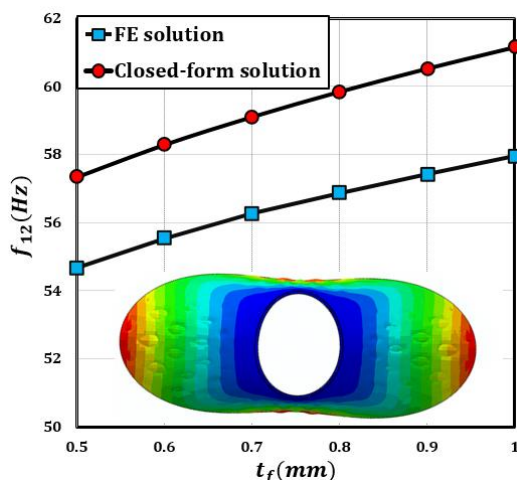
شکل (۳): جزئیات مدل سازی پوسته ساندویچی سه جزئی در نرم‌افزار آباکوس: (الف) مدل دوبعدی برای هسته مشبک هگزگونال برای دوران ۳۶۰ درجه؛ (ب) ونتاز رویه‌ها با هسته مشبک و اعمال قید Tie.

باید به این نکته اشاره گردد که با توجه به ماهیت جهت‌دار بودن ماده مورد استفاده (کامپوزیت) برای تولید ریب‌های مشبک، لازم می‌باشد که جهت‌های ماده روی ریب‌های در هر جز مشخص گردد. در مرحله مهم دیگر باید مونتاژ رویه‌های بیرونی-درونی و هسته مشبک روی همدیگر صورت بپذیرد. با توجه به اینکه در مدل تحلیلی از سه بخش شامل کاملاً متصل به یکدیگر به دون هیچ‌گونه حرکت نسبی استفاده شده است. همچنین از آنجایی که لینک‌های مخروط مشبک به صورت محلی با رویه‌های مخروطی داخلی و خارجی در تماس می‌باشد. لازم به ذکر است که نوع تماس و اتصال گره‌های قطعات مختلف در این مدل به صورت مقید کامل Tie مطابق شکل ۳ تعریف شده است.

۴- صحت سنجی و مطالعات پارامتریک

در بخش حاضر، به بحث و بررسی بر نتایج عددی شامل: فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها بر مبنای روش‌های عددی و تحلیلی پرداخته شده است و همچنین مطالعات اعتبارسنجی ارائه می‌شوند. برای ارائه نتایج عددی ابعاد هندسی پوسته مخروطی ساندویچی به صورت $R_0 = 0.1m$ ، $R_L = 0.25m$ ، $t_f = 1mm$ ، $t_c = 3mm$ و $\alpha = 15^\circ$ در نظر

ناقص ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی دو سر آزاد و دوسرگیردار با یکدیگر مقایسه شده‌اند. لازم به اشاره است که فرکانس‌های طبیعی بر مبنای حل فرم بسته گالرکین با استفاده از رابطه (۲۹) استخراج شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، تأثیر افزایشی اندازه عرض ریب‌ها بر روی نتایج عددی برای شرایط مرزی مختلف مشابه می‌باشد. همچنین، به‌صورت کلی شیب تغییرات فرکانس ارتعاشات با عرض سطح مقطع ریب‌های هسته مهم و وابسته به شرایط تکیه‌گاهی می‌باشد، به‌عنوان نمونه با افزایش ۸۰٪ در عرض ریب‌ها (2mm-3.6 mm)، افزایش در فرکانس‌های طبیعی شکل مود اول برای لبه‌های آزاد و گیردار به ترتیب تقریباً ۱۲٪ و ۱۴٪ می‌باشد.

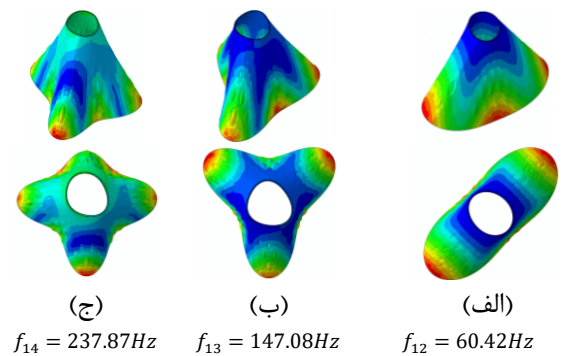


شکل (۵): اثرات تغییرات ضخامت رویه‌ها بر روی اولین فرکانس طبیعی مطابق شکل مود $(m, n) = (1, 2)$ پوسته مخروطی ساندویچی مشبک با تکیه‌گاه‌های ساده.

جدول (۳): مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی برای شرایط تکیه‌گاهی دو سر آزاد و گیردار بر مبنای حل فرم بسته گالرکین

عرض سطح مقطع ریب‌ها (mm)	فرکانس‌های طبیعی (Hz)		
	شکل مود اول	شکل مود دوم	شکل مود اول
	آزاد	گیردار	آزاد
۲	۵۰/۸۲	۴۶۸/۵۲	۱۲۶/۷۱
۲/۴	۵۲/۳۰	۴۷۲/۷۰	۱۳۰/۱۱
۲/۸	۵۴/۶۰	۴۷۵/۷۸	۱۳۴/۸۴
۳/۲	۵۵/۶۵	۴۷۷/۹۵	۱۳۹/۴۷
۳/۶	۵۶/۸۳	۴۸۰/۳۴	۱۴۵/۱۷

تحلیل آباکوس مقادیر فرکانس‌های طبیعی برای اولین شکل مود $(m, n) = (1, 2)$ تقریباً ۵٪ و برای دومین شکل مود $(m, n) = (1, 3)$ تقریباً ۷٪ و برای سومین شکل مود $(m, n) = (1, 4)$ تقریباً ۸٪ کمتر از نتایج روش تحلیلی تخمین می‌زنند. مهم‌ترین دلایل برای خطای قابل قبول در نتایج اجزای محدود، وجود تلورانس‌های کوچک در مدل‌سازی هندسی و تعیین دقیق خواص مکانیکی اجزای مختلف می‌باشد. به‌صورت کلی از مدل اجزای محدود پیشنهادی می‌توان برای طراحی و تحلیل رفتار مکانیکی کلی پوسته‌های مخروطی ساندویچی با هسته مشبک با دقت کافی استفاده نمود.



شکل (۴): فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای

پیش‌بینی شده توسط حل اجزای محدود آباکوس.

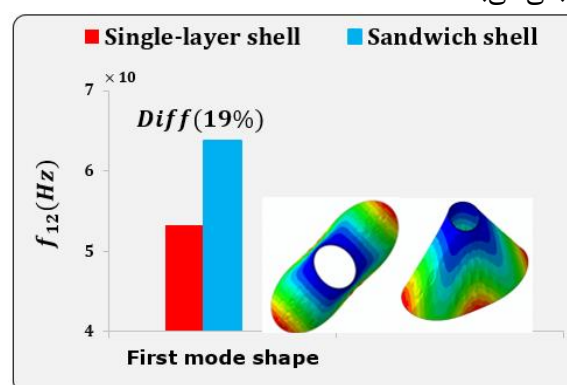
در شکل ۵، اثرات تغییرات ضخامت رویه‌ها در بازه $0.5\text{mm} \leq t_f \leq 1\text{mm}$ بر روی اولین فرکانس طبیعی مطابق شکل مود $(m, n) = (1, 2)$ برای پوسته مخروطی ساندویچی مشبک با تکیه‌گاه‌های ساده مطالعه شده است و نتایج برای دو روش حل فرم بسته و اجزای محدود آباکوس با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر فرکانس‌های طبیعی با تغییر ضخامت افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده بهبود یافتن نسبت سفتی معادل به وزن معادل سازه مخروطی ساندویچی می‌باشد؛ بنابراین ضخامت رویه‌ها را می‌توان به‌عنوان یک متغیر مؤثر طراحی در فرآیند بهینه‌سازی چنین پوسته‌هایی بر مبنای کنترل نمودن وزن و فرکانس‌های ارتعاشات سازه انتخاب نمود. در جدول ۳، اثرات عرض سطح مقطع ریب‌های کامپوزیتی هسته مشبک بر روی فرکانس‌های ارتعاشات مطابق با شکل مودهای اول ($m = 1, n = 2$) و دوم ($m = 1, n = 3$) پوسته‌های مخروطی

مفهومی و انجام فرآیند بهینه‌سازی چند پارامتری استفاده نمود. سرانجام با استفاده از نرم‌افزار آباکوس، مدل‌های شبیه‌سازی اجزای محدودی سه‌بعدی برای صحت‌سنجی نتایج عددی حاصل از حل گالرکین فراهم می‌گردد. مقایسه بین نتایج نشان می‌دهد که حل نیمه-تحلیلی پیشنهادی فرکانس‌های طبیعی مطابق با شکل موده‌های مختلف را با دقت قابل قبولی پیش‌بینی می‌نماید. همچنین بر مبنای نتایج مطالعات پارامتریک، اثرات ضخامت رویه‌ها و عرض سطح مقطع ریب‌های هسته بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های مخروطی با شرایط تکیه‌گاهی مختلف قابل توجه می‌باشد.

۶- مراجع

- [1] Vasiliev VV, Morozov EV. Advanced mechanics of composite materials and structures. Elsevier; 2018.
- [2] Davies JM, editor. Lightweight sandwich construction. John Wiley & Sons; 2008.
- [3] Vinson J. The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials. Routledge; 2018. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203737101>.
- [4] Shatov AV, Burov AE, Lopatin AV. Buckling of composite sandwich cylindrical shell with lattice anisogrid core under hydrostatic pressure. In: Journal of Physics: Conference Series 2020 (Vol. 1546, No. 1, p. 012139). IOP Publishing. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1546/1/012139>.
- [5] Zarei M, Rahimi GH, Hemmatnezhad M. Global buckling analysis of laminated sandwich conical shells with reinforced lattice cores based on the first-order shear deformation theory. International Journal of Mechanical Sciences. 2020;187:105872. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105872>.
- [6] Yang JS, Liu ZD, Schmidt R, Schröder KU, Ma L, Wu LZ. Vibration-based damage diagnosis of composite sandwich panels with bi-directional corrugated lattice cores. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2020;131:105781. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2020.105781>.
- [7] Shahgholian-Ghahfarokhi D, Rahimi G, Zarei M, Salehipour H. Free vibration analyses of composite sandwich cylindrical shells with grid cores: Experimental study and numerical simulation.

در شکل ۶، اثر وجود یک هسته مشبک کامپوزیتی با سلول‌های شش‌ضلعی بر روی رفتار ارتعاشاتی سازه مخروطی ناقص مورد مطالعه قرار گرفته شده است. بدین منظور اولین فرکانس طبیعی پوسته مخروطی تک لایه با ساندویچی سه‌جزئی با شرایط مرزی آزاد در دو انتها بر مبنای روش حل فرم بسته گالرکین در شکل ۶ مقایسه شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود، با در نظر گرفتن یک هسته مشبک با ریب‌های کامپوزیتی فرکانس طبیعی پوسته تک لایه حدود ۱۹٪ افزایش می‌یابد که بیانگر عملکرد بسیار مناسب چنین هسته سبکی می‌باشد.



شکل (۶): اثرات هسته مشبک کامپوزیتی با سلول‌های شش‌ضلعی بر روی اولین فرکانس طبیعی پوسته مخروطی ساندویچی مشبک با لبه‌های آزاد بر مبنای حل فرم بسته گالرکین.

۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش، به تحلیل رفتار ارتعاشات خطی پوسته‌های مخروطی ناقص ساندویچی سه‌جزئی با استفاده از روش نیمه-تحلیلی و شبیه‌سازی عددی پرداخته شده است. ساختار ساندویچی متشکل از دو رویه درونی و بیرونی از جنس پارچه کامپوزیتی و یک هسته مشبک با سلول‌های شش‌ضلعی و ریب‌های ترکیبی از الیاف‌های مختلف می‌باشد. روش نیمه-تحلیلی بر مبنای تئوری مهندسی تک لایه معادل برای مواد کامپوزیتی و روش اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس می‌باشد. بیان فرم بسته‌ای برای فرکانس‌های طبیعی با حل نمودن معادلات پوسته دائل کلاسیک بر طبق تکنیک گالرکین معرفی می‌گردد که می‌توان از آن برای طراحی

- [16] Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press; 2003.
- [17] Totaro G. Flexural, torsional, and axial global stiffness properties of anisogrid lattice conical shells in composite material. Composite Structures. 2016;153:738-45. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.06.072>.
- [18] Taati E, Fallah F, Ahmadian MT. Closed-form solution for free vibration of variable-thickness cylindrical shells rotating with a constant angular velocity. Thin-Walled Structures. 2021;166:108062.. Thin-Walled Structures, 2021: 166, 108062. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108062>.
- [19] Sharma CB, Johns DJ. Vibration characteristics of a clamped-free and clamped-ring-stiffened circular cylindrical shell. Journal of Sound and Vibration. 1971;14(4):459-74. **DOI:** [https://doi.org/10.1016/0263-8231\(84\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0263-8231(84)90011-9).
- [20] Rao SS. Vibration of continuous systems. John Wiley & Sons; 2019.
- [21] Barbero EJ. Finite element analysis of composite materials using Abaqus®. CRC press; 2023. **DOI:** <https://doi.org/10.1201/9781003108153>.
- [22] Gibson, R. F. Principles of composite material mechanics. CRC press, 2016. **DOI:** <https://doi.org/10.1201/b19626>.
- [23] Halpin, J. C., & Tsai, S. W. Environmental factors in composite materials design. US Air Force Technical Report AFML TR, 1967: 67423, 749-767.
- [24] Rahnama M, Hamzeloo SR, Morad Sheikhi M. Vibration analysis of anisogrid composite lattice sandwich truncated conical shells: Theoretical and experimental approaches. Journal of Composite Materials. 2024;58(22):2429-42. **DOI:** <https://doi.org/10.1177/00219983241264364>.
- Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2022;50(2):687-706. **DOI:** <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1725565>.
- [8] Fallah F, Taati E, Asghari M. Decoupled stability equation for buckling analysis of FG and multilayered cylindrical shells based on the first-order shear deformation theory. Composites Part B: Engineering. 2018 Dec 1;154:225-41. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.07.051>.
- [9] Fallah F, Taati E. On the nonlinear bending and post-buckling behavior of laminated sandwich cylindrical shells with FG or isogrid lattice cores. Acta Mechanica. 2019;230:2145-69. **DOI:** <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02385-z>.
- [10] Chai Y, Li F, Song Z. Nonlinear flutter suppression and thermal buckling elimination for composite lattice sandwich panels. AIAA Journal. 2019 Nov;57(11):4863-72. **DOI:** <https://doi.org/10.2514/1.1058307>.
- [11] Nazari A, Naderi AA, Malekzadefard K, Hatami A. Experimental and numerical analysis of vibration of FML-stiffened circular cylindrical shell under clamp-free boundary condition. **DOI:** <https://doi.org/10.22068/jstc.2018.80212.1415>.
- [12] Shahgholian-Ghahfarokhi D, Rahimi G. New analytical approach for buckling of composite sandwich pipes with iso-grid core under uniform external lateral pressure. Journal of Sandwich Structures & Materials. 2021;23(1):65-93. **DOI:** <https://doi.org/10.1177/1099636218821397>.
- [13] Karttunen AT, Reddy JN, Romanoff J. Two-scale constitutive modeling of a lattice core sandwich beam. Composites Part B: Engineering. 2019 Mar 1;160:66-75. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.098>.
- [14] Li C, Shen HS, Yang J. Low-velocity impact response of cylindrical sandwich shells with auxetic 3D double-V meta-lattice core and FG GRC facesheets. Ocean Engineering. 2022 Oct 15;262:112299. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112299>.
- [15] Zarei M, Rahimi GH. Buckling resistance of joined composite sandwich conical-cylindrical shells with lattice core under lateral pressure. Thin-Walled Structures. 2022 May 1;174:109027. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109027>.