



Cognitive waveform design for widely separated MIMO radar with stopband in presence of narrowband jammer

M.J. Vishkaei Siddiq¹, S.M. Alavi^{2*}, Y. Nowruz³, N. Zarei⁴

^{2*} Associate Professor, Imam Hussein University, Tehran, Iran

(Received:2022 /10/02, Revised: 2022/12/21, Accepted: 2022/12/29, Published: 2023/01/21)

DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.23454024.1401.10.2.5.6>

Abstract

In this paper, we aim to design sets of discrete-phase, fixed-amplitude sequences with proper aperiodic autocorrelation and cross-correlation functions for widely spaced multiple-input multiple-output (WS-MIMO) radar transmitters. These sequences can be used simultaneously with narrow-band interference (jammers) or telecommunications link systems. By designing the waveforms at this level, we can achieve sets of sequences by minimizing the maximum integrated side lobe level (ISL) of the codes (in the time domain) and removing the passband of the interference systems or the desired telecommunication links (in the frequency domain). Any desired WS-MIMO radar transmitter should take action to remove the measured undesirable frequency band in a cognitive way from its surrounding environment. Finally, we obtain a set of designed sequences. Each sequence has a band removed according to its surrounding environment, and the ISL of the autocorrelation and cross-correlation functions of all transmitter pairs is minimized. In the proposed method, we define a multi-dimensional constrained optimization problem using Pareto weight functions to minimize both the ISL and the undesirable spectral band simultaneously. Then, within the coordinate descent (CD) framework, we propose an efficient uniform algorithm based on the fast Fourier transform (FFT) to minimize the multidimensional objective function.

Keywords: : Waveform design, Spectral shaping, Coordinate Descent (CD), Code Division Multiplexing (CDM), Aperiodic autocorrelation and Cross-Correlation functions, Integrated Side lobe Level (ISL), Widely separated multi-input-multiple-output radar

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.

Publisher: Imam Hussein University

Authors



*Corresponding Author Email: alavi_m@mapnagroup.com

طراحی شناختی شکل موج‌های رادار چند ورودی چند خروجی گسترده با ایجاد باند توقف در حضور اختلال گر باند باریک

محمدجواد ویشکائی صدیقی^۱، سید محمد علوی^{۲*}، یاسر نوروزی^۳، نادعلی زارعی^۴

۱- دانشجوی دکتری و ۲- دانشیار، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، ۳- استادیار دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۴- استادیار، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۱/۰۷/۱۰، بازنگری: ۱۴۰۱/۰۹/۳۰، پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۰۸، انتشار: ۱۴۰۱/۱۱/۰۱)

DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.23454024.1401.10.2.5.6>



* این مقاله یک مقاله با دسترسی آزاد است که تحت شرایط و ضوابط مجوز Creative Commons Attribution (CC BY) توزیع شده است.

نویسندگان



ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع)

چکیده

در این مقاله، هدف ما طراحی مجموعه‌ای از دنباله‌های دامنه ثابت با فاز گسسته دارای توابع خودهمبستگی و همبستگی متقابل غیرتناوبی مناسب در فرستنده رادارهای چند ورودی چند خروجی گسترده ($WS-MIMO$) است که می‌بایست هم‌زمان با سامانه‌های اختلال و یا لینک‌های مخابراتی باند باریک به کار خود ادامه دهند. نشان می‌دهیم که چنین مجموعه‌ای از توالی‌ها را می‌توان با کمینه کردن مجموع سطح گلبرگ کناری (ISL) کدها (در حوزه زمان) و حذف باند عبور سامانه‌های اختلال و یا لینک‌های مخابراتی موردنظر (در حوزه فرکانس)، در مرحله طراحی شکل موج به دست آورد. لازم به ذکر است که هر فرستنده راداری $WS-MIMO$ موردنظر می‌بایست به صورت شناختی از محیط اطراف خود نسبت به حذف باند فرکانسی نامطلوب سنجش شده، اقدام نماید. در نهایت مجموعه دنباله‌های طراحی شده، هر یک دارای باند حذف شده متناسب با محیط اطراف خود بوده و ISL توابع خودهمبستگی و همبستگی متقابل تمام زوج فرستنده‌های آن کمینه می‌شود. در روش پیشنهادی، یک مسئله بهینه‌سازی مقید چندبعدی با کمک توابع وزنی پارتو جهت کمینه کردن توأمان $ISLR$ و باند طیفی نامطلوب به صورت تعریف می‌شود. سپس، با استفاده از چارچوب کاهش مختصات (CD)، یک الگوریتم یکنواخت کارآمد مبتنی بر تبدیل فوریه سریع (FFT) را برای کمینه کردن تابع هدف چندبعدی پیشنهاد می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: طراحی شکل موج، شکل‌دهی طیفی، کاهش مختصات، تسهیم تقسیم کد (CDM)، توابع خودهمبستگی و همبستگی غیرتناوبی، مجموع سطح لوب کناری (ISL)، رادار چند ورودی - چند خروجی گسترده، فاز گسسته

همبستگی متقابل باشند، انرژی از یک کد به کدهای دیگر در خروجی فیلتر منطبق نشت کرده و بر عملکرد سیستم تأثیر نامناسبی دارد [۲]. از این رو، طراحی موفقیت‌آمیز مجموعه‌های متعامد از توالی‌ها با الفبای فاز گسسته، با ویژگی‌های خودهمبستگی و همبستگی متقابل دو به دوی مناسب، برای سیستم‌های راداری $MIMO$ بسیار مهم است [۳].

رادارهای شناختی به طور پیوسته محیط را پایش می‌کنند و فرستنده و گیرنده هر دو به روشی هوشمند برای پاسخگویی به تغییرات در محیط سازگار می‌شوند [۴]. همچنین سیستم‌های

۱- مقدمه

سیستم‌های رادار $MIMO$ معمولاً شکل موج‌های متعامد یا ناهمبسته را توسط آنتن‌های فرستنده خود تابش می‌کنند و فیلترهای منطبق آن‌ها را در گیرنده از هم جدا کنند [۱]. اگر کدها (شکل موج‌ها) دارای لوب‌های جانبی غیرصفر در تابع

* رایانامه نویسنده مسئول: alavi_m@mapnagroup.com

هر آنتن متعلق به یکی از سه دسته، یک دنباله کد چند فازی دامنه ثابت^۴ را ارسال می‌کند که از N زیر پالس (کدگذاری درون پالسی) تشکیل شده است و می‌تواند در آنتن ارسال سال m ام به صورت زیر نوشته شود:

$$\bar{x}_m = [x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(N)] \in \mathbb{C}^N \quad (1)$$

که در آن $x_m(n)$ امین زیر پالس از بردار کد ارسالی \bar{x}_m بوده و $\bar{X} = \{\bar{x}_m\}_{m=1}^{NT}$ سطری از ماتریس کد X بوده و $\bar{X} \in \mathbb{C}^{NT \times N}$ می‌باشد [۵].

همبستگی متقابل غیرتناوبی \bar{x}_m و \bar{x}_l با تأخیر k برابر است با:

$$r_{ml}^{AP}(k) = \sum_{n=1}^{N-k} x_m(n)x_l^*(n+k) = r_{ml}^{AP*}(-k) \quad (2)$$

که در آن $m, l = 1, \dots, NT$ و $-N+1 \leq k \leq N-1$ می‌باشد. اگر $m=l$ باشد، معادله (۲) به تابع خود همبستگی $\{\bar{x}_m\}_{m=1}^{NT}$ تبدیل خواهد شد [۵].

همان‌طور که از شکل (۱) مشخص است، از آن‌جا که کدهای ارسالی مربوط به آنتن‌های هر دسته در دسته آنتن‌های دیگر نیز دریافت می‌شوند برای حفظ تعامد بین تمام زوج آنتن‌های ممکن، از ماتریس کد X معیار ISL به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{obj1} = \sum_{m=1}^{NT} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |r_{mm}(k)|^2 + \sum_{m,l=1}^{NT} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |r_{ml}(k)|^2 \quad (3)$$

که در آن $r_{ml}(k) = r_{ml}^{AP}(k)$ و $r_{mm}(k) = r_{mm}^{AP}(k)$ ترتیب تابع خود همبستگی و همبستگی متقابل می‌باشد [۵].

برای شکل‌دهی طیف فرکانسی در جهت ایجاد باند توقف در محدوده فرکانسی خاص در توان طیفی سیگنال ارسالی بر روی هر بردار از ماتریس کد X و W_U و W_U را مطابق زیر تعریف می‌کنیم که برابر هستند با^۵:

^۴ Constant Modulus Polyphase Sequences

^۵ $\{\bar{x}_{NT_1+1}, \dots, \bar{x}_{NT_1+NT_2}\}, \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{NT_1}\}$ کدهای مربوط به دسته آنتن‌های ۱، ۲ و ۳ می‌باشند.

^۶ باند توقف مربوط به آنتن‌های متعلق به هر دسته آنتن، به علت هم‌مکان بودن، مشابه هستند گرچه هر دسته آنتن می‌تواند باند توقف مخصوص خود را با توجه به شرایط محیطی اطراف آن داشته باشد.

راداری مدرن که معمولاً در محیط‌های پویا و متخاصم در زمین هوا و دریا، مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌بایست با کاهش تداخل در باند فرکانس کاری، بین رادار و فرستنده‌های دیگر (لینک‌های مخابراتی و یا اختلال‌کننده‌های باند باریک)، به کار خود ادامه دهد. این قابلیت معمولاً با بهینه‌سازی شکل موج در رادارهای شناختی به دست می‌آید.

در میان تکنیک‌های بهینه‌سازی، روش‌های کاهش مختصات (CD)^۱ مسئله را با شکستن آن به دنباله‌ای از چندین مسئله بهینه‌سازی ساده‌تر، حل می‌کند. رویکردهای CD عملکرد قابل‌قبولی را در بسیاری از موقعیت‌ها ارائه می‌دهند که منجر به استفاده گسترده از آن می‌شود [۵].

نوآوری‌های این مقاله را می‌توان به‌اختصار در زیر بیان نمود:

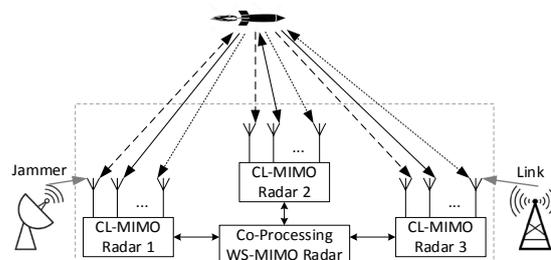
۱- ارائه روشی برای حل همزمان و مستقل بیش از ۳ مسئله بهینه‌سازی که در روش‌های قبلی به آن اشاره نشده بود.

۲- ارائه روشی برای حل همزمان طراحی شکل موج رادار چند ورودی چند خروجی شناختی در دسته رادارهای CL - $MIMO$ که در یک توپولوژی تشکیل یک رادار WS - $MIMO$ را می‌دهند و نحوه ترکیب آن‌ها در قالب یک مسئله بهینه‌سازی.

۳- کاهش زمان اجرای بهینه‌سازی در الگوریتم پیشنهادی نسبت به الگوریتم‌های دیگر، به علت موازی‌سازی ۴ بخش محاسبه ضرایب FFT برای بهبود سرعت در پیاده‌سازی عملی.

۲- مبانی نظری و معادلات مسئله

یک سیستم راداری چند ورودی چند خروجی با آنتن‌های گسترده (WS - $MIMO$)^۲ متشکل از سه مجموعه رادار چند ورودی چند خروجی هم‌مکان (CL - $MIMO$)^۳ با تعداد NT_1 ، NT_2 و NT_3 آنتن را مطابق با شکل (۱) در نظر می‌گیریم (که در مجموع تعداد کل آنتن‌ها یا NT برابر با $NT_1 + NT_2 + NT_3$ خواهد بود).



شکل (۱) - ساختار رادار WS - $MIMO$ و منابع اختلال

^۱ Coordinate Descent

^۲ Widely Separated Multi Input Multi Output

^۳ Co-Located Multi Input Multi Output

۳- روش پیشنهادی

برای حل هم‌زمان این دو مسئله بهینه‌سازی از روش پارتو وزن‌دار نرمالیزه برای تعریف یک تابع تک‌هدفه به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$f_{objMain}^{(i)} = \theta \frac{f_{objISL}^{(i)}}{f_{objISL}^{(0)}} + (1 - \theta) \frac{f_{objSpectral}^{(i)}}{f_{objSpectral}^{(0)}} \quad (9)$$

که در آن (0) و (i) به ترتیب بیانگر مقدار اولیه و شماره تکرار i بوده و منظور از θ و $(1 - \theta)$ به ترتیب ضرایب وزنی دو مسئله بهینه‌سازی f_{objISL} و $f_{objSpectral}$ می‌باشد و مقدارش بین صفر و یک خواهد بود و بیانگر میزان اهمیت آن مسئله بهینه‌سازی در مقابل مسئله بهینه‌سازی دیگر می‌باشد.

در این حالت مسئله بهینه‌سازی تبدیل به شکل زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} \arg \min_{\bar{X}} f_{objMain} \\ s.t. x_{mn} = e^{j\varphi_l}, \varphi_l \in \{0.1, \dots, L-1\} \times \frac{2\pi}{L} \end{cases} \quad (10)$$

برای حل این مسئله بهینه‌سازی از چارچوب CD و برای جستجوی فاز بهینه برای هر درایه از ماتریس \bar{X} از روش محاسبه ضرایب FFT به جای روش جستجوی طاقت‌فرسا استفاده می‌کنیم [۵]. نحوه بدست آمدن ضرایب مورد نظر در پیوست بیان شده است.

از آنجاکه بهینه‌سازی به روش CD ، در هر گام مبتنی بر ثابت فرض کردن همه درایه‌ها به جز یک درایه (x_{td}) می‌باشد، می‌توان تابع هدف مورد نظر را بر حسب درایه x_{td} ، x_{td}^* و توان‌های این دو بسط داد سپس با توجه به شرط دامنه ثابت و فاز گسسته بودن هر درایه، می‌توان از عبارت $x_{td}^* = x_{td} = e^{j\varphi_{td}}$ استفاده کرد. در این حالت می‌توان از بزرگترین توان $e^{-\varphi_{td}}$ فاکتور گرفته و جملات باقی‌مانده را بر حسب توان نزولی مرتب کنیم. با مقایسه بسط توسعه یافته مرتب شده با فرمول DFT می‌توان برابری مقدار تابع هدف با DFT ضرایب بدست آمده را مشاهده کرد. (در پیوست اثبات این موضوع آورده شده است)

$$w_{mU} = \bigcup_{i=1}^{2N-1} i \quad (4)$$

$$W_{mU} = w_{mU} \times \frac{2\pi}{2N-1} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{رادیان} \\ \text{ثانیه} \end{array} \right] \quad (5)$$

w_{mU} و W_{mU} به ترتیب بردارهای اندیس فرکانس‌های نرمالیزه و فرکانس‌های زاویه‌ای نرمالیزه باند توقف مربوط به دسته آنتنی^۱ است که آنتن m عضو آن می‌باشند [۵]. برای افزایش تفکیک‌پذیری فرکانسی، ماتریس \bar{X} را با اضافه کردن $N-1$ صفر به نمونه‌های زمانی به هر سطر از ماتریس \bar{X} می‌سازیم.^۲

$$\bar{X} \triangleq \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{M1} & x_{M2} & \dots & x_{MN} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

پاسخ طیف فرکانسی مربوط به آنتن‌های فرستنده ماتریس \bar{X} که به دنبال تضعیف آنها در باندهای توقف هستیم، برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} f_{obj2} &= \sum_{m=1}^{N_T} \sum_{k \in w_{mU}} |X_{mk}| \\ &= \sum_{m=1}^{N_T} \sum_{i=1}^{L_{w_{mU}}} \left| \sum_{n=1}^{2N-1} x_{mn} e^{-j\frac{2\pi}{2N-1}(w_{mU}(i)-1)(n-1)} \right| \end{aligned} \quad (7)$$

$L_{w_{mU}}$ تعداد اعضای w_{mU} یا W_{mU} می‌باشد. پس مسئله بهینه‌سازی که با آن روبرو هستیم متشکل از دو مسئله بهینه‌سازی زیر خواهد بود که باید به صورت هم‌زمان حل شوند:

$$\begin{cases} \arg \min_{\bar{X}} f_{obj1} \\ \arg \min_{\bar{X}} f_{obj2} \end{cases} \quad s.t. x_{mn} = e^{j\varphi_l}, \varphi_l \in \{0.1, 2, \dots, L-1\} \times \frac{2\pi}{L} \quad (8)$$

که L تعداد الفبای فاز گسسته می‌باشد.

^۱ مجموعه شماره آنتن‌های مربوط به دسته‌های ۱، ۲ و ۳ برابر است با: $A_1 = \{1, 2, \dots, NT_1\}$ ، $A_2 = \{NT_1 + 1, \dots, NT_1 + NT_2\}$

$A_3 = \{NT_1 + NT_2 + 1, \dots, NT\}$

^۲ $STOPBAND_m$ باند توقف فرکانس نرمالیزه آنتن m می‌باشد.

^۳ به این فرآیند Zero-padding می‌گویند.

برقراری شرط $f_{objMain}^{(i-1)} - f_{objMain}^{(i)} > \xi$ الگوریتم به پایان رسیده و گرنه تکرار بعدی بهینه سازی را شروع خواهیم کرد.

خلاصه روش پیشنهادی در ادامه آورده شده است:

خلاصه الگوریتم

- ۱- ماتریس کد X را به صورت تصادفی مقداردهی اولیه شود.
- ۲- مقدار $f_{objMain}^{(0)}$ را بدست آورده شود.
- ۳- شماره تکرار را برابر یک قرار داده شود ($i = 1$).
- ۴- آغاز حلقه اول ($t = 1, \dots, N_T$).
- ۵- آغاز حلقه دوم ($d = 1, \dots, N$).
- ۶- محاسبه ضرایب طبق فرمول‌های (۱۳) تا (۱۶) $\{a_{otdk}, a_{1tdk}, a_{2tdk}\}, \{b_{otdk}, b_{1tdk}\}, \{c_{otdk}, c_{1tdk}\}$ و $\{e_{otdk}, e_{1tdk}\}$ برای هر دو مسئله بهینه‌سازی ISL و شکل‌دهی طیف فرکانسی
- ۷- محاسبه FFT ، L -نقطه ای ضرایب مذکور طبق فرمول‌های (۱۱) و (۱۲)
- ۸- محاسبه $f_{objMain}$ طبق فرمول (۹)
- ۹- پیدا کردن اندیس سطر بهینه (l^*) که مقدار $f_{objMain}$ را کمینه میکند.
- ۱۰- پیدا کردن زاویه بهینه φ_l^* معادل با l^* به کمک رابطه $\varphi_l^* = (l^* - 1) \frac{2\pi}{L}$
- ۱۱- بروزرسانی درایه x_{td} از ماتریس کد X طبق رابطه: $x_{td} = x_{td}^* = e^{j\varphi_l^*}$
- ۱۲- پایان حلقه دوم
- ۱۳- پایان حلقه اول
- ۱۴- محاسبه $f_{objMain}^{(i)}$
- ۱۵- بررسی شرط $f_{objMain}^{(i-1)} - f_{objMain}^{(i)} > \xi$ تا وقتی که شرط برقرار است $i = i + 1$ و به پله ۴ برو در غیر این صورت به پله بعدی برو.
- ۱۶- خروجی نهایی برابر با ماتریس کد بروزرسانی شده X می‌باشد.

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این مقاله برای انجام شبیه‌سازی‌ها ۳ دسته آنتن فرستنده فرض شده که هر دسته شامل ۴ آنتن مطابق شکل (۱) می‌باشد

طبق این روش می‌توان نشان داد فرمول‌های (۳) و (۷) مطابق زیر به ترتیب برابر با فرمول‌های (۱۱) و (۱۲) خواهد بود:

$$f_{objISL} = \sum_{k=1}^{N-1} |FFT(\{a_{otdk} \cdot a_{1tdk} \cdot a_{2tdk}\} \cdot L)|^2 + \sum_{l=1}^{N_T} \sum_{k=1}^{N-1} |FFT(\{b_{otdk} \cdot b_{1tdk}\} \cdot L)|^2 + \sum_{m=1}^{N_T} \sum_{k=1}^{N-1} |FFT(\{c_{otdk} \cdot c_{1tdk}\} \cdot L)|^2 \quad (11)$$

$$f_{objSpectral} = \sum_{i=1}^{L_{wtU}} |FFT(\{e_{otdk} \cdot e_{1tdk}\} \cdot L)| \quad (12)$$

که ضرایب طبق فرمول‌های (۱۳) تا (۱۶) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} a_{otdk} = x_{t(d+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d+k \leq N}} \\ a_{1tdk} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{tn} x_{t(n+k)}^* \\ a_{2tdk} = x_{t(d-k)} \Big|_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d-k \leq N}} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} b_{otdk} = x_{l(d+k)}^* \Big|_{1 \leq d+k \leq N} \\ b_{1tdk} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{tn} x_{l(n+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq n+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} c_{otdk} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{mn} x_{t(n+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq n+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} \\ c_{1tdk} = x_{m(d-k)} \Big|_{1 \leq d-k \leq N} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} e_{otdk} = e^{-j \frac{2\pi}{2N-1} (w_U(i-1)(d-1))} \\ e_{1tdk} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{2N-1} x_{tn} e^{-j \frac{2\pi}{2N-1} (w_U(i-1)(n-1))} \end{cases} \quad (16)$$

مطابق با روش CD ، ابتدا بهینه‌سازی برای یک درایه بخصوص مانند $x_{td} \Big|_{\substack{1 \leq t \leq N_T \\ 1 \leq d \leq N}}$ با فرض ثابت بودن بقیه درایه‌ها انجام گرفته و فاز بهینه $\varphi_{td} (= x_{td})$ می‌آوریم. سپس بهینه‌سازی بر روی درایه‌های دیگر به صورت تک به تک انجام گرفته تا آخرین درایه. در این مرحله مقدار تابع هدف $f_{objMain}^{(i)}$ در تکرار i ام را بدست آورده و با مقدار $f_{objMain}^{(i-1)}$ در تکرار قبلی مقایسه کرده، در صورت عدم

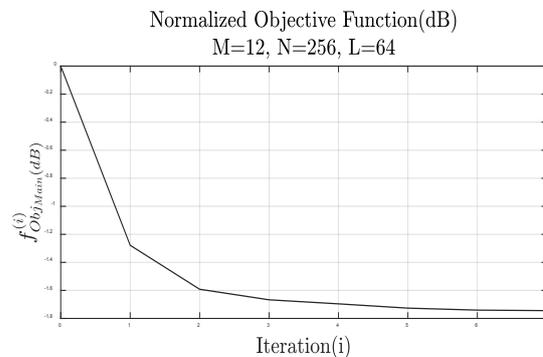
نتایج شبیه‌سازی حاصل از شکل‌دهی طیف در شکل (۳) نمایش داده شده است. آنتن‌های ۱، ۵ و ۹ به ترتیب متعلق به دسته آنتن‌های ۱، ۲ و ۳ می‌باشند. همان‌طور که انتظار داشتیم متناظر با باند توقف هر دسته آنتن، پاسخ طیفی آنتن‌های مذکور شکل گرفته است. در مورد دسته آنتن ۲ از آنجا که باند توقف نرمالیزه آن تهی در نظر گرفته شده است عملاً هیچ الگوی به خصوصی بر روی طیف شکل موج مذکور ایجاد نمی‌شود. در **Error!** *Reference source not found.*، توابع خودهمبستگی و همبستگی متقابل آنتن‌های ۱، ۵ و ۹ از دسته آنتن‌های ۱، ۲ و ۳ به عنوان نمونه نمایش داده شده است. همان‌طور که انتظار داشتیم، میزان دامنه لوب‌های فرعی بعد از فرآیند بهینه‌سازی کاهش یافته است. مقادیر *ISL* بدست آمده قبل و بعد از بهینه‌سازی به ترتیب برابر با ۹۳۵۹۲۰۷ و ۸۷۱۳۸۴۱ شده است. برای مقایسه بین مقادیر *ISL* بدست آمده به ازای طول دنباله (N) و تعداد آنتن‌های (M) متفاوت، نیاز است که معیار *ISLR* را به شکل نرمالیزه تعریف کنیم زیرا افزایش N و M ذاتاً باعث افزایش مقدار *ISL* کل می‌شود و نمی‌توانیم میزان عملکرد الگوریتم را به ازای مقادیر مختلف این دو عدد با هم مقایسه کنیم لذا رابطه (۱۷) را برای کل آنتن‌ها به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$ISLR = \frac{ISL}{N^2 M(M-1)} \quad (17)$$

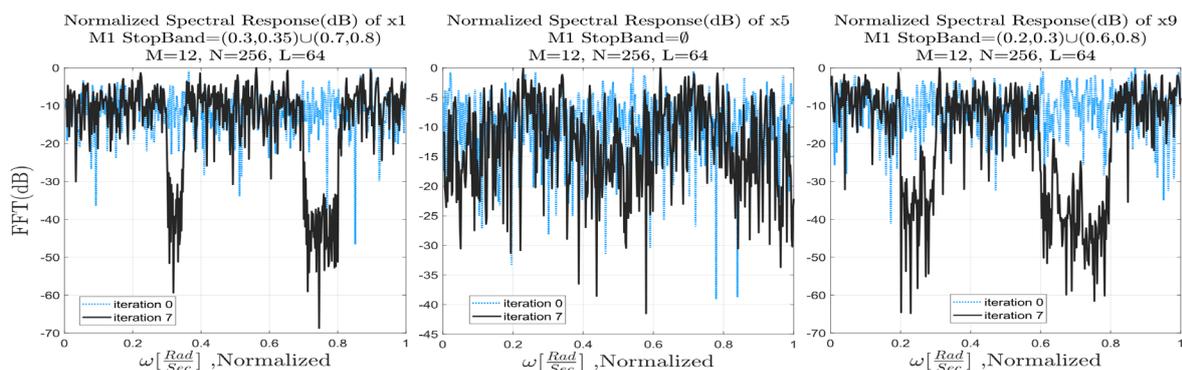
که در مسئله مورد بررسی مقاله، مقدار *ISLR* به دست آمده قبل و بعد از بهینه‌سازی به ترتیب برابر 0.3419 dB و 0.0316 می‌باشد. مقدار $N^2 M(M-1)$ به عنوان حد پایین مقدار *ISL* در مقالات شناخته شده می‌باشد [۵]. کمترین مقدار ممکن *ISL* برای هر تعداد آنتن و برای هر طول دنباله برابر با همان مقدار حد پایین بوده در نتیجه مقدار *ISLR* آن برابر 0 dB خواهد شد.

($NT_1 = NT_2 = NT_3 = 4$ و $NT = 12$). طول دنباله $N = 256$ ، تعداد الفبای فاز $L = 64$ ، آستانه شرط توقف بهینه سازی $\xi = 10^{-3}$ ، باند توقف در دسته آنتن اول تا سوم به ترتیب $W_{mU}|m \in A_1 = \{(0.3,0.35) \cup (0.7,0.8)\}$ ، $W_{mU}|m \in A_2 = \emptyset$ و $W_{mU}|m \in A_3 = \{(0.2,0.3) \cup (0.6,0.8)\}$ می‌باشند.

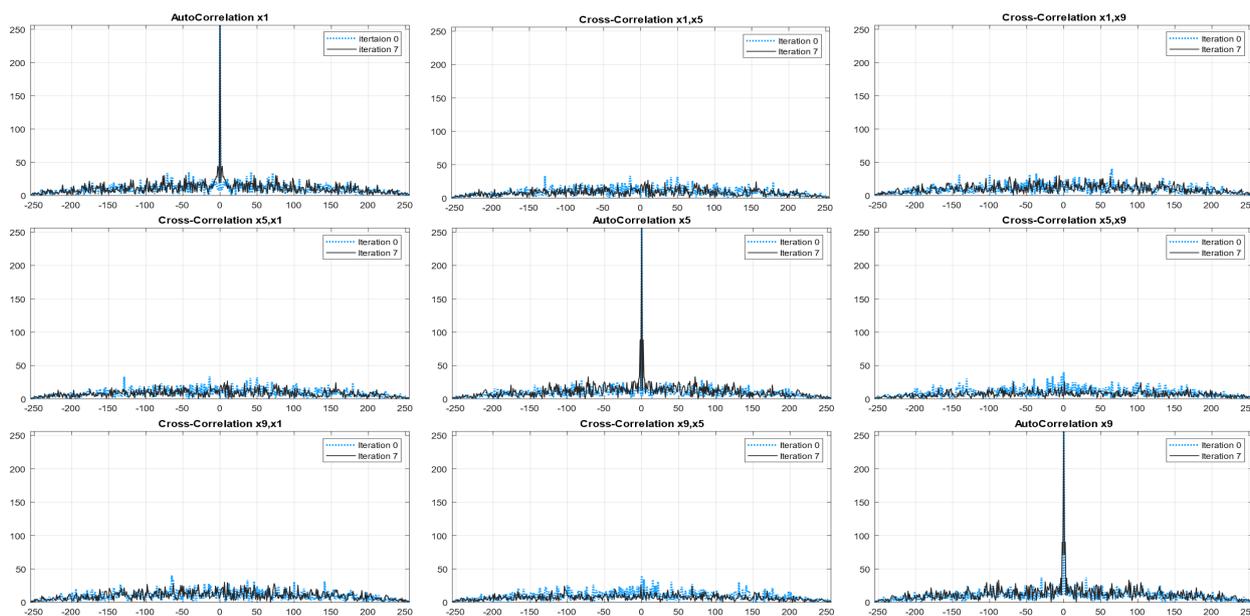
در مسئله بهینه‌سازی انجام شده در مقاله طبق رابطه (۹)، مقدار $f_{objMain}$ براساس الگوریتم بهینه‌سازی *CD* در هر گام از هر تکرار یا کاهش یافته یا تغییری نخواهد کرد پس یکنواست. از طرف دیگر $f_{objMain}$ بین دو مقدار صفر و یک کران‌دار می‌باشد. از ترکیب این دو خاصیت (یکنوایی و کران‌دار بودن) با استفاده از قضیه ریاضی، همگرایی تابع $f_{objMain}$ نتیجه می‌شود. در شکل (۲) تابع $f_{objMain}$ نرمالیزه را نسبت به مقدار اولیه خود مشاهده می‌کنید. همان‌طور که مشخص است مقدار نرمالیزه عددی $f_{objMain}$ در هر تکرار نسبت به تکرار قبلی کاهش داشته و تا جایی که این کاهش کمتر از شرط توقف ($\xi = 10^{-3}$) باشد، الگوریتم بهینه‌سازی ادامه می‌یابد. در این‌جا مشاهده می‌شود پس از هفتمین مرحله از تکرار، بهینه‌سازی در حد مطلوب انجام شده است.



شکل (۲) - همگرایی تابع $f_{objMain}$ نرمالیزه نسبت به مقدار اولیه



شکل (۳) - شکل‌دهی طیف منطبق بر باند توقف مشخص شده برای آنتن‌های ۱، ۵ و ۹ از دسته آنتن‌های ۱، ۲ و ۳

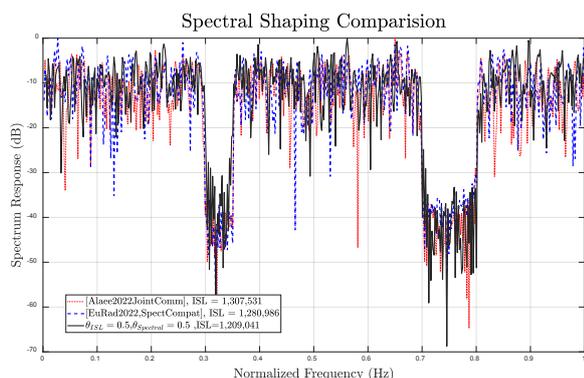


شکل (۴) - توابع خودهمبستگی و همبستگی متقابل کد آنتن‌های ۱، ۵ و ۹ از دسته آنتن‌های ۱، ۲ و ۳

باشد. در اینجا مسئله بهینه‌سازی ISL بیشتر برای جلوگیری از خراب شدن وضعیت ISL بعد از شکل‌دهی طیف استفاده شده است و در این زمینه نیز موفق عمل کرده است.

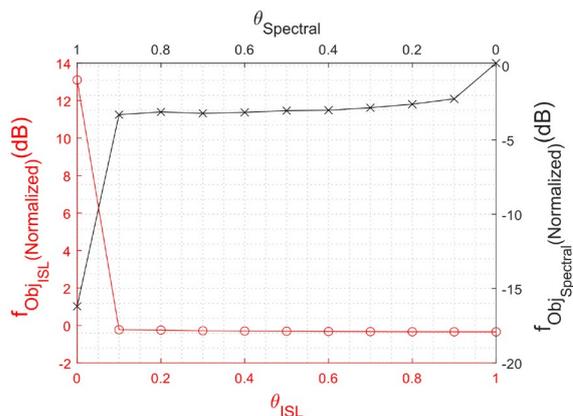
۵- مقایسه با مقالات مشابه

با توجه به موجود نبودن مقالات مشابه در زمینه رادارهای $WS-MIMO$ برای مقایسه مجبور هستیم یکی از دسته آنتن‌های هم‌مکان محلی را با مقالات دیگر مقایسه کنیم و نتیجه‌گیری را به همه دسته‌ها تعمیم دهیم؛ زیرا همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، هر دسته آنتن رادار $WS-MIMO$ ، خود یک رادار $CL-MIMO$ (دسته آنتن) می‌باشد. در شکل (۶) مقایسه شکل‌دهی طیف بین روش بیان شده در این مقاله و دو مقاله $[Alaee2022JointComm]$ و $[EuRad2022SpectCompat]$ که به ترتیب مراجع [6] و [7] می‌باشند و همچنین مقدار ISL هر کدام، آورده شده است.



شکل (۶) - مقایسه شکل‌دهی طیفی با مقالات قبلی

برای بررسی اثر تغییرات ضرایب پارتو بر مقدار بهینه‌سازی هر کدام از توابع هدف دو مسئله بهینه‌سازی ترکیبی می‌توان به شکل (۵) رجوع کرد. محورهای افقی بالا و پایین به ترتیب بیانگر مقدار ضرایب شکل‌دهی طیف و ISL بوده و محورهای عمودی راست و چپ به ترتیب بیانگر مقدار تابع هدف نرمالیزه^۱ شده شکل‌دهی طیف و ISL می‌باشد.



شکل (۵) - نمودار تغییرات ضرایب پارتو در بهینه‌سازی

همان‌طور که از شکل مشخص است، بهترین محدوده برای مقدار ضرایب پارتو در بهینه‌سازی شکل‌دهی طیف و ISL به ترتیب معادل ۰٫۹ تا ۱ و ۰ تا ۰٫۱ می‌باشد. مقدار حداکثر بهینه‌سازی قابل انجام بر روی توابع هدف شکل‌دهی طیف و ISL مطابق با شکل (۵) به ترتیب تقریباً برابر $۱۶dB$ و $۱۳dB$ می‌-

^۱ نسبت به مقدار اولیه

$$Complexity_{ISL} = \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & O\left(2^{\frac{(N-1)N}{2}}\right) + O((2N-2) \times L \log_2 L) \\ & + O\left((M-1) \times \frac{(2N-2)(2N-1)}{2}\right) \\ & + O((M-1) \times (2N-1) \times L \log_2 L) \\ & + O\left((M-1) \times \frac{(2N-1)2N}{2}\right) \\ & + O((M-1) \times (2N-1) \times L \log_2 L) \\ & = O\left(2^{\frac{(N-1)N}{2}}\right) + O\left(\frac{(M-1)(2N-1)(4N-2)}{2}\right) \\ & + O((2(M-1)(2N-1) + (2N-2)) \times L \log_2 L) \end{aligned}$$

$$Complexity_{Spectral} = \quad (19)$$

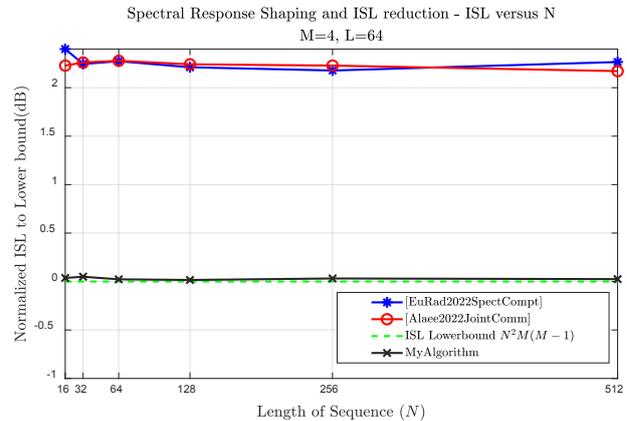
$$\begin{aligned} & O((2N-1) \times L_{wU}) + O(L \log_2 L \times L_{wU}) \\ & = O((2N-1)^2 \times BW_U) + O((2N-1) \times L \log_2 L \\ & \quad \times BW_U) \end{aligned}$$

همان L_{wU} همان طور که قبلاً تعریف شد تعداد اعضای W_U یا همان اجتماع تمام بازه‌های فرکانس‌های نرمالیزه باند توقف بوده که وابسته به بازه‌های فرکانس‌های انتخابی باند توقف و تعداد نقاط تفکیک‌پذیری فرکانسی است که عددی بین صفر و $2N-1$ است.

BW_U پهنای باند اجتماع تمام بازه‌های فرکانس‌های نرمالیزه باند توقف که عددی بین صفر و یک است.

یکی از نوآوری‌های این روش تبدیل مسئله بهینه‌سازی ترکیبی به چهار مسئله بهینه‌سازی با ضرایب وزنی متفاوت موازی و جدا از هم به همراه ارائه معیار برای انتخاب مقادیر بهینه برای این ضرایب می‌باشد. یکی از امتیازات این روش علاوه بر اینکه می‌توان چندین مسئله بهینه‌سازی را به طور هم‌زمان حل کرد، موازی شدن اجرای الگوریتم برای هر مسئله بهینه‌سازی و در نتیجه کاهش زمان کل اجرا می‌باشد. در واقع در این روش تعداد مسئله‌های بهینه‌سازی مهم نبوده؛ بلکه بیشینه زمان اجرای مسئله‌های بهینه‌سازی نسبت به هم مهم است. پس برای کاهش زمان اجرای کل الگوریتم علاوه بر کاهش زمان اجرای هر کدام از مسائل بهینه‌سازی باید زمان اجرای مسئله‌ای که بزرگ‌ترین مقدار از منظر زمان اجرا را دارد نیز کاهش داد. در ادامه در شکل (۸) نمودار روندنمای الگوریتم مرتبط با مسئله ترکیبی چهارگانه بهینه‌سازی هم‌زمان ISL و پاسخ فرکانسی سه رادار در جهت

همانطور که در شکل (۶) مشخص است شکل‌دهی طیفی به روش این مقاله در باند عبور بالاتر از دو مقاله دیگر قرار گرفته و در باند توقف با تضعیف بهتری همراه است. در ضمن مقدار ISL کمتری نسبت به دو مقاله دیگر را دارا می‌باشد.



شکل (۷) - مقایسه مقدار ISL نرمالیزه شده نسبت به مقدار حدپایین ISL با مقالات قبلی به ازای N های مختلف

همان‌طور که در شکل (۷) مشخص است مقادیر $ISLR$ که در رابطه (۱۷) محاسبه شده، در یک دسته آنتن ۴ تایی با الفبای فاز ۶۴ در طول‌های مختلف به روش این مقاله با دو مقاله قبلی مقایسه شده است که مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی $ISLR$ بهتری را موجب می‌شود که بسیار به حد پایین $ISLR$ نزدیک می‌باشد.

از آنجاکه دو مقاله ذکر شده نسبت به مقالات پیشین وضعیت بهتری را دارا می‌باشند، می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی در این مقاله بهبود قابل توجهی در کاهش هم‌زمان مقدار ISL و شکل‌دهی بهتر پاسخ طیفی را ارائه می‌کند.

۶- بررسی پیچیدگی محاسباتی

برای محاسبه میزان پیچیدگی محاسباتی الگوریتم، ابتدا باید پیچیدگی محاسباتی هر یک از مسائل بهینه‌سازی را محاسبه کرد و از آنجاکه به صورت موازی حل می‌شوند پیچیدگی کل برابر با بیشینه پیچیدگی خواهد شد. در روابط (۱۸) و (۱۹) میزان پیچیدگی هر یک از مسائل به صورت مستقل و در نهایت میزان پیچیدگی کل الگوریتم مسئله ترکیبی سه‌گانه مورد نظر محاسبه شده است.

در جدول (۱) طول زمان اجرای الگوریتم در یک سناریوی معین که در زیر به آن اشاره شده است در هر دو حالت سریال و موازی به ازای پیکربندی‌های مختلف با تعداد تکرار (مونت کارلو) ۲۵ بار با پارامترهای مشخص شده تعداد آنتن‌ها (M)، طول دنباله (N)، تعداد الفبای فاز (L) و تغییر تابع تصادفی ورودی پس از متوسط‌گیری زمان‌ها و تعداد تکرار، با هم مقایسه شده است. به طور مثال در حالتی که $M=6, L=8, N=64$ باشد، متوسط زمان اجرای متفاوت با سناریوی تعیین شده (در تیترا جدول) در حالت سری حدود ۱,۸ ثانیه و در حالت موازی حدود ۱,۳ ثانیه شده است که تعداد تلاش‌های رسیدن به پاسخ مناسب (تعداد تکرار الگوریتم) ۴، ۵ یا ۶ بار بوده است که به طور متوسط ۴,۹ بار اشاره شده است.

جدول (۱) - طول زمان اجرای واقعی الگوریتم بر حسب ثانیه در هر دو حالت سریال و موازی و تعداد تکرار الگوریتم به ازای پیکربندی‌های مختلف از منظر تعداد آنتن‌ها $M=\{6, 12\}$ ، طول دنباله $N=\{8, 64, 256\}$ و تعداد الفبای فاز $L=\{8, 64\}$ باند توقف فرکانسی نرمالیزه $W_{U2} = \{0\}$ ، $W_{U1} = \{(0,0,0.35) \cup (0.7,0.8)\}$ ، $W_{U3} = \{(0.2,0.4)\}$ و مقدار هر چهار ضریب وزنی برابر با $\theta_{ISL} = \theta_{Spec1} = \theta_{Spec2} = \theta_{Spec3} = 0.25$ و شرط توقف $\xi = 0.001$ برای تابع هدف نرمالیزه در رایانه‌ای با $Core\ i7-9750HF\ CPU$ و $16GB\ RAM$ و $@2.60GHz$

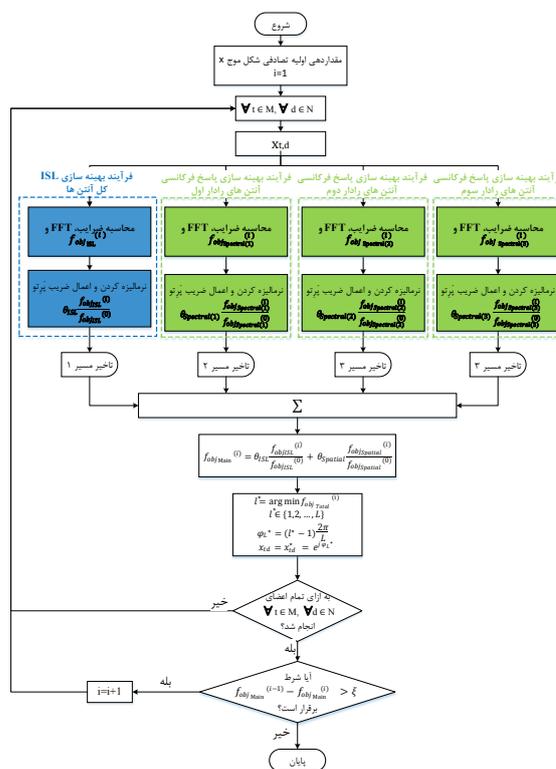
M=6							
L=8				L=64			
N	سریال	موازی	تکرار	N	سریال	موازی	تکرار
8	0.4	0.3	5.8	8	0.6	0.4	6.2
64	1.8	1.3	4.9	64	2.5	1.8	5.1
256	8.2	6.3	3.2	256	9.4	7.8	3.4
M=12							
L=8				L=64			
N	سریال	موازی	تکرار	N	سریال	موازی	تکرار
8	1.0	0.7	5.6	8	1.2	1.0	5.7
64	8.1	7.2	3.9	64	8.3	7.6	4.2
256	41.7	38.4	3.3	256	49.7	44.8	3.4

همان‌طور که انتظار می‌رفت و در جدول (۱) نیز قابل مشاهده است، همان‌طور که در بخش پیچیدگی اشاره شد چون درجه محاسبات با افزایش تعداد آنتن با درجه ۲ تغییر می‌کند، زمان در هر مجموعه با پارامتر مشابه با افزایش تعداد آنتن‌ها تقریباً ۶ برابر شده است. از طرفی در تعداد آنتن‌های مشابه، با افزایش طول کد زمان تقریباً به همان نسبت افزایش داشته است

بررسی زمان لازم برای اجرا آورده شده است. همان‌طور که در این شکل مشخص است مسئله بهینه‌سازی ترکیبی چهارگانه اصلی به چهار مسئله بهینه‌سازی مستقل از هم در سه‌شاخه موازی رنگی با رنگ‌های آبی و سبز تبدیل شده است. از آنجایی که زمان اجرای هر کدام از شاخه‌ها مستقل و متفاوت هستند برای پیاده‌سازی عملی باید مقدار تأخیر برای شاخه با بیشترین زمان اجرا را سفر کرده و مقدار تأخیر شاخه‌های دیگر به اندازه تفاوت زمان اجرای آن‌ها با زمان اجرای شاخه مذکور با بیشترین زمان اجرا خواهد بود تا بتوان نتایج حاصل از شاخه‌ها موازی را در یک نقطه با هم جمع کرده، از بین آن‌ها اندیس مطلوب را پیدا کرده و درایه مورد بررسی شکل موج یعنی x_{td} را متناسب با اندیس به‌دست‌آمده بروز کرد؛ لذا زمان اجرای کل برابر خواهد بود با:

$$T_{total} = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^M \sum_{d=1}^N (Max\{T_{tdISL}^{(i)}, T_{tdSpectral(K)}^{(i)}\} + T_{tdCommon}^{(i)}) \quad (20)$$

که در آن M تعداد آنتن‌های فرستنده، N طول کد، I تعداد کل تکرار برای رسیدن به شرط نهایی توقف الگوریتم و k شماره دسته آنتن هر رادار است.



شکل (۸) - روندنمای اجرای زمانی الگوریتم

نمی‌توان استفاده کرد و روش‌های دیگری مانند پرش یا چابکی فرکانسی در این مورد مؤثرتر خواهند بود.

همچنین باتوجه به جهت ورود اختلال گرما و یا سامانه‌های شنود سیگنالی مقابله سخت بر علیه تابش گرما مانند موشک (پهپاد) ضد تابش (ARM)^۱، پیشنهاد می‌شود مسئله فوق با قید شکل‌دهی فضایی^۲ و حذف زاویه ارسال سیگنال (به‌منظور عدم شنود راداری از طرف ARM) مورد ارزیابی قرار گیرد.

۸- مراجع

- [1] J. Li and P. Stoica, "MIMO radar with colocated antennas," IEEE Signal Process. Mag., vol. 24, no. 5, pp. 106–114, Sep. 2007.
- [2] B. Friedlander, "Waveform design for MIMO radars," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 43, no. 3, pp. 1227–1238, Jul. 2007.
- [3] H. He, P. Stoica, and J. Li, "Designing unimodular sequence sets with good correlations; including an application to MIMO radar," IEEE Signal Process., vol. 57, no. 11, pp. 4391–4405, Nov. 2009.
- [4] M. S. Greco, F. Gini, P. Stinco, and K. Bell, "Cognitive radars: On the road to reality: Progress thus far and possibilities for the future," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 35, no. 4, pp. 112–125, 2018.
- [5] M. Alae-Kerahroodi, M. Modarres-Hashemi, and M. M. Naghsh, "Designing sets of binary sequences for MIMO radar systems," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 67, no. 13, pp. 3347–3360, 2019.
- [6] M. Alae-Kerahroodi, S. Kumar, M. R. Bhavani Shankar, Kumar Vijay Mishra, "Discrete-Phase Sequence Design with Stopband and PSL Constraints for Cognitive Radar," 17th European Radar Conference (EuRAD), pp. 17-20, 2020.
- [7] E. Raei, M. Alae-Kerahroodi, and M. R. Bhavani Shankar. "Waveform design for range-ISL minimization with spectral compatibility in MIMO radars." 2022 19th European Radar Conference (EuRAD). IEEE, 2022.
- [8] K. Deb, Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. John Wiley & Sons, 2001, vol. 16.
- [9] M. Alae-Kerahroodi, P. Babu, M. Soltanalian, and M. R. Bhavani Shankar. Signal Design for Modern Radar Systems. Artech House, 2022.
- [10] J. Song, P. Babu, and D. P. Palomar, "Sequence set design with good correlation properties via majorization-minimization," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 64, no. 11, pp. 2866–2879, 2016.

و با افزایش تعداد الفبای فاز به دلیل افزایش تعداد ضرایب FFT زمان کمی افزایش داشته است. ولی در مجموع نتیجه اصلی از جدول فوق این‌که با موازی سازی الگوریتم بر اساس نمودار شکل (۸) زمان را کاهش چشمگیری داده است. که البته بیشترین زمان را در حالت موازی بخش فرایند بهینه‌سازی ISL و محاسبه ماتریس‌های خودهمبستگی و همبستگی متقابل در کد است که می‌توان برای اجرا در پردازنده‌های موازی مانند DSP این بخش را نیز به شکل ماترسی چند بخشی نوشت.

۷- نتیجه‌گیری

تحلیل دنباله‌های فاز گسسته که ویژگی‌های همبستگی غیرتناوبی خوبی با شکل‌دهی طیف ارسالی را نشان می‌دهند، مورد بررسی قرار گرفت. به طور خاص، $ISLR$ به‌عنوان معیار عملکرد بهینه کد پذیرفته شد و معادلات مسئله طراحی، به‌عنوان یک بهینه‌سازی دو هدف نوشته شد که در آن یک محدودیت فاز گسسته در مرحله طراحی اعمال می‌شود. مسائل غیرمحدب ناشی از مقیاس‌بندی از طریق یک روش تکرارشونده جدید بر اساس روش CD مدیریت می‌شوند. هر تکرار از الگوریتم ابداع شده نیاز به حل یک مسئله کمینه - بیشینه غیرمحدب دارد. با اشاره به طراحی کدهای فاز گسسته، یک روش دوبخشی چندجمله‌ای - زمان باهدف حل مسئله فوق‌الذکر مبتنی بر FFT ابداع و توسعه داده شده است.

در نهایت، افزودن قید کمینه‌کردن $Stopband$ در هر یک از دسته آنتن‌های جدا از هم در رادار $WS-MIMO$ جهت کاهش احتمال شنود توسط گیرنده‌های ESM پایه ادوات جنگ الکترونیکی، در باند خاص برای بهینه‌سازی بهتر سیگنال‌های ارسالی پیشنهاد می‌گردد.

زمان اجرای الگوریتم برای توپولوژی‌های مختلف نودهای راداری (با توجه تعداد آنتن‌های مستقل از نظر طراحی شکل موج) متفاوت خواهد بود که با استفاده از پردازنده‌های موازی سریع می‌توان در زمان نسبتاً مناسبی پس از شناخت محیط، شکل موج مناسب و منطبق را طراحی و پیاده سازی نمود.

همان‌طور که اشاره شد ایجاد باند توقف در این روش برای مقابله با اختلال باند باریک با حذف بخشی از پهنای باند ارسال و دریافت سیگنال می‌باشد و برای اختلال پهن باند از این روش

¹ Anti-Radiation Missile

² Special Shaping

پیوست

محاسبه ضرایب FFT

معادله مسئله بهینه‌سازی $ISL MIMO$ را می‌توان به کمک تابع هدف f_{objISL} به شکل زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned}
 \arg \min_{\tilde{\mathbf{X}}} f_{objISL} &= \arg \min_{\tilde{\mathbf{X}}} ISL_{MIMO}(\mathbf{X}) = \arg \min_{\tilde{\mathbf{X}}} \left(\sum_{m=1}^M ISL(\tilde{\mathbf{x}}_m) + \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^M ISL(\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{\mathbf{x}}_l) \right) \\
 &= \arg \min_{\tilde{\mathbf{X}}} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} |r_k(\tilde{\mathbf{x}}_m)|^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^M \sum_{k=1-N}^{N-1} |r_k(\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{\mathbf{x}}_l)|^2 \right) \\
 &= \arg \min_{\tilde{\mathbf{X}}} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} \left| \sum_{\substack{n=1 \\ 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq n+k \leq N}}^{N-k} x_{mn} x_{m(n+k)}^* \right|^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^M \sum_{k=1-N}^{N-1} \left| \sum_{\substack{n=1 \\ 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq n+k \leq N}}^{N-k} x_{mn} x_{l(n+k)}^* \right|^2 \right) \\
 &= \arg \min_{\tilde{\mathbf{X}}} (I + II)
 \end{aligned} \tag{21}$$

منظور از $ISL(\tilde{\mathbf{x}}_m)$ و $ISL(\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{\mathbf{x}}_l)$ به ترتیب مجموع گلبه‌های جانبی تابع خودهمبستگی آنتن m ام و مجموع گلبه‌های جانبی

تابع همبستگی متقابل آنتن‌های m ام و l ام می‌باشد.

به علت طولانی شدن، معادلات جمله اول و دوم را به ترتیب I و II می‌نامیم. حال برای استفاده از روش بهینه‌سازی CD ، باید جملات

I و II بر حسب x_{td} و x_{td}^* و توان‌های آنها در صورت وجود بنویسیم. منظور از x_{td} نمونه زمانی d ام از آنتن t ام می‌باشد. از آنجا که

در روش CD فقط جمله x_{td} و متعاقبا x_{td}^* و توان‌های آنها متغیر فرض شده و بقیه ثابت فرض می‌شوند، باقی جملاتی که نمی‌توان آنها را

بر حسب x_{td} نوشت تاثیری در بهینه‌سازی درایه x_{td} نداشته لذا برای افزایش سرعت اجرای الگوریتم حذف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} \left| \sum_{\substack{n=1 \\ 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq n+k \leq N}}^{N-k} x_{mn} x_{m(n+k)}^* \right|^2 \\
 &= \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} \left| x_{td} x_{t(d+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d+k \leq N}} + x_{t(d-k)} x_{td}^* \Big|_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d-k \leq N}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{tn} x_{t(n+k)}^* \right|^2 \\
 &\quad + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq t}}^M \sum_{k=1}^{N-1} \left| \sum_{n=1}^{N-k} x_{mn} x_{m(n+k)}^* \right|^2
 \end{aligned} \tag{22}$$

باتوجه به قید دامنه ثابت، می‌توان x_{td} را با $e^{j\varphi_{td}}$ جایگزین کرد. لذا داریم:

$$I' = \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} \left| e^{j\varphi_{td}} x_{t(d+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d+k \leq N}} + x_{t(d-k)} e^{-j\varphi_{td}} \Big|_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d-k \leq N}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{tn} x_{t(n+k)}^* \right|^2 \tag{23}$$

از یک فاکتور گرفته و جملات حاصل را به ترتیب توان نزولی مرتب می‌کنیم:

$$I' = \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} \left| e^{j\varphi_{td}} \left(\sum_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d+k \leq N}} x_{t(d+k)}^* + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{tn} x_{t(n+k)}^* e^{-j\varphi_{td}} + \sum_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d-k \leq N}} x_{t(d-k)} e^{-j2\varphi_{td}} \right) \right|^2 \quad (24)$$

$$= \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} \left| e^{j\varphi_{td}} \right|^2 \left| \sum_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d+k \leq N}} x_{t(d+k)}^* + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{tn} x_{t(n+k)}^* e^{-j\varphi_{td}} + \sum_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d-k \leq N}} x_{t(d-k)} e^{-j2\varphi_{td}} \right|^2$$

می‌دانیم $|e^{j\varphi_{td}}|^2 = 1$ است، با جایگذاری $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{tn} x_{t(n+k)}^* = a_{1tdk}$ ، $\sum_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d+k \leq N}} x_{t(d+k)}^* = a_{0tdk}$ و $\sum_{\substack{1 \leq d \leq N \\ 1 \leq d-k \leq N}} x_{t(d-k)} = a_{2tdk}$ خواهیم داشت:

$$I' = \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} |a_{0tdk} + a_{1tdk} e^{-j\varphi_{td}} + a_{2tdk} e^{-j2\varphi_{td}}|^2 \quad (25)$$

که این همان بسط DFT سه ضریب $\{a_{0tdk}, a_{1tdk}, a_{2tdk}\}$ می‌باشد.

$$I' = \sum_{\substack{k=1-N \\ k \neq 0}}^{N-1} |FFT(\{a_{0tdk}, a_{1tdk}, a_{2tdk}\}, L)|^2 \quad (26)$$

در جهت پیاده‌سازی سریع‌تر الگوریتم بالا می‌توان به جای DFT از FFT ، L -نقطه‌ای استفاده کرد. برای تفاوت معنادار در سرعت اجرای FFT نسبت به DFT بهتر است که L به صورت توان دو باشد. البته شرط $1 \leq d \leq N$ ذکر شده در عبارات بالا همیشه برقرار است زیرا محدوده تغییرات t, d توسط خود ما تعیین می‌شود. t نماینده اندیس آنتن فرستنده و در محدوده ۱ تا M تغییر میکند و d نماینده اندیس زمانی شکل موج بوده و از ۱ تا N تغییر می‌کند. پس گذاشتن یا نگذاشتن این شرط تاثیری در محاسبات ندارد.

همین عملیات را برای II تکرار می‌کنیم.

$$II = \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^M \sum_{k=1-N}^{N-1} \left| \sum_{\substack{n=1 \\ 1 \leq n+k \leq N}}^{N-k} x_{mn} x_{l(n+k)}^* \right|^2$$

$$= \sum_{\substack{l=1 \\ m=t \\ l \neq t}}^M \sum_{k=1-N}^{N-1} \left| \sum_{\substack{1 \leq d+k \leq N}} x_{td} x_{l(d+k)}^* + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{N-k} x_{tn} x_{l(n+k)}^* \right|^2 \quad (27)$$

$$+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq t}}^M \sum_{k=1-N}^{N-1} \left| \sum_{\substack{1 \leq d-k \leq N}} x_{m(d-k)} x_{td}^* + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{mn} x_{l(n+k)}^* \right|^2$$

$$+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^M \sum_{k=1-N}^{N-1} \left| \sum_{n=1}^{N-k} x_{mn} x_{l(n+k)}^* \right|^2$$

مشابه با توضیحات قبلی، از آنجاکه در روش CD فقط جمله x_{td} و متعاقبا x_{td}^* و توان‌های آنها متغیر فرض شده و بقیه ثابت فرض می‌شوند، باقی جملاتی که نمی‌توان آن‌ها را بر حسب x_{td} نوشت تأثیری در بهینه‌سازی نداشته لذا برای افزایش سرعت اجرای الگوریتم حذف می‌شوند. با توجه به قید دامنه ثابت، می‌توان x_{td} را با $e^{j\varphi_{td}}$ جایگزین کرد. لذا داریم:

$$II' = \sum_{\substack{l=1 \\ m=t \\ l \neq t}}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ 1 \leq d+k \leq N}}^{N-1} \left| e^{j\varphi_{td}} x_{l(d+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq d+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{N-k} x_{tn} x_{l(n+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq n+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} \right|^2 \quad (28)$$

$$+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq t}}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ 1 \leq d-k \leq N}}^{N-1} \left| x_{m(d-k)} e^{-j\varphi_{td}} \Big|_{\substack{1 \leq d-k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{mn} x_{t(n+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq n+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} \right|^2$$

در جمله اول از یک فاکتور گرفته و جملات حاصل را به ترتیب توان نزولی مرتب می‌کنیم. در جمله دوم چون توان به صورت منفی است نیازی به فاکتور گرفتن نیست صرفاً آن را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$II' = \sum_{\substack{l=1 \\ m=t \\ l \neq t}}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ 1 \leq d+k \leq N}}^{N-1} \left| e^{j\varphi_{td}} \right|^2 \left| x_{l(d+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq d+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{N-k} x_{tn} x_{l(n+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq n+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} e^{-j\varphi_{td}} \right|^2 \quad (29)$$

$$+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq t}}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ 1 \leq d-k \leq N}}^{N-1} \left| \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{mn} x_{t(n+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq n+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} \right) + x_{m(d-k)} e^{-j\varphi_{td}} \Big|_{\substack{1 \leq d-k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} \right|^2$$

می‌دانیم $|e^{j\varphi_{td}}|^2 = 1$ است و با جایگذاری $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{N-k} x_{tn} x_{l(n+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq n+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} = b_{1tdk}$ و $x_{l(d+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq d+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} = b_{0tdk}$

و $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq d-k}}^{N-k} x_{mn} x_{t(n+k)}^* \Big|_{\substack{1 \leq n+k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} = c_{0tdk}$ و $x_{m(d-k)} \Big|_{\substack{1 \leq d-k \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} = c_{1tdk}$ خواهیم داشت:

$$II' = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m \\ m=t}}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ 1 \leq d+k \leq N}}^{N-1} |b_{0tdk} + b_{1tdk} e^{-j\varphi_{td}}|^2 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq t}}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ 1 \leq d-k \leq N}}^{N-1} |c_{0tdk} + c_{1tdk} e^{-j\varphi_{td}}|^2 \quad (30)$$

این همان بسط DFT ضرایب $\{b_{0tdk} \cdot b_{1tdk}\}$ و $\{c_{0tdk} \cdot c_{1tdk}\}$ می‌باشد.

$$II' = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m \\ m=t}}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ 1 \leq d+k \leq N}}^{N-1} |FFT(\{b_{0tdk} \cdot b_{1tdk}\}, L)|^2 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq t}}^M \sum_{\substack{k=1-N \\ 1 \leq d-k \leq N}}^{N-1} |FFT(\{c_{0tdk} \cdot c_{1tdk}\}, L)|^2 \quad (31)$$