



Robust Nonlinear Guidance Law with Impact Angle Constraint Based on Differential Game

Saeed Nasrollahi^{1*}, Amirhossein Yahyazadeh², Iman Mohammadzaman¹

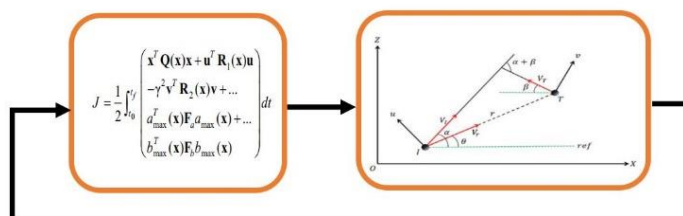
¹ Assistant Professor, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Malek-e-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

² M.Sc., Faculty of Electrical and Computer Engineering, Malek-e-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- Proposed robust nonlinear game guidance
- Considering pursuer, s aerodynamic
- Simulation for target with step, sinusoidal and random maneuver
- Considering impact angle constraint

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 21 August 2024

Received in revised form: 29 September 2024

Accepted: 17 October 2024

Available online: 17 October 2024

*Correspondence:

nasrollahi@mut.ac.ir

How to cite this article:

S. Nasrollahi, A. Yahyazadeh, I. Mohammadzaman. Robust Nonlinear guidance law with impact angle constraint based on differential game. Journal of Aerospace Mechanics. 2025; 20(4):43-69.

Keywords:

Final Terminal Guidance
Nonlinear robust control
State dependent Riccati equations
Uncertainty
Differential Game

ABSTRACT

With the advancement of technology, targets in various classes and with various features have entered the arena. Interceptors also have limitations such as dimensions, fuel quantity and maneuverability. Therefore, in order to approach the goal more effectively and achieve better performance, it is necessary to provide new guidance methods. The main approach of this research; The design of the robust guidance law with limited angle of attack is based on differential game theory and nonlinear optimal control. In this approach, the acceleration of the interceptor and the acceleration of the target are calculated as two separate inputs; The interceptor seeks to minimize the cost function and at the same time it is assumed that the target seeks to maximize the same cost function. For this purpose, considering nonlinear equations with uncertainty, a robust guidance law based on state-dependent Riccati equations is presented. Here, the approach is to transform the robust control problem into optimal control, and the problem is solved using the state-dependent Riccati equation optimal method. The presented law for two interceptor scenarios with constant speed and variable speed, taking into account the aerodynamics of the interceptor; simulation and its results for scenarios with large initial flight path angles of the interceptor and targets with step, sinusoidal and random maneuvers are presented. Also, at the end, by comparing the method proposed in this article with the augmented proportional navigation method, it is shown that the interceptor hits the maneuvering target in less time and less distance and shorter navigation path and has better performance.

This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution Non-Commercial (CC BY-NC) license.

Publisher: Imam Hossein University

© Authors





قانون هدایت غیر خطی مقاوم با قید زاویه برخورد محدود مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

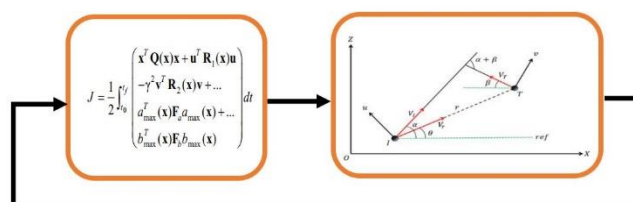
سعید نصراله‌ای^{۱*}، امیرحسین یحیی زاده^۲، ایمان محمدزمان^۳

^۱ استادیار، مجتمع دانشگاهی مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

^۲ کارشناسی ارشد، مجتمع دانشگاهی مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

^۳ دانشیار، مجتمع دانشگاهی مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- ارائه هدایت غیر خطی مقاوم مبتنی بر بازی دیفرانسیلی
- در نظر گرفتن آیرودینامیک رهگیر
- شبیه‌سازی برای اهداف با مانورهای پله، سینوسی و تصادفی
- در نظر گرفتن قید زاویه برخورد

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۳۱

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۷/۰۸

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۲۶

ارائه برخط: ۱۴۰۳/۰۷/۲۶

*نویسنده مسئول:

nasrollahi@mut.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

هدایت فاز نهایی

کنترل مقاوم غیر خطی

معادلات ریکاتی وابسته به حالت

نامعینی

بازی دیفرانسیلی

چکیده

با پیشرفت فن‌آوری، اهدافی در کلاس‌های گوناگون و با ویژگی‌های متنوع پا به عرصه میدان گذاشته‌اند. رهگیرها نیز خود دارای محدودیت‌هایی از قبیل ابعاد، مقدار سوخت و توانایی مانور اجرا هستند. لذا به‌منظور برخورد مؤثرتر به هدف و حصول عملکرد بهتر، ارائه روش‌های هدایتی جدید امری ضروری است. رویکرد اصلی این پژوهش؛ طراحی قانون هدایت مقاوم با زاویه برخورد محدود با استفاده از تئوری بازی دیفرانسیلی و کنترل بهینه غیر خطی است. در این رویکرد شتاب رهگیر و شتاب هدف به‌عنوان دو ورودی مجزا محاسبه می‌شوند؛ رهگیر به دنبال کمینه کردن تابع هزینه و هم‌زمان با آن فرض می‌شود که هدف به دنبال بیشینه کردن همان تابع هزینه است. برای این منظور، با در نظر گرفتن معادلات غیر خطی دارای نامعینی یک قانون هدایت مقاوم مبتنی بر معادلات ریکاتی وابسته به حالت ارائه شده است. در اینجا، رویکرد تبدیل مسئله کنترل مقاوم به کنترل بهینه است و با استفاده از روش بهینه معادلات ریکاتی وابسته به حالت به حل مسئله پرداخته شده است. قانون ارائه شده برای دو سناریو رهگیر با سرعت ثابت و سرعت متغیر، با در نظر گرفتن آیرودینامیک رهگیر، شبیه‌سازی و نتایج آن برای سناریوهایی با زوایای مسیر پرواز اولیه بزرگ رهگیر و اهداف با مانورهای پله، سینوسی و تصادفی ارائه شده است. همچنین، در انتها با مقایسه روش پیشنهادی در این مقاله با روش ناوبری تناسبی افزوده، نشان داده می‌شود که رهگیر در مدت‌زمان و فاصله از دست دهی کمتر و مسیر پیمایش کوتاه‌تر به هدف مانوری برخورد می‌کند و عملکرد مطلوب‌تری دارد.



۱- مقدمه

روش هدایت بر مبنای ناوبری تناسبی بی‌تردید یکی از مهم‌ترین قوانین هدایت در میان قوانین هدایت کلاسیک می‌باشد [۱]. اساس این شیوه، متناسب بودن شتاب عرضی موشک با نرخ چرخش خط دید جهت صفر کردن آن می‌باشد. قانون ناوبری تناسبی برای حداقل کردن خطای فاصله از دست‌دهی و انرژی مصرفی در مواجهه با اهداف بدون مانور یا دارای مانور کم، بهینه خواهد بود؛ اما برای اهداف با مانور بالا یا هدایت با قیود مشخص عملکرد مطلوبی ندارد [۲]. در مرجع [۳] برای ره‌گیری هدف توسط موشک هوا به هوا تحت قید زاویه برخورد مبتنی بر قانون هدایت ناوبری تناسبی ساختار متغیر، ارائه شده است. با گسترش علم هدایت و پیشرفت در تکنولوژی ساخت سلاح‌های جنگی و موشکی، به‌تدریج خواسته‌ها و قیود بیشتری به مسئله برخورد افزوده شده و از تئوری‌های متنوع کنترلی استفاده شده است. ابزار کنترلی و شیوه‌های متفاوتی مطرح شده که البته مهم‌ترین آن‌ها، روش کنترل مد لغزشی می‌باشد. یکی از اولین پژوهش‌ها در زمینه هدایت موشک با کمک ابزار کنترل مد لغزشی، در مرجع [۴] مطرح شده است. در مرجع [۵] شیوه جدیدی در مسئله هدایت تحت قید زاویه برخورد برای اهداف ثابت یا دارای سرعت کم با نام هدایت ناوبری تناسبی بایاس شده مطرح شده است. در مرجع [۶] هدایت ناوبری تناسبی، به همراه ضریب ناوبری متغیر برای انهدام اهداف ساکن توسط موشک زمین به زمین ارائه شده است. در مرجع [۷] قانون هدایت ناوبری تناسبی تطبیقی مطرح شده است. در مرجع [۸]، روش نوینی برای هدایت موشک در مقابل اهداف بدون مانور اما با سرعت بالاتر از سرعت موشک، در صفحه مختصات سه‌بعدی و تحت قید زاویه برخورد ارائه شده است. برخی از محققان از روش‌های کنترل بهینه برای توسعه قوانین هدایت خطی استفاده کرده‌اند. در مرجع [۹] از مدل خطی‌سازی شده برای هدایت یک موشک بالستیک استفاده شده است که در آن مسئله هدایت به‌عنوان مسئله کنترل بهینه مربعی خطی در نظر گرفته شده است. قانون هدایت بهینه در مرجع [۹] برای یک هدف ثابت یا سرعت‌پایین ارائه شده است. قانون هدایت بهینه دیگری در مرجع [۱۰] برای یک تعقیب‌کننده با خطای

کوچک در جهت اولیه برای یک هدف با مانور پایین پیشنهاد شده است. با استفاده از تئوری کنترل بهینه، یک قانون هدایتی صریح تعمیم‌یافته در مرجع [۱۱] برای به حداقل رساندن فاصله از دست‌دهی پیشنهاد شده است. همچنین در مرجع [۱۲] قانون هدایت بهینه برای اهداف با مانور بالا ارائه شده است. در مرجع [۱۳] فرم جدید و اصلاح یافته‌ای از قانون هدایت بهینه ارائه شده تا بدون در نظر گرفتن تأخیر سیستم، ره‌گیری اهداف را داشته باشد. در مرجع [۱۴] تئوری کنترل بهینه مربعی خطی جهت تعیین قانون هدایت موشک هوا به زمین در مقابل اهداف دارای مانور ارائه کرده است. در مرجع [۱۵]، یک قانون هدایت آشیانه‌یاب بر اساس معادله کلاسیک وابسته به حالت ریکاتی برای اهداف دارای مانور پیشنهاد کرده است. در مرجع [۱۶] قانون هدایت غیرخطی معادلات ریکاتی وابسته به حالت مبتنی بر بازی دیفرانسیلی با قید زاویه برخورد محدود ارائه شده است. در این مرجع نامعینی در مدل در نظر نگرفته شده است.

در تدوین قوانین هدایت، از رویکردهای کنترل غیرخطی مختلفی نیز استفاده شده است، مانند شبکه عصبی [۱۷]، کنترل پیش‌بین [۱۸] و [۱۹]، کنترل پس‌گام [۲۰]، کنترل مد لغزشی [۲۱]. کنترل مد لغزشی یک روش کنترل مقاوم است که در سیستم‌های غیرخطی حاوی عدم قطعیت استفاده می‌شود. چترینگ به وجود آمده در دستور شتاب ناشی از رویکرد ممکن است مودهای با فرکانس بالا در سیستم را تحریک کند که در مرحله مدل‌سازی نادیده گرفته می‌شوند. برای کاهش چترینگ، معمولاً از یک تابع اشباع به‌جای تابع علامت استفاده می‌شود [۲۲]. اما این روش دقت قانون هدایت را کاهش می‌دهد. درحالی‌که، یک قانون هدایت بازی دیفرانسیلی یک مسئله کنترل بهینه دوطرفه را حل می‌کند، یعنی دستور هدایت بهینه تعقیب‌کننده و مانور بهینه هدف را به‌طور هم‌زمان می‌یابد. در تئوری بازی دیفرانسیلی هر یک از آن‌ها برای بیشتر کردن سهم خود از نتیجه بازی متناسب با حرکت رقیب، بازی می‌کند [۲۳].

کاربرد بازی دیفرانسیل برای تعقیب و گریز خطی اولین بار در [۲۴] پیشنهاد شد. در مرجع [۲۵]، قانون هدایت بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم درجایی که مسیرهای تعقیب‌کننده و هدف در امتداد خط دید اولیه خطی می‌شوند،

هدایت سه بعدی زمان حقیقی مبتنی بر اطلاعات زاویه با استفاده از تئوری بازی دیفرانسیلی جهت برخورد با اهداف مانوردار ارائه شده است. قانون هدایت بهینه بر اساس روش بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم و حل عددی معادله ریکاتی در مرجع [۳۹] پیشنهاد شده است. در مرجع [۴۰] یک قانون هدایت بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم بر اساس محدودیت‌های زاویه ارائه شده است. در مرجع [۴۱] یک قانون هدایت غیرخطی پیش‌بین مبتنی بر بازی دیفرانسیلی با در نظر گرفتن نامعینی در مدل ارائه شده است. در این مرجع رویکرد تبدیل کردن مسئله هدایت مقاوم به هدایت بهینه با در نظر گرفتن نامعینی در تابع هزینه است. مرجع [۱۶] نزدیک‌ترین کار به این پژوهش است. در مرجع [۱۶] از روش معادلات ریکاتی وابسته به حالت برای حل مسئله هدایت غیرخطی بدون در نظر گرفتن نامعینی استفاده کرده است، این در حالی است که در پژوهش پیش رو نامعینی در مسئله در نظر گرفته شده و یک قانون هدایت مقاوم مبتنی بر معادلات ریکاتی وابسته به حالت ارائه شده است.

در این مقاله، طراحی قانون هدایت مقاوم با زاویه برخورد محدود با استفاده از تئوری بازی دیفرانسیلی و کنترل بهینه غیرخطی ارائه شده است. در این رویکرد شتاب ره‌گیر و شتاب هدف به عنوان دو ورودی مجزا محاسبه می‌شوند؛ ره‌گیر به دنبال کمینه کردن تابع هزینه و هم‌زمان با آن فرض می‌شود که هدف به دنبال بیشینه کردن همان تابع هزینه است. برای این منظور، با در نظر گرفتن معادلات غیرخطی دارای نامعینی یک قانون هدایت مقاوم مبتنی بر معادلات ریکاتی وابسته به حالت ارائه شده است. قانون ارائه شده برای دو سناریو ره‌گیر با سرعت ثابت و سرعت متغیر، با در نظر گرفتن آیرودینامیک ره‌گیر، شبیه‌سازی و نتایج آن برای سناریوهایی با زوایای مسیر پرواز اولیه مختلف ره‌گیر و اهداف با مانورهای پله، سینوسی و تصادفی ارائه شده است.

این مقاله در ادامه شامل بخش‌های ذیل است: در بخش دوم مبانی مسئله، موضوع بازی دیفرانسیلی و رویکرد پیشنهادی بیان می‌شود. در بخش سوم هندسه درگیری و فرم ضریب وابسته به حالت بیان می‌شود. در بخش چهارم نتایج شبیه‌سازی برای سناریوهای مختلف بیان شده است. در بخش پایانی نیز جمع‌بندی ارائه شده است.

به دست آمده است. در مرجع [۲۶]، یک قانون هدایت برای موشکی که دارای سیستم‌های کنترل کانارد و دم است، ارائه شده است. در مرجع [۲۷] یک قانون هدایت با کمک تئوری بازی‌های مجموع صفر و به همراه فرض عدم قطعیت در شکل مانور هدف جهت کاهش زمان پرواز از طریق طی مسیر مستقیم بین دو طرف بازی بر روی خط دید ارائه شده است. در مراجع [۲۸] و [۲۹]، از قانون هدایت بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم برای ایجاد زاویه ره‌گیری نهایی استفاده شده است. یک قانون هدایت خطی بر اساس بازی دیفرانسیل که تأخیر خلبان خودکار را در نظر می‌گیرد در مراجع [۳۰] و [۳۱] ارائه شده است. برای به دست آوردن قانون هدایت غیرخطی بازی دیفرانسیل برای یک هدف مانوری، از روش معادله ریکاتی وابسته به حالت در مرجع [۱۶] استفاده شده است. این قانون هدایت به زمان تخمین زده شده بستگی ندارد؛ با این حال، عدم قطعیت‌های تطبیق یافته را در نظر نمی‌گیرد. در مرجع [۳۲] قانون هدایت به کمک تئوری بازی‌ها و استفاده از تکنیک مد لغزشی ارائه شده است. در مرجع [۳۳] قانون هدایت با حساسیت کاهش یافته با هدف کاهش میزان حساسیت سیستم به خطای تخمین زمان نهایی برخورد ارائه شده است. یک قانون هدایت بازی دیفرانسیل مقاوم که از برنامه‌نویسی پویا تطبیقی استفاده می‌کند، در حضور عدم قطعیت‌های تطبیق یافته، در مرجع [۳۴] پیشنهاد شده است. در این مرجع خطای جهت اولیه کوچک در نظر گرفته شده و تعقیب‌کننده سرعت ثابت دارد. از برنامه‌نویسی پویا تطبیقی محدود در مرجع [۳۵] برای پیشنهاد یک قانون هدایت استفاده شده است. قانون هدایت بازی دیفرانسیلی بر اساس کنترل پیش‌بین غیرخطی در مرجع [۳۶] پیشنهاد شده است که در آن از روش گرادیان نزولی برای بهینه‌سازی استفاده می‌شود؛ زمان تخمین زده شده و فاصله نسبی به عنوان دو تابع هزینه متفاوت در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، در این مرجع عدم قطعیت تطبیق یافته در نظر گرفته نشده است. در مرجع [۳۷] یک قانون هدایت به طوری که خط دید به عنوان تابع هزینه انتخاب شده است؛ هدف از هدایت موشک ایجاد تضمین جهت صفر شدن خط دید به کمک روش قانون هدایت بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم است. در مرجع [۳۸] یک قانون

۲- مبانی علمی مسئله

سیستم غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [۴۲]:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + B(x)W(x) \quad (۱)$$

که در آن $B(x)W(x)$ عدم قطعیت در دینامیک سیستم را مدل می‌کند. از آنجایی که عدم قطعیت در فضای برد $B(x)$ است، شرط سازگاری برقرار است. فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

فرض ۱: $A(0) = 0$ و $W(0) = 0$ به طوری که $X = 0$ نقطه تعادل است (اگر مسئله کنترل مقاوم حل پذیر باشد، $X = 0$ تنها نقطه تعادل خواهد بود).

فرض ۲: عدم قطعیت $W(x)$ محدود است؛ یعنی تابع غیر منفی $W_{\max}(x)$ وجود دارد به صورتی که

$$\|W(x)\| \leq W_{\max}(x) \quad (۲)$$

هدف حل مسئله کنترل مقاوم زیر برای پایدارسازی سیستم با عدم قطعیت می‌باشد. قانون کنترل پسخورد $u = u_0(x)$ چنان تعیین می‌شود که سیستم حلقه بسته

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u_0(x) + B(x)W(x) \quad (۳)$$

برای هر عدم قطعیت $W(x)$ که در $\|W(x)\| \leq W_{\max}(x)$ صدق می‌کند، پایدار مجانبی فراگیر باشد. مسئله کنترل مقاوم فوق به طور غیرمستقیم و با تبدیل آن به مسئله کنترل بهینه حل می‌شود. برای سیستم نامی ذیل:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (۴)$$

قانون کنترل پسخورد $u = u_0(x)$ چنان تعیین می‌شود که تابع هزینه

$$J = \int_0^{\infty} (W_{\max}(x)^2 + x^T Q(x)x + u^T R(x)u) dt \quad (۵)$$

حداقل گردد. رابطه بین مسئله کنترل مقاوم و مسئله کنترل بهینه در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱: اگر جواب مسئله کنترل بهینه وجود داشته باشد، این جواب، جواب مسئله کنترل مقاوم نیز می‌باشد [۴۲].
اثبات این قضیه و همچنین، اثبات پایداری آن در مرجع [۴۲] بیان شده است.

۲-۱- مسئله بازی دیفرانسیلی

یک بازی تعقیب و گریز بین تعقیب کننده P و فرار کننده E را در نظر بگیرید که در زمان t_0 شروع می‌شود. بازی به نفع P

تمام می‌شود، اگر حالت‌ها یا پارامترهای خاص مربوط به درگیری معیارهای خاصی که توسط مجموعه B تعریف شده است را برآورده کند. برای رسیدن به مجموعه B یا برنده شدن، P بردار کنترل u خود را طوری تعیین می‌کند که حالت‌های خاصی را به صفر تنظیم کند؛ درحالی که تلاش کنترلی کل آن در طول مدت بازی به حداقل می‌رسد. از سوی دیگر، E باید کنترل‌های v خود را انتخاب کند تا آن حالت‌ها را از صفر دور کند تا از آن فرار کند و درعین حال تلاش کنترلی خود را به حداکثر برساند.

در مسئله بازی دیفرانسیلی ره‌گیر ابتدا سعی در کاهش فاصله دارد؛ یعنی $\min_v \max_u J(u, v)$ و این استراتژی برای هدف مشخص می‌شود. بنابراین، هدف تصمیم به افزایش فاصله می‌گیرد یعنی $\max_u \min_v J(u, v)$ ، بنابراین بازی بین هدف و ره‌گیر اتفاق می‌افتد که به صورت زیر بیان کرد:

$$\bar{J} = \min_u \max_v J(u, v) \geq \max_v \min_u J(u, v) = \underline{J} \quad (۶)$$

در این بازی u سعی می‌کند J را کمینه کند و نیز v سعی می‌کند J را کمینه کند، بنابراین این بازی، مجموع - صفر است. اگر مقدار بالای بازی $\bar{J}$ مساوی با مقدار پایین بازی $\underline{J}$ باشد، خواهیم داشت:

$$J^* = J(u^*, v^*) = \bar{J} = \underline{J} \quad (۷)$$

جفت (u^*, v^*) ، پاسخ نقطه زینی نامیده می‌شود و بازی یک نقطه زینی را می‌پذیرد. پاسخ نقطه زینی هردو نامعادله نقطه زینی زیر را برآورده می‌کند:

$$J(u^*, v) \leq J(u^*, v^*) \leq J(u, v^*) \quad (۸)$$

که $J(u^*, v^*)$ مقدار بازی مجموع-صفر نامیده می‌شود. منظور از نامعادله زینی (۸) آن است که: اگر تعقیب کننده u استراتژی دیگری غیر از u^* انتخاب کند، گریزنده می‌تواند از استراتژی v^* استفاده کند که منجر به برتری در رقابت است، یعنی $J(u^*, v^*) \leq J(u, v^*)$ به طور مشابه برای گریزنده داریم، اگر گریزنده $v \neq v^*$ را انتخاب کند، آنگاه ره‌گیر می‌تواند u^* را به کار ببرد که منجر به $J(u^*, v) \leq J(u^*, v^*)$ می‌شود. بنابراین هر دو بازیکن استراتژی نقطه زینی را برقرار می‌کنند تا ضرر را حداقل کنند.

این دو بازیکن با اهداف متضاد غیرهمکار را می‌توان در یک تابع هدف واحد گنجانده. تابع هدف به شکل زیر فرض می‌شود:

اگر راه‌حلی برای مسئله بازی دیفرانسیل حداکثر- حداقل، به صورت زیر وجود داشته باشد،

$$\max_{v \in L_2} \min_{u \in L_2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q(x)x + u^T u - v^T v) dt \quad (13)$$

حال اگر $f(x) \in C^1$ به گونه‌ای باشد که $f(0) = 0$ برقرار گردد، به شرطی که قیدها در معادله (۱۰)، شرط موجود در معادله (۱۲) و همچنین معادله (۱۱) را برقرار کند، آنگاه $f(x)$ را می‌توان (به طور غیرمنفرد برای $n > 1$) به عنوان ضریب x به صورت $f(x) = A(x)x$ در نظر گرفت. سپس معادله (۱۰) را می‌توان به صورت ضریب وابسته به حالت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x)u + C(x)v \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (14)$$

برای اینکه یک فرم ضریب وابسته به حالت قابل قبول باشد، معیارهای کنترل پذیری نقطه‌ای و رویت پذیری نقطه‌ای باید برقرار شوند. توجه داشته باشید که فرم ضریب وابسته به حالت ارائه شده در معادله (۱۴) شبیه به روش خطی سازی توسعه یافته ارائه شده در [۴۸] و استفاده شده در [۲۸] است.

۲-۱-۱- پاسخ معادله ریکاتی وابسته به حالت

بر اساس بازی دیفرانسیلی یک مسئله کنترل بهینه دوطرفه به یک مسئله واحد یک طرفه تبدیل می‌شود، درواقع به طور همزمان دستور هدایت بهینه رهگیر و مانور بهینه گریزنده محاسبه می‌شود. حال برای حل تابع هزینه از روش معادله ریکاتی وابسته به حالت استفاده شده است. اگر برای معادله ریکاتی وابسته به حالت ذیل یک راه حل منحصر به فرد، متقارن، مثبت معین $P(x) \in R^{n \times n}$ وجود داشته باشد:

$$\begin{aligned} A^T(x)P(x) + P(x)A(x) - \\ P(x) \left(B(x)R_1^{-1}(x)B^T(x) - \right. \\ \left. \gamma^{-2}C(x)R_2^{-1}(x)C^T(x) \right) P(x) + Q(x) \end{aligned} \quad (15)$$

سپس استراتژی رهگیر وابسته به حالت x ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_* = R_1^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \quad (16)$$

قضیه ۱: در حالت کلی چند متغیره، استراتژی بازخورد غیرخطی معادله ریکاتی وابسته به حالت پیشنهادی برای رهگیر، ارائه شده در معادله (۱۶)، شرایط لازم مرتبه اول زیر را برآورده می‌کند:

$$u_* = \arg \min_u H \quad (17)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q(x)x + u^T R_1(x)u - \gamma^2 v^T R_2(x)v) dt \quad (9)$$

با توجه به اینکه دو بازیکن وجود دارد و هرکدام استراتژی متفاوتی برای خود دارند، از آن نظر هدف رهگیر، به حداقل رساندن تابع هزینه J است، درحالی که هدف گریزنده به حداکثر رساندن تابع هزینه در معادله (۹) است. در این مسئله دو تابع هزینه به یک تابع هزینه تبدیل شده است. در معادله (۹)، $\gamma > 0$ معیاری از قابلیت مانور رهگیر نسبت به گریزنده است، هر چه مقدار γ بیشتر باشد، توانایی مانور گریزنده کمتر است. انتخاب γ باید بر اساس قابلیت مانور هدف باشد. توجه داشته باشید که تابع هدف شامل وزن‌های وابسته به حالت است. بنابراین معادلات حالت برای این مسئله که برای دو بازیکن است به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + B(x)u + C(x)v \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (10)$$

در معادلات (۹) و (۱۰)، $x \in R^n$ بردار حالت است و $u \in R^{n_p}$ و $v \in R^{n_e}$ به ترتیب بردارهای کنترل تعقیب کننده و گریزنده است [۴۳]، [۴۴] و [۴۵]. از آنجایی که دو بازیکن با تصمیماتی مستقل از هم در نظر گرفته شده‌اند بنابراین معادله حالت (۱۰) با دو کنترل کننده وجود دارد که در این معادله $C(x)v$ ترم مربوط به ورودی کنترلی برای گریزنده است که در معادله حالت قرار گرفته است. برای مسئله بازی دیفرانسیل غیرخطی فعلی، که رابطه نزدیکی با مسئله H_{∞} غیرخطی [۴۶] دارد، فرمول بندی در افق نامتناهی را می‌توان در راستای [۴۷] توجیه کرد. اگر نرم L_2 برای $y = [\Xi(x)xu]$ جایی که $\Xi(x)^T \Xi(x) = Q(x)$ را برآورده می‌کند، آنگاه برای یک مسئله کنترلی، ورودی v توسط یک ضریب γ محدود می‌شود، بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} y^T y dt = \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q(x)x + u^T u) dt \\ \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{t_f} v^T v dt \end{aligned} \quad (11)$$

این شرطی که در معادله (۱۱) برقرار شده است، اگر یک کنترل کننده پایدار داخلی وجود داشته باشد، برای همه $t_0 < t_f < \infty$ و $v \in L_2(t_0, t_f)$ شرط زیر را برآورده می‌شود:

$$\int_{t_0}^{\infty} (x^T Q(x)x + u^T u) dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{\infty} v^T v dt \quad (12)$$

یک افق نامحدود حل کنیم. برای این منظور، یک سیستم نامی بدون عدم قطعیت (۴) در نظر می‌گیریم. اولین بازیکن $u(t)$ را طوری انتخاب می‌کند تا حالت‌ها را به صفر برساند. در عوض، بازیکن دوم $v(t)$ را طوری انتخاب می‌کند تا آن حالت‌ها را از صفر منحرف کند. این دو هدف مختلف را می‌توان در یک تابع هزینه به صورت زیر ادغام کرد [۴۱]:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \gamma^2 \mathbf{v}^T \mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \mathbf{v} + \mathbf{W}_{\max}(\mathbf{x})^2) dt \quad (23)$$

این تابع خطای ردیابی و تلاش کنترلی بازیکن اول را به حداقل می‌رساند و تلاش کنترلی بازیکن دوم را به طور هم‌زمان به حداکثر می‌رساند. همچنین، $W_{\max}(\mathbf{x})^2 = a_{\max}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_a a_{\max}(\mathbf{x}) + b_{\max}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_b b_{\max}(\mathbf{x})$ عدم قطعیت‌ها را نشان می‌دهد. علاوه بر این، ماتریس مثبت نیمه معین $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ ماتریس وزن دهی حالت است. ماتریس‌های مثبت معین $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ ماتریس‌های وزن دهی کنترل هستند، همچنین $\mathbf{F}_a$ و $\mathbf{F}_b$ ماتریس‌های وزن دهی نامعینی هستند. حال همیلتونی تابع هزینه در (۲۳) را برای سیستم نامی (۴) به دست می‌آوریم که به صورت زیر است:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \frac{\gamma^2}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \mathbf{v} + a_{\max}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_a a_{\max}(\mathbf{x}) + b_{\max}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_b b_{\max}(\mathbf{x}) + \lambda^T (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{v}) \quad (24)$$

رابطه (۲۴) شامل خطای ردیابی، دستور شتاب ره‌گیر، دستور شتاب هدف، ماکزیمم مقدار نامعینی مدل و مدل دینامیکی سیستم است.

۳- هندسه درگیری مسئله هدایت

در شکل (۱) هندسه درگیری ره‌گیر و هدف نشان داده شده است که در آن V_I و V_T بردارهای سرعت هستند، α و β زاویه‌های مسیر پروا، $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ، به ترتیب بردارهای کنترل عمود بر بردارهای سرعت ره‌گیر و هدف هستند. همچنین، زاویه خط دید با θ و نرخ خط دید با σ نمایش داده شده است. فاصله هدف از ره‌گیر در امتداد خط دید را با r نمایش می‌دهیم؛ همچنین ره‌گیر باید هدف را با زاویه η^c مورد اصابت قرار دهد. سینماتیک سیستم غیرخطی جرم نقطه‌ای است و

که در آن H همیلتونی سیستم است.

اثبات: همیلتونی مرتبط با مسئله حداقل- حداکثر غیرخطی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \frac{\gamma^2}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \mathbf{v} + \lambda^T (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{v}) \quad (18)$$

که در آن $\lambda \in R^n$ بردار افزوده است. برای مسئله حداقل- حداکثر غیرخطی، فرض کنید که بردار افزوده λ با بردار حالت $\mathbf{x}$ با رابطه زیر مرتبط است:

$$\lambda = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (19)$$

برای به حداقل رساندن H ، $\mathbf{u}$ باید رابطه زیر را برقرار کند:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \lambda \quad (20)$$

به طور مشابه، استراتژی گریزنده برای به حداکثر رساندن H به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{v}_{\text{worst}} = \gamma^{-2} \mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{C}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (21)$$

۲-۱-۲- پاسخ معادله ریکاتی وابسته به حالت مقاوم

مدل ریاضی غیرخطی یک بازی دیفرانسیلی دو بازیکن باوجود عدم قطعیت با مجموع صفر به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) (\mathbf{u} + \mathbf{a}(\mathbf{x})) + \mathbf{C}(\mathbf{x}) (\mathbf{v} + \mathbf{b}(\mathbf{x})) \quad (22)$$

که در آن $\mathbf{x} \in R^n$ بردار حالت مسئله است، $\mathbf{u} \in R^m$ و $\mathbf{v} \in R^k$ به ترتیب بردارهای کنترل بازیکن اول و دوم هستند. $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ توابع غیرخطی هستند و $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}_1(\mathbf{x}) \dots \mathbf{a}_m(\mathbf{x})]^T \in R^m$ و $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{x}) \dots \mathbf{b}_k(\mathbf{x})]^T \in R^k$ عدم قطعیت‌های غیرخطی هستند. مقادیر ماکزیمم عدم قطعیت‌های هر دو توسط بردارهای $\mathbf{a}_{\max}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}_{1,\max}(\mathbf{x}) \dots \mathbf{a}_{m,\max}(\mathbf{x})]^T$ و $\mathbf{b}_{\max}(\mathbf{x}) = [\mathbf{b}_{1,\max}(\mathbf{x}) \dots \mathbf{b}_{k,\max}(\mathbf{x})]^T$ بیان می‌شوند، به طوری که $\|a_i(\mathbf{x})\| \leq a_{i,\max}(\mathbf{x})$ برای $i = 1, \dots, m$ و $\|b_j(\mathbf{x})\| \leq b_{j,\max}(\mathbf{x})$ برای $j = 1, \dots, k$. در اینجا، رویکرد ما این است که بر اساس مطالب بیان شده در ابتدای بخش، مسئله کنترل مقاوم را به یک مسئله کنترل بهینه تبدیل می‌کنیم و آن را به صورت معادله ریکاتی وابسته به حالت در

نزدیک‌ترین مجاورت آن‌ها تعریف می‌شود، حال اگر هم ره‌گیر و هم هدف مانور دیگری از لحظه t به بعد انجام ندهند، داریم:

$$\eta = (\alpha - \theta) + (\beta + \theta) = \alpha + \beta \quad (30)$$

خطای بین زاویه برخورد نهایی پیش‌بینی‌شده η و زاویه برخورد مطلوب η^c ، برابر است با:

$$\xi = \eta - \eta^c = \alpha + \beta - \eta^c \quad (31)$$

از بیان $r_{miss}(t)$ در معادله (۲۹)، می‌توان مشاهده کرد که تنظیم σ به صفر دلالت بر تنظیم $r_{miss}(t)$ به مقدار صفر دارد. از طرفی تنظیم σ به صفر درحالی‌که $V_r < 0$ است، منجر به برخورد می‌شود. علاوه بر این، باید روی صفر تنظیم شود تا به ره‌گیری در زاویه برخورد موردنظر برسد. با توجه به اینکه باید مقادیر σ و ξ باید به صفر میل کند تا هدف در زاویه برخورد مطلوب مورد اصابت قرار گیرد، بردار حالت به صورت ذیل تعریف می‌شود.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \xi \end{bmatrix} \quad (32)$$

به‌طوری‌که معادله دینامیکی σ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r\sigma) &= \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) \\ &= \frac{d}{dt}[V_T \sin(\beta + \theta) - V_I \sin(\alpha - \theta)] \\ &= \dot{r}\sigma + \dot{\sigma}r = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ &= (V_T \cos(\beta + \theta) + V_I \cos(\alpha - \theta))\dot{\theta} \\ &\quad + \dot{\beta}V_T \cos(\beta + \theta) - \dot{\alpha}V_I \cos(\alpha - \theta) \\ &= \dot{\sigma} = \ddot{\theta} = -\frac{2r\dot{\theta}}{r} - \frac{u \cos(\alpha - \theta)}{r} + \frac{v \cos(\beta + \theta)}{r} \end{aligned} \quad (33)$$

همچنین، معادله دینامیکی ξ نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \xi &= \eta - \eta^c = \alpha + \beta - \eta^c \xrightarrow{\text{Derivative}} \dot{\xi} \\ &= \dot{\alpha} + \dot{\beta} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\rightarrow \dot{\xi} = \frac{u}{V_I} + \frac{v}{V_T}$$

بنابراین، معادلات حالت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -\frac{2V_r}{r}\sigma - \frac{\cos(\alpha - \theta)}{r}u + \frac{\cos(\beta + \theta)}{r}v \\ \dot{\xi} &= \frac{u}{V_I} + \frac{v}{V_T} \end{aligned} \quad (35)$$

که ماتریس‌های $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ، $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ، $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ به صورت ذیل است:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{2V_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

معادلات درگیری ره‌گیر-هدف به صورت زیر ارائه می‌شود [۱۶]:

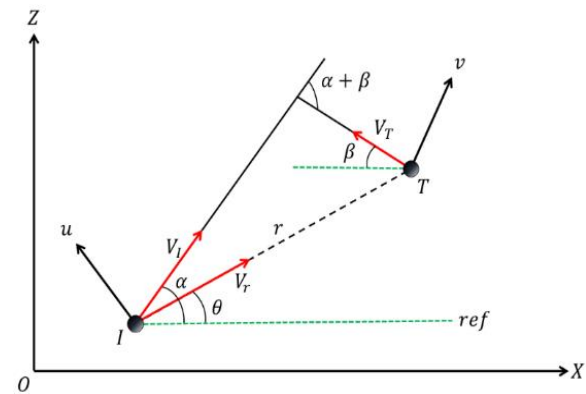
$$\dot{r} = V_r = -V_T \cos(\beta + \theta) - V_I \cos(\alpha - \theta) \quad (25)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_T \sin(\beta + \theta) - V_I \sin(\alpha - \theta)}{r} \quad (26)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{u}{V_I} \quad (27)$$

$$\dot{\beta} = \frac{v}{V_T} \quad (28)$$

در شکل ۱ هدف با شتاب v در حال مانور می‌باشد از طرفی ره‌گیر نیز قصد دارد تا با شتاب u به هدف نزدیک شود در اینجا گریزنده سعی دارد با انتخاب یک استراتژی جدید از ره‌گیر دور شود. اول اینکه ره‌گیر قصد کاهش فاصله خود با هدف مانوری را دارد اما استراتژی گریزنده افزایش این فاصله است. همچنین، در این مسئله ردیابی زاویه برخورد بین ره‌گیر و گریزنده فرموله شده است، درواقع ره‌گیر قصد دارد تا موقعیت خود را در زاویه برخورد مطلوب نگهدار ولی گریزنده سعی بر تغییر این مقدار دارد.



شکل (۱): هندسه درگیری هدف و ره‌گیر.

تعریف ۱: مقدار اثر تلاش صفر، تعیین‌شده توسط r_{miss} ، در یک لحظه t به‌عنوان نزدیک‌ترین فاصله بین ره‌گیر و هدف تعریف می‌شود اگر از لحظه t به بعد، هم ره‌گیر و هم هدف مانور ندهند. حال عبارت $r_{miss}(t)$ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$r_{miss}(t) = \frac{r^2 \sigma}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sigma^2}} \quad (29)$$

کمیت دیگر مربوط به هدایت محدود با زاویه برخورد در اینجا بر اساس مرجع [۴۹] تعریف‌شده است.

تعریف ۲: زاویه برخورد نهایی پیش‌بینی‌شده در یک لحظه t به‌عنوان زاویه بین بردارهای سرعت ره‌گیر و هدف در لحظه

۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش دو سناریو اصلی در نظر گرفته شده است. در سناریو اول فرض می شود سرعت ره گیر ثابت است و در سناریو دوم آیرودینامیک ره گیر نیز در نظر گرفته می شود که منتج به متغیر بودن سرعت می شود. همچنین، ذیل هر کدام از دو سناریو بالا به ازای شتاب های مختلف هدف که شامل: هدف بدون مانور، مانور پله، سینوسی و تصادفی هستند شبیه سازی های متعددی برای اعتبار سنجی قانون هدایت ارائه شده، انجام شده است. در اینجا فرض می شود که α ، θ و V_I را می توان اندازه گیری کرد و مقادیر β ، $\dot{\theta}$ و V_T نیز از تخمین در دسترس هستند. برای شبیه سازی؛ خلبان خودکار با مرتبه اول در نظر گرفته شده است. خروجی خلبان خودکار ره گیر را با a_I و خروجی خلبان خودکار هدف را با a_T نشان می دهیم. ثابت های زمانی خلبان خودکار ره گیر و هدف به ترتیب τ_I و τ_T نشان داده می شود. زوایای مسیر پرواز اولیه ره گیر و هدف به ترتیب α_0 و β_0 می باشند. بر این اساس معادلات حرکت موشک و هدف به ترتیب در معادله (۴۷) و (۴۸) بیان می شوند:

$$\begin{aligned}\dot{x}_I &= V_I \sin \alpha \\ \dot{z}_I &= V_I \cos \alpha \\ \dot{\alpha} &= \frac{a_I}{V_I} \\ \dot{a}_I &= \frac{\dot{u} - a_I}{\tau_I}\end{aligned}\quad (47)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_T &= V_T \sin \beta \\ \dot{z}_T &= V_T \cos \beta \\ \dot{\beta} &= \frac{a_T}{V_T} \\ \dot{a}_T &= \frac{\dot{u} - a_T}{\tau_T}\end{aligned}\quad (48)$$

۴-۱- نتایج شبیه سازی به ازای سرعت ثابت

ره گیر

در این بخش با توجه به ثابت فرض کردن سرعت ره گیر، برای حالت های مختلف حرکتی هدف، شبیه سازی صورت گرفته است و با توجه به سناریو های درگیری در ادامه به تحلیل و بررسی این شبیه سازی ها می پردازیم. در این بخش چهار سناریو شامل: هدف بدون شتاب، شتاب پله، سینوسی و تصادفی در نظر گرفته شده است.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{\cos(\alpha - \theta)}{r} \\ \frac{1}{V_I} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta + \theta)}{r} \\ \frac{1}{V_T} \end{bmatrix} \quad (38)$$

در رابطه (۲۲) مدل سینماتیکی مسئله هدایت مبتنی بر بازی دیفرانسیلی با وجود نامعینی ارائه شد. بر اساس مرجع [۴۱]، عدم قطعیت های وارد بر مسئله به صورت زیر مدل شده اند:

$$a(\mathbf{x}) = \delta_1 x_1 \cos(\delta_2 x_1 + \delta_3 x_1^2) \quad (39)$$

$$b(\mathbf{x}) = \delta_4 x_1 \sin x_1 \quad (40)$$

همچنین پارامترهای نامعین در معادلات (۳۹) و (۴۰) به صورت $\delta_1 \in [-10, 10]$ ، $\delta_2 \in [-25, 25]$ ، $\delta_3 \in [-15, 15]$ و $\delta_4 \in [-1, 1]$ می باشند که مقادیر آن بر اساس مرجع [۴۱] است. حال برای تبدیل مسئله کنترل مقاوم به مسئله کنترل بهینه و باز نویسی تابع هزینه جدید بر اساس مقادیر پارامترهای نامعین، ماکزیمم مقادیر عدم قطعیت های $a(\mathbf{x})$ و $b(\mathbf{x})$ به شکل زیر بیان می شوند:

$$\|a(\mathbf{x})\| = |\delta_1 x_1 \cos(\delta_2 x_1 + \delta_3 x_1^2)| \leq 10|x_1| = a_{\max} \quad (41)$$

$$\|b(\mathbf{x})\| = |\delta_4 x_1 \sin x_1| \leq |x_1| = b_{\max} \quad (42)$$

بنابراین، قانون دستور هدایت $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ برای سیستم نامی چنان بیان می شود که تابع هزینه زیر حداقل گردد:

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \\ &\gamma^2 \mathbf{v}^T \mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \mathbf{v} + a_{\max}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_a a_{\max}(\mathbf{x}) + \\ &b_{\max}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_b b_{\max}(\mathbf{x})) dt\end{aligned}\quad (43)$$

همچنین ماتریس های وزن دهی به صورت $\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_b = 1$ و $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = 1$ تنظیم می شوند. حال با توجه به مقادیر $a_{\max}$ و $b_{\max}$ ، تابع هزینه به صورت زیر تبدیل می گردد:

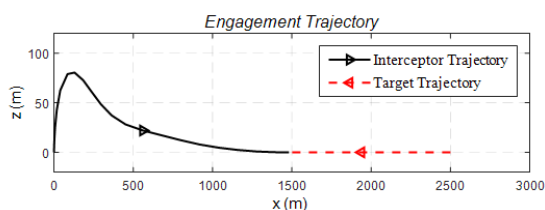
$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \\ &\gamma^2 \mathbf{v}^T \mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \mathbf{v} + 100x_1^2 \\ &+ x_1^2) dt\end{aligned}\quad (44)$$

با در نظر گرفتن $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} q_\sigma & 0 \\ 0 & q_\xi \end{bmatrix}$ ، داریم:

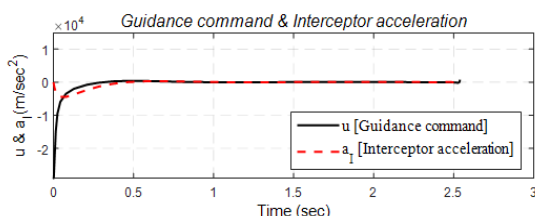
$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_{NEW}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \gamma^2 \mathbf{v}^T \mathbf{R}_2(\mathbf{x}) \mathbf{v}) dt \quad (45)$$

که $\mathbf{Q}_{NEW}(\mathbf{x})$ برابر است با:

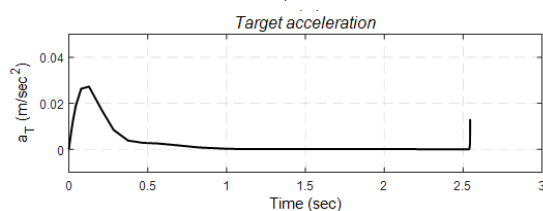
$$\mathbf{Q}_{NEW}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 101x_1 + q_\sigma & 0 \\ 0 & q_\xi \end{bmatrix} \quad (46)$$



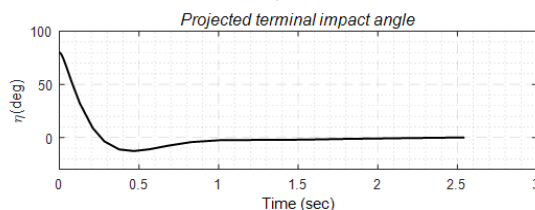
(الف)



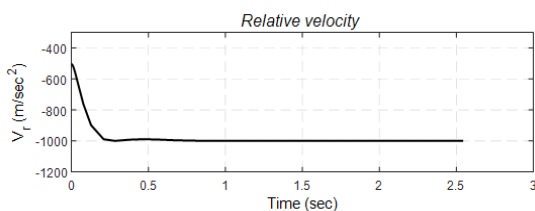
(ب)



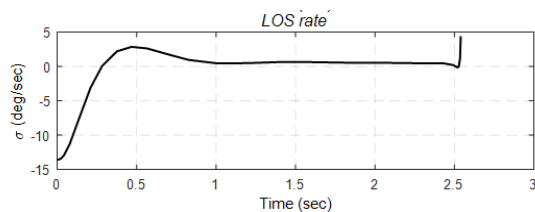
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

شکل (۲): درگیری برای هدف غیرمانور دهنده (سناریو ۱):

(الف) مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) شتاب هدف؛ (ت) زاویه برخورد؛ (ث) سرعت نسبی؛ (ج) نرخ زاویه خط دید.

۴-۱-۱- هدف بدون مانور

شرایط اولیه درگیری در جدول ۱ بیان شده است. همچنین، برای شبیه‌سازی مقادیر ثابت زمانی خلبان خودکار رهگیر و هدف برابر با: $\tau_T = 0.1$ و $\tau_I = 0.1$ است.

جدول (۱): سناریوهای درگیری اولیه برای هدف بدون مانور.

وسيله	X (m)	Z (m)	V ($\frac{m}{s}$)
سناریو اول			
رهگیر	۰	۰	۶۰۰
هدف	۲۵۰۰	۰	۴۰۰
سناریو دوم			
رهگیر	۰	۰	۶۰۰
هدف	۱۰۰۰۰	۰	۴۰۰

سناریو اول: با توجه به جدول ۱، زاویه خط دید اولیه در این حالت صفر می‌باشد؛ زاویه مسیر پرواز رهگیر و هدف به ترتیب برابر با $\alpha_0 = 80$ و $\beta_0 = 0$ درجه می‌باشند. برای این سناریو وزن‌های روی حالت‌ها به ترتیب $q_\sigma = 10^5$ و $q_\xi = 10^5$ هستند. همچنین، $\gamma = 7$ ، $\eta^c = 0$ در نظر گرفته شده است.

در ادامه نتایج شبیه‌سازی در شکل ۲ نشان داده شده است. بر اساس نتایج به‌دست‌آمده در این سناریو، رهگیر ابتدا به سمت بالا حرکت می‌کند و سپس به سمت هدفی که به‌صورت مستقیم در حرکت است شیرجه می‌رود. مشاهده می‌شود که این رهگیر در نقطه (۰ و ۱۵۰۰) به هدف اصابت می‌کند. کل زمان این اصابت ۲/۵۴۴ ثانیه طول می‌کشد. همان‌طور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود، خطای زاویه برخورد در لحظه برخورد به صفر رسیده است. همچنین، مقدار فاصله از دست‌دهی برابر با ۰/۲ متر است.

سناریو دوم: در این سناریو فاصله بین رهگیر و هدف را به ۱۰۰۰۰ متر افزایش می‌دهیم. برای این سناریو نیز وزن‌های حالت‌ها به ترتیب $q_\sigma = 10^5$ و $q_\xi = 10^5$ انتخاب شده است. زاویه مسیر پرواز رهگیر و هدف به ترتیب برابر با $\alpha_0 = 80$ و $\beta_0 = 0$ درجه می‌باشند و مقادیر $\gamma = 8.5$ ، $\eta^c = 0$ در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه‌سازی برای این سناریو شامل: مسیر پرواز، فرمان هدایت و شتاب رهگیر، شتاب هدف؛ زاویه برخورد، سرعت نسبی و نرخ زاویه خط دید در شکل ۳ نشان داده شده است.

از آنجایی که فاصله بین رهگیر و هدف زیاد شده است، رهگیر این بار ارتفاع بیشتری را نسبت به دو سناریو قبلی طی می‌کند و سپس به سمت هدف شیرجه می‌زند. همان‌طور که مشاهده می‌شود رهگیر توانسته در نقطه (۰ و ۶۰۰۰) متر هدف را مورد اصابت قرار دهد. همچنین مقدار فاصله از دست‌دهی برابر با ۰/۸ متر می‌باشد. زمان برخورد در این حالت نیز ۱۰/۱۵ ثانیه شده است.

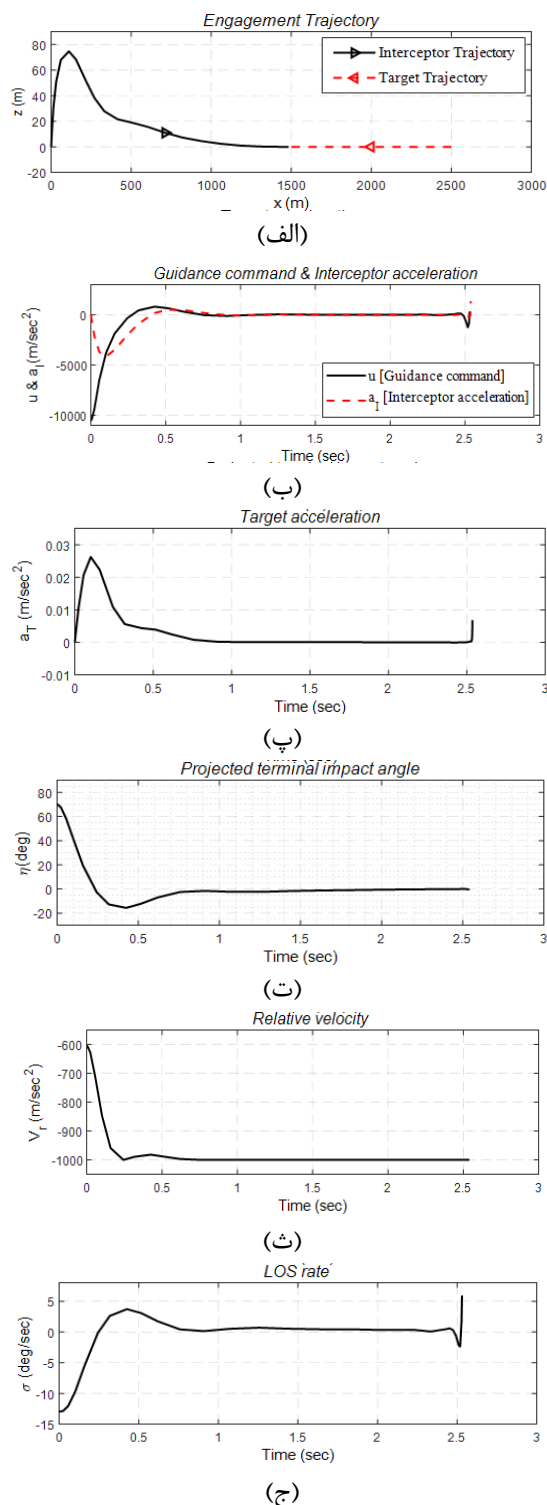
۴-۱-۲- هدف با مانور پله

در این بخش نتایج شبیه‌سازی حاصل از هدف دارای مانور پله بررسی می‌شود. موقعیت هدف و رهگیر همانند آنچه در جدول (۱) آورده شده است در نظر گرفته می‌شود.

سناریو اول: در اینجا زاویه مسیر پرواز رهگیر و هدف به ترتیب برابر با $\alpha_0 = 0$ و $\beta_0 = 0$ درجه می‌باشند و وزن‌های حالت‌ها به ترتیب $q_\sigma = 10^5$ و $q_\xi = 10^5$ هستند، $\gamma = 7$ می‌باشد و زاویه برخورد مطلوب نیز صفر است. مانور هدف نیز $6g$ در نظر گرفته می‌شود. نتایج حاصل از این سناریو در شکل ۴ نشان داده شده است. در این سناریو مشاهده می‌شود که هدف به سمت بالا در حرکت است و در حال دور شدن از رهگیر می‌باشد اما رهگیر توانسته در نقطه (۱۷۵ و ۱۵۰۰) به هدف برخورد کند. بر اساس نتایج در شکل ۴ خطای ردیابی زاویه برخورد صفر می‌شود. همچنین در زمان ۲/۵۴۸ ثانیه رهگیر به هدف اصابت می‌کند و مقدار فاصله از دست‌دهی برابر با ۱/۱ متر است.

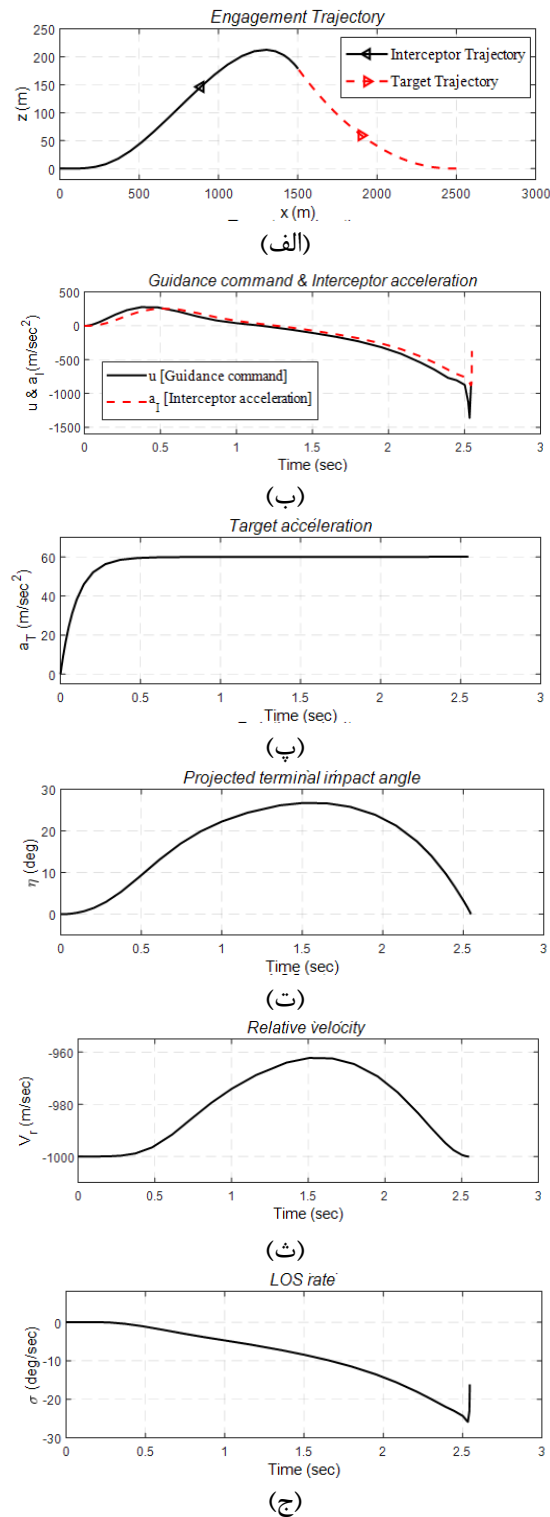
سناریو دوم: شرایط این سناریو مانند سناریو قبلی است با این تفاوت که مقدار $\alpha_0 = 10$ درجه و $q_\xi = 10^5$ می‌باشد. نتایج حاصل از این سناریو در شکل ۵ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد رهگیر توانسته در مدت‌زمان ۲/۵۳۹ ثانیه بعد از شلیک به هدف اصابت کند. همچنین، خطای ردیابی زاویه برخورد مطلوب نیز برابر با صفر بوده و مقدار فاصله از دست‌دهی برابر با ۱/۷ متر است.

سناریو سوم: در این قسمت نتایج شبیه‌سازی به ازای فاصله ۱۰۰۰۰ متری بین رهگیر و هدف و $\gamma = 8.5$ آورده شده است که نتایج آن در شکل ۶ نشان داده شده است.



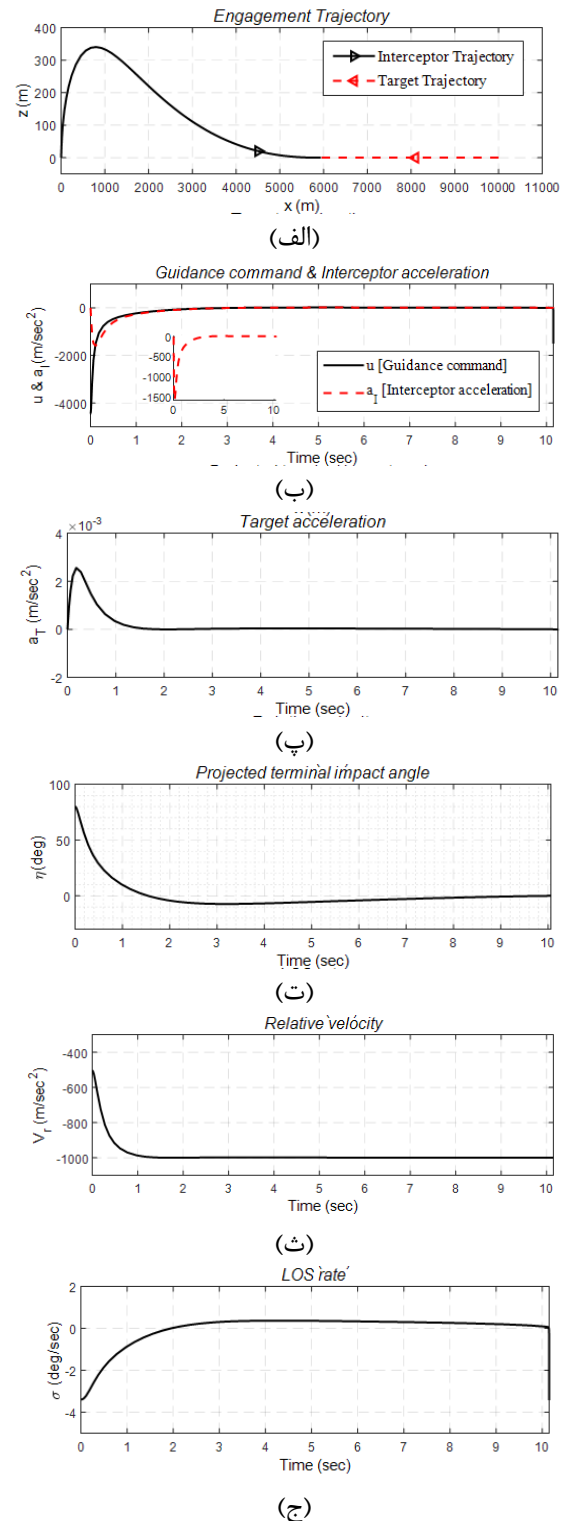
شکل (۳): درگیری برای هدف غیرمانور دهنده (سناریو ۳):

(الف) مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) شتاب هدف؛ (ت) زاویه برخورد؛ (ث) سرعت نسبی؛ (ج) نرخ زاویه خط دید.



شکل (۵): درگیری برای هدف با مانور پله (سناریو ۲): (الف)

مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) شتاب هدف؛ (ت) زاویه برخورد؛ (ث) سرعت نسبی؛ (ج) نرخ زاویه خط دید.



شکل (۴): درگیری برای هدف با مانور پله (سناریو ۱): (الف)

مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) شتاب هدف؛ (ت) زاویه برخورد؛ (ث) سرعت نسبی؛ (ج) نرخ زاویه خط دید.

همان‌طور که در شکل ۶ نشان داده شده است، هدف قصد دارد تا از رهگیر دور شود؛ ولی رهگیر موفق به برخورد با هدف می‌شود. در این سناریو مدت زمان برخورد موشک به هدف ۲۳/۵ ثانیه و مقدار فاصله از دست‌دهی برابر با ۱/۹ متر است.

۴-۱-۳- هدف با مانور موج سینوسی

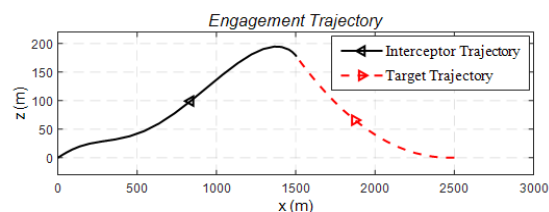
در سناریو اول، هدف دارای مانور موج سینوسی با دامنه $6g$ ، دوره زمانی ۳ ثانیه است. زوایای مسیر پرواز اولیه رهگیر به ترتیب با $\alpha_0 = 0$ درجه و $\beta_0 = 0$ درجه است. مقادیر وزن‌ها برابر $q_\sigma = 10^5$ ، $q_\xi = 10^5$ و $\gamma = 7$ است. نتایج شبیه‌سازی شامل مسیر پرواز، فرمان هدایت و شتاب رهگیر، شتاب هدف؛ زاویه برخورد، سرعت نسبی و نرخ زاویه خط دید در شکل ۷ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد فاصله از دست‌دهی ۱/۷ متر و زمان پرواز حدود ۲/۵ ثانیه است.

در سناریو دوم، هدف دارای مانور موج سینوسی با دامنه $6g$ ، دوره زمانی ۱ ثانیه است. زوایای مسیر پرواز اولیه رهگیر به ترتیب با $\alpha_0 = 30$ درجه و $\beta_0 = 0$ درجه است. مقادیر وزن‌ها برابر $q_\sigma = 10^5$ ، $q_\xi = 10^5$ و $\gamma = 7$ است. نتایج شبیه‌سازی شامل مسیر پرواز، فرمان هدایت و شتاب رهگیر، شتاب هدف؛ زاویه برخورد، سرعت نسبی و نرخ زاویه خط دید در شکل ۸ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد فاصله از دست‌دهی ۲/۱ متر و زمان پرواز حدود ۲/۵ ثانیه است.

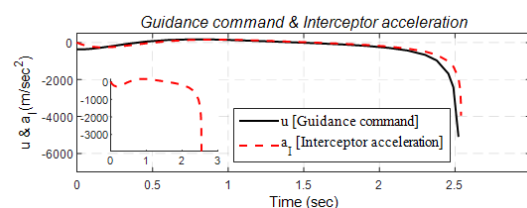
در سناریو سوم، هدف دارای مانور موج سینوسی با دامنه $6g$ ، دوره زمانی ۳ ثانیه است. زوایای مسیر پرواز اولیه رهگیر به ترتیب با $\alpha_0 = 0$ درجه و $\beta_0 = 0$ درجه است. مقادیر وزن‌ها برابر $q_\sigma = 10^5$ ، $q_\xi = 10^5$ و $\gamma = 7$ است. نتایج شبیه‌سازی شامل مسیر پرواز، فرمان هدایت و شتاب رهگیر، شتاب هدف؛ زاویه برخورد، سرعت نسبی و نرخ زاویه خط دید در شکل ۹ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد فاصله از دست‌دهی ۲/۳ متر و زمان پرواز حدود ۲/۵ ثانیه است.

۴-۱-۴- هدف با مانور تصادفی

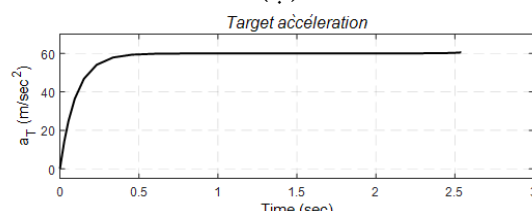
در این سناریو هدف یک مانور تصادفی [۵۰] دارد که با عبور نویز سفید از یک فیلتر درجه سوم ایجاد شده است. در شبیه‌سازی قدرت نویز ۵۰۰۰ در نظر گرفته شده است.



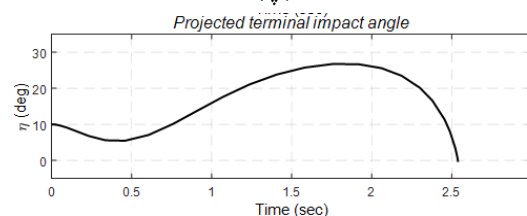
(الف)



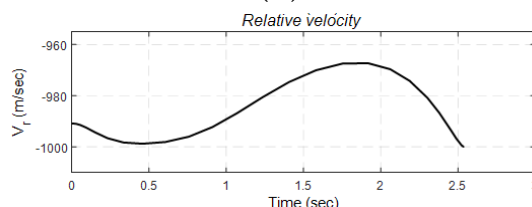
(ب)



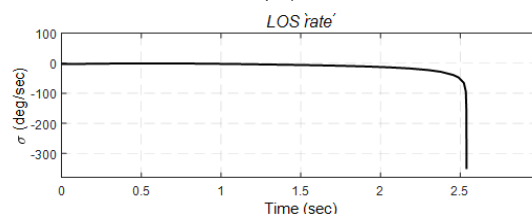
(پ)



(ت)



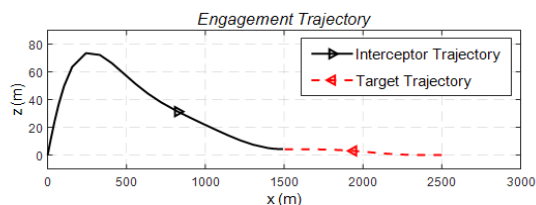
(ث)



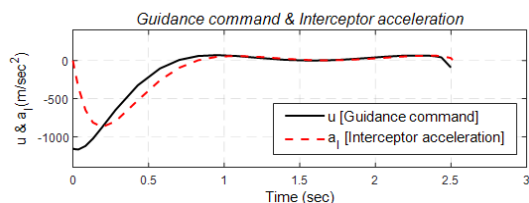
(ج)

شکل (۶): درگیری برای هدف با مانور پله (سناریو ۳): (الف)

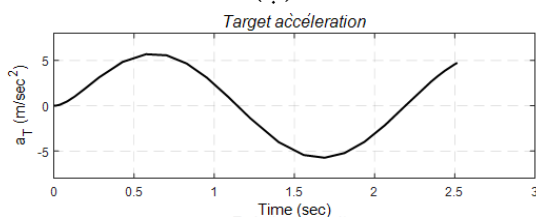
مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) شتاب هدف؛ (ت) زاویه برخورد؛ (ث) سرعت نسبی؛ (ج) نرخ زاویه خط دید.



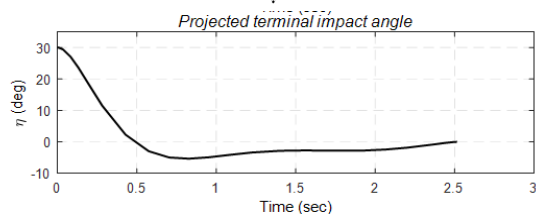
(الف)



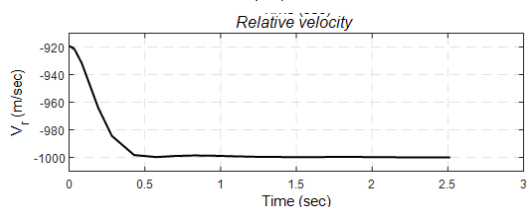
(ب)



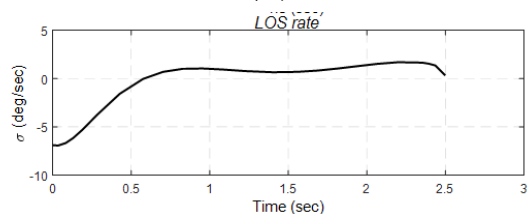
(پ)



(ت)

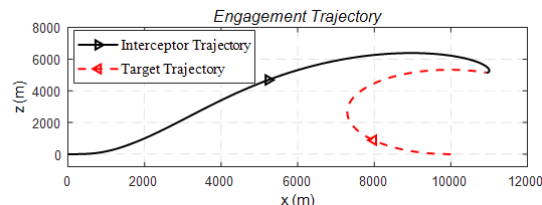


(ث)

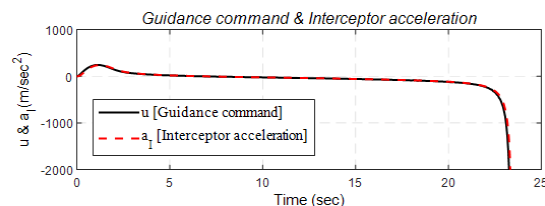


(ج)

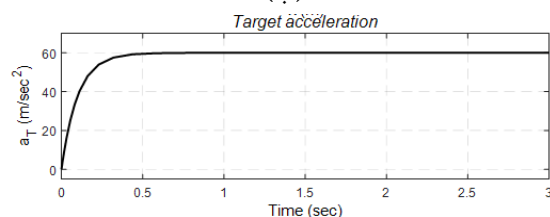
شکل (۸): درگیری برای هدف با مانور سینوسی (سناریو ۲): (الف) مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) شتاب هدف؛ (ت) زاویه برخورد؛ (ث) سرعت نسبی؛ (ج) نرخ زاویه خط دید.



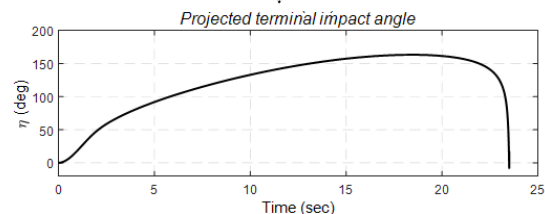
(الف)



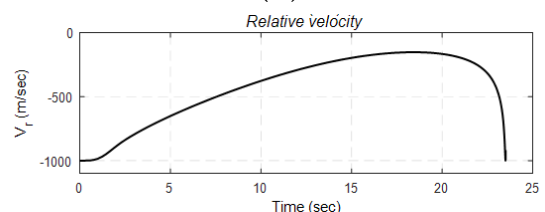
(ب)



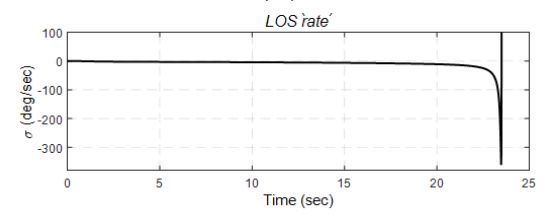
(پ)



(ت)

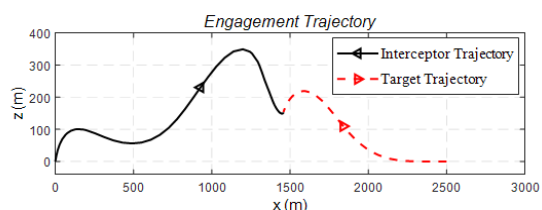


(ث)

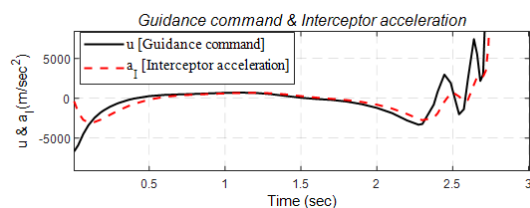


(ج)

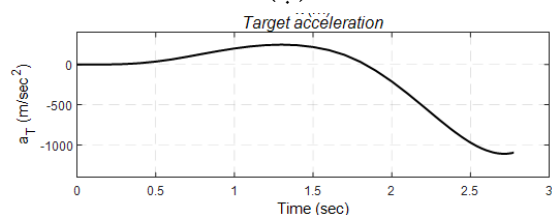
شکل (۷): درگیری برای هدف با مانور سینوسی (سناریو ۱): (الف) مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) شتاب هدف؛ (ت) زاویه برخورد؛ (ث) سرعت نسبی؛ (ج) نرخ زاویه خط دید.



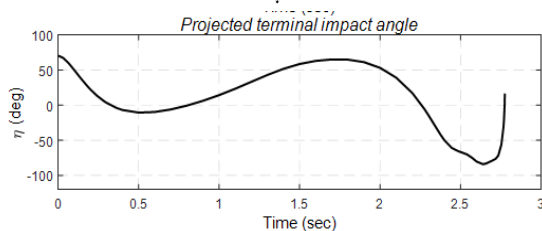
(الف)



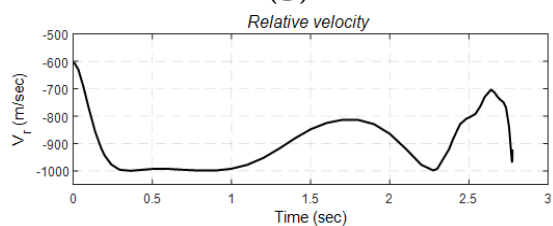
(ب)



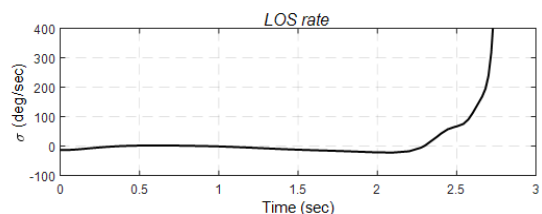
(پ)



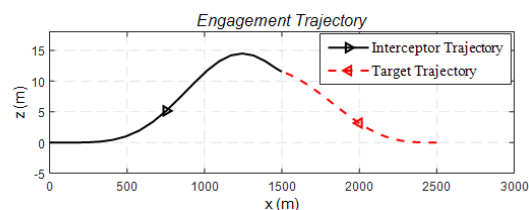
(ت)



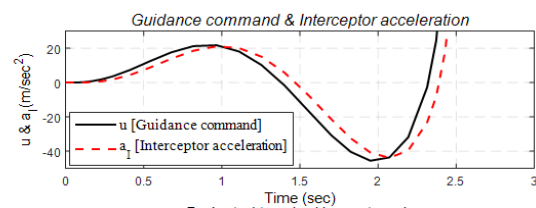
(ث)



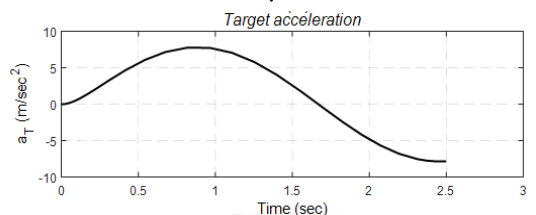
(ج)



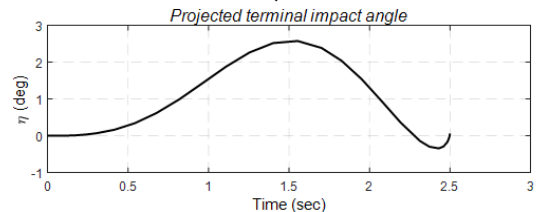
(الف)



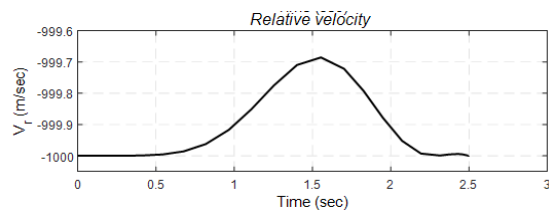
(ب)



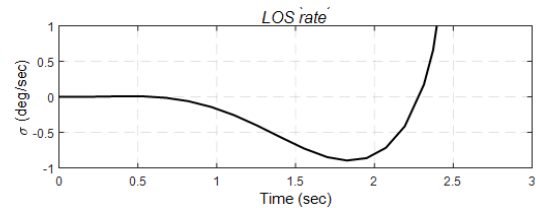
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

شکل (۱۰): درگیری در برابر هدف با مانور تصادفی: الف) مسیر پرواز؛ ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ پ) شتاب هدف؛ ت) زاویه برخورد؛ ث) سرعت نسبی؛ ج) نرخ زاویه خط دید.

شکل (۹): درگیری برای هدف با مانور سینوسی (سناریو ۳: الف) مسیر پرواز؛ ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ پ) شتاب هدف؛ ت) زاویه برخورد؛ ث) سرعت نسبی؛ ج) نرخ زاویه خط دید.

$$M = \frac{V_I}{\sqrt{1.4RT}} \quad , \quad R = 288 \quad (57)$$

که در آن تغییرات دما T با ارتفاع Z_I ارتباط دارد:

$$T = \begin{cases} 288.16 - 0.0065Z_I & Z_I < 1.15 \\ 216.66 & Z_I \geq 1.15 \end{cases} \quad (58)$$

واحد دما کلوین است. سطح مقطع s استفاده شده در معادله (۵۱)، $s = 1m^2$ در نظر گرفته شده است، و مشخصات رانش و جرم پرنده نیز به صورت ذیل است:

$$T_I = \begin{cases} 33000 \text{ N} & 0 \leq t < 1.5s \\ 7500 \text{ N} & 1.5s \leq t < 8.5s \\ 0 \text{ N} & t \geq 8.5s \end{cases} \quad (59)$$

$$m_I = \begin{cases} 135 - 14.53t \text{ Kg} & 0 \leq t < 1.5s \\ 113.205 - 3.331t \text{ Kg} & 1.5s \leq t < 8.5s \\ 90.035 \text{ Kg} & t \geq 8.5s \end{cases} \quad (60)$$

چگالی اتمسفر نیز برابر است با:

$$\rho(Z_I) = 1.15579 - 1.058 \times 10^{-4}Z_I + 3.725 \times 10^{-9}Z_I^2 - 6 \times 10^{-14}Z_I^3 \quad , \quad Z_I \in [0, 20000] \quad (61)$$

۴-۲-۱- هدف با مانور پله

سناریو اول: در اینجا زاویه مسیر پرواز رهگیر و هدف به ترتیب برابر با $\alpha_0 = 0$ درجه و $\beta_0 = 0$ درجه می باشند و وزن حالت ها به ترتیب $q_\sigma = 10^5$ و $q_\xi = 10^5$ هستند، $\gamma = 7$ می باشد و زاویه برخورد مطلوب نیز صفر است. مانور هدف نیز 6g در نظر گرفته می شود. شرایط اولیه درگیری نیز در جدول ۲ بیان شده است. نتایج حاصل از این سناریو در شکل های (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده است. برای این سناریو فاصله از دست دهی ۰/۷ متر و زمان درگیری ۴/۵ ثانیه است.

همان طور که در شکل ۱۲ نشان داده شده است، سرعت رهگیر از ۶۰۰ متر بر ثانیه افزایش یافته و در زمان ۱/۵ ثانیه به حداکثر مقدار خود می رسد و از این زمان به بعد تا لحظه برخورد سرعت کاهش می یابد که در زمان برخورد به هدف سرعت رهگیر برابر با ۷۱۵/۲ متر بر ثانیه می باشد.

جدول (۲): شرایط اولیه درگیری برای رهگیر با سرعت متغیر و مانور هدف پله در سناریو اول.

وسيله	X (m)	Z (m)	V ($\frac{m}{s}$)	زمان (s)
رهگیر	۰	۰	۶۰۰	۰
هدف	۰	۵۰۰	۴۰۰	۰
رهگیر	۳۶۳/۰۸	۱۰۳۳/۹	۸۵۸	۱/۵
هدف	۵۸/۸۸	۴۴۰۴/۱	۴۰۰	۱/۵

مانور تولید شده و مسیر رهگیری در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در این حالت فاصله از دست دهی ۱/۴ متر و زمان رهگیری ۲/۵ ثانیه است.

۴-۲-۲- نتایج شبیه سازی به ازای سرعت متغیر رهگیر

به دلیل تأثیرات آیرودینامیکی و وجود درگ ممکن است سرعت رهگیر در طول دوره درگیری ثابت نماند. برای در نظر گرفتن چنین عواملی، در این بخش، یک مدل رهگیر نزدیک به واقعیت در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت رهگیر با در نظر گرفتن آیرودینامیک رهگیر به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= V_I \sin \alpha \\ \dot{z}_I &= V_I \cos \alpha \\ \dot{T}_I &= \frac{m_I}{T_I - D} - g \sin \alpha \\ \dot{\alpha} &= \frac{a_I - g \cos \alpha}{V_I} \\ \dot{a}_I &= \frac{u - a_I}{\tau_I} \end{aligned} \quad (49)$$

ثابت زمانی خلبان خودکار رهگیر نیز $\tau_I = 0.1$ ثانیه است. نیروی آیرودینامیک که بر روی رهگیر اعمال می شود به صورت زیر مدل سازی شده است:

$$D = D_0 + D_i \quad (50)$$

$$D_0 = C_{a0} \bar{Q} s \quad (51)$$

$$D_i = \frac{K a_I^2 m_I^2}{\bar{Q} s} \quad (52)$$

$$K = \frac{1}{\pi A_r e} \quad (53)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \rho V_I^2 \quad (54)$$

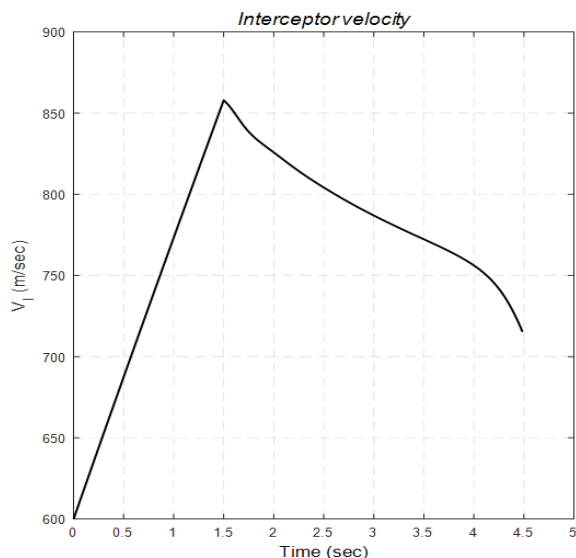
که در آن C_{a0} ضریب درگ صفر، K ضریب درگ القایی، A_r نسبت ابعاد، e ضریب کارایی، ρ چگالی اتمسفر، s سطح مقطع و $\bar{Q}$ فشار دینامیکی است. ضریب درگ صفر و ضریب درگ القایی به صوت زیر بیان می شود [۵۱-۵۵]:

$$C_{a0} = \begin{cases} 0.02 & M < 0.93 \\ 0.02 + 0.2(M - 0.93) & 0.93 \leq M < 1.03 \\ 0.04 + 0.06(M - 1.03) & 1.03 \leq M < 1.1 \\ 0.0442 + 0.007(M - 1.1) & M \geq 1.1 \end{cases} \quad (55)$$

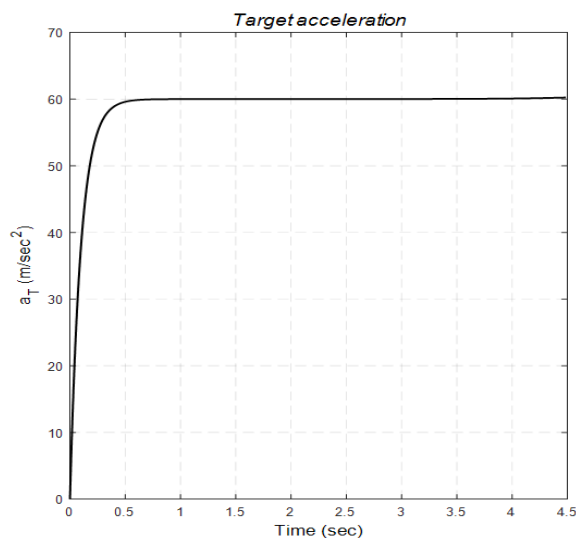
$$K = \begin{cases} 0.02 & M < 1.15 \\ 0.02 + 0.245(M - 1.15) & M \geq 1.15 \end{cases} \quad (56)$$

که در آن M عدد ماخ است. عدد ماخ M عبارت است از:

هستند، $\gamma = 7$ می‌باشد و زاویه مطلوب برخورد نیز صفر است. دامنه مانور پله‌ای هدف برابر با $5g$ است. شرایط اولیه درگیری این سناریو در جدول ۳ نشان داده شده است.

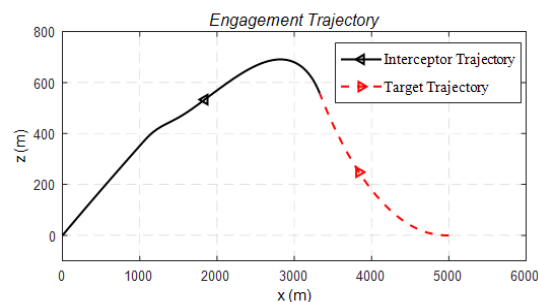


(الف)

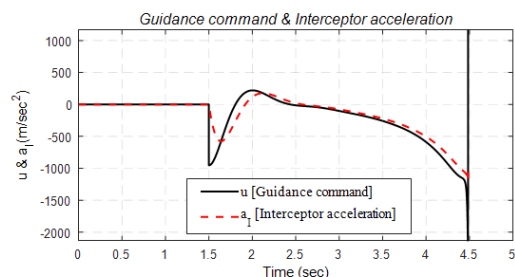


(ب)

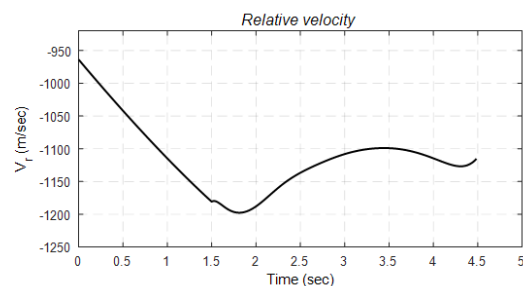
شکل (۱۲): درگیری برای هدف با مانور پله و ره‌گیر با سرعت متغیر (سناریو ۱): (الف) منحنی سرعت متغیر ره‌گیر؛ (ب) منحنی شتاب هدف. نتایج شبیه‌سازی این سناریو شامل مسیر پرواز، دستور شتاب، سرعت نزدیک شونده، زاویه برخورد، سرعت موشک و شتاب هدف در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است. همان‌طور



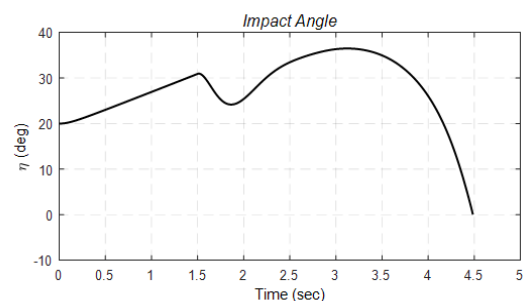
(الف)



(ب)



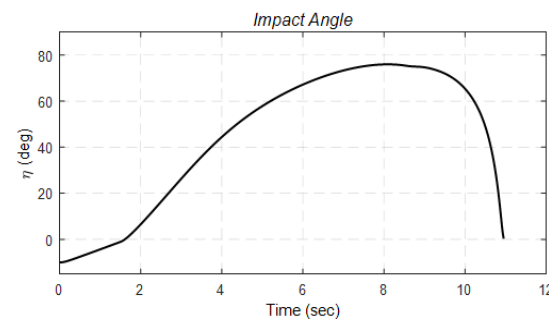
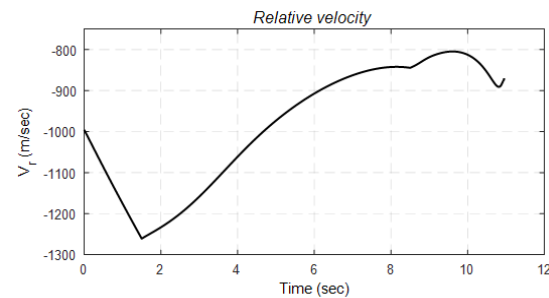
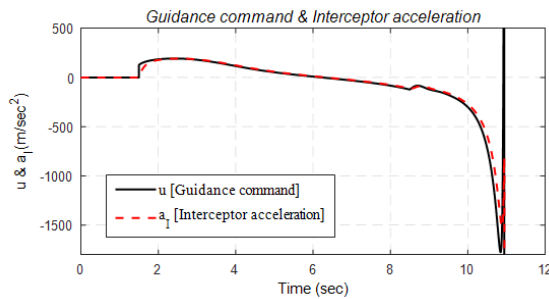
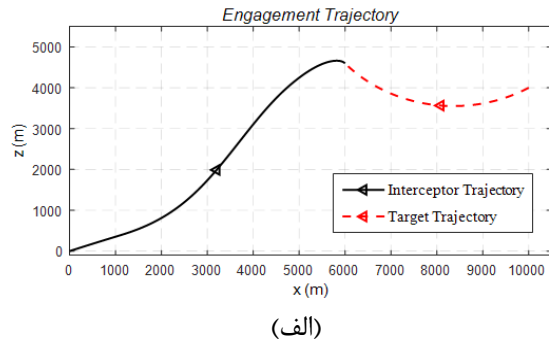
(پ)



(ت)

شکل (۱۱): درگیری برای هدف با مانور پله و ره‌گیر با سرعت متغیر (سناریو ۱): (الف) مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب ره‌گیر؛ (پ) سرعت نسبی؛ (ت) زاویه برخورد.

سناریو دوم: در این سناریو زاویه مسیر پرواز ره‌گیر و هدف به ترتیب برابر با $\alpha_0 = 20$ درجه و $\beta_0 = -30$ درجه می‌باشند و وزن حالت‌ها به ترتیب $q_\sigma = 10^5$ و $q_\xi = 10^5$



شکل (۱۳): درگیری برای هدف با مانور پله و رهگیر با سرعت متغیر (سناریو ۲): (الف) مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) سرعت نسبی؛ (ت) زاویه برخورد.

که در شکل ۱۴ مشهود است، سرعت رهگیر از ۶۰۰ متر بر ثانیه افزایش یافته و در زمان ۱/۵ ثانیه به حداکثر مقدار خود می‌رسد و در زمان برخورد به هدف سرعت رهگیر برابر با ۴۷۰/۵ متر بر ثانیه می‌باشد. زمان برخورد رهگیر و هدف نیز ۱۰/۹۴ ثانیه است و مقدار فاصله از دست‌دهی برابر با ۲/۲ متر است.

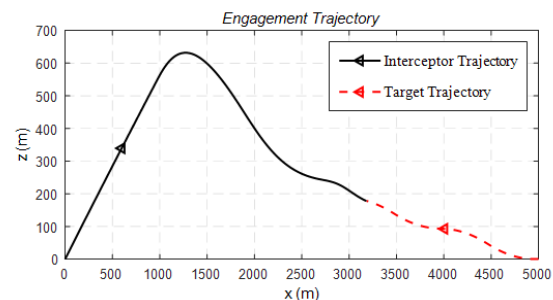
جدول (۳): شرایط اولیه درگیری برای رهگیر با سرعت متغیر و مانور هدف پله در سناریو دوم.

وسيله	X (m)	Z (m)	V ($\frac{m}{s}$)	زمان (s)
ره‌گیر	۰	۰	۶۰۰	۰
هدف	۴۰۰۰	۱۰۰۰۰	۴۰۰	۰
ره‌گیر	۳۶۴/۳۸	۱۰۳۶/۲	۸۶۲/۳	۱/۵
هدف	۳۷۴۴	۹۴۵۸/۳	۴۰۰	۱/۵

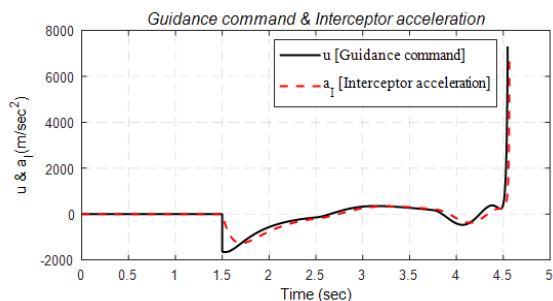
۴-۲-۲- هدف با مانور موج مربعی

سناریو اول: در اینجا زاویه مسیر پرواز رهگیر و هدف به ترتیب برابر با $\alpha_0 = 30$ درجه و $\beta_0 = 0$ درجه می‌باشند و وزن حالت‌ها به ترتیب $q_\sigma = 10^5$ و $q_\xi = 10^5$ هستند، $\gamma = 7$ می‌باشد و زاویه برخورد مطلوب نیز صفر است. هدف دارای یک مانور موج مربعی با دامنه $6g$ و دوره زمانی ۲/۵ ثانیه است. شرایط اولیه درگیری نیز در جدول ۴ بیان شده است. نتایج حاصل از این سناریو در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نشان داده شده است. برای این سناریو فاصله از دست‌دهی ۰/۹ متر و زمان درگیری ۴/۵ ثانیه است.

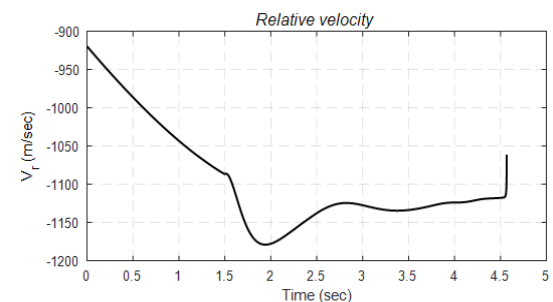
سناریو دوم: در اینجا زاویه مسیر پرواز رهگیر و هدف به ترتیب برابر با $\alpha_0 = 45$ درجه و $\beta_0 = -30$ درجه می‌باشند و وزن حالت‌ها به ترتیب $q_\sigma = 10^5$ و $q_\xi = 10^5$ هستند، $\gamma = 7$ می‌باشد و زاویه برخورد مطلوب نیز صفر است. هدف دارای یک مانور موج مربعی با دامنه $4g$ و دوره زمانی ۴ ثانیه است. شرایط اولیه درگیری نیز در جدول ۵ بیان شده است. نتایج حاصل از این سناریو در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نشان داده شده است. برای این سناریو فاصله از دست‌دهی ۱/۱ متر و زمان درگیری ۴/۵ ثانیه است.



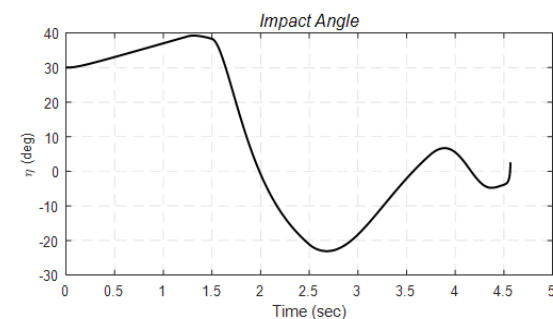
(الف)



(ب)

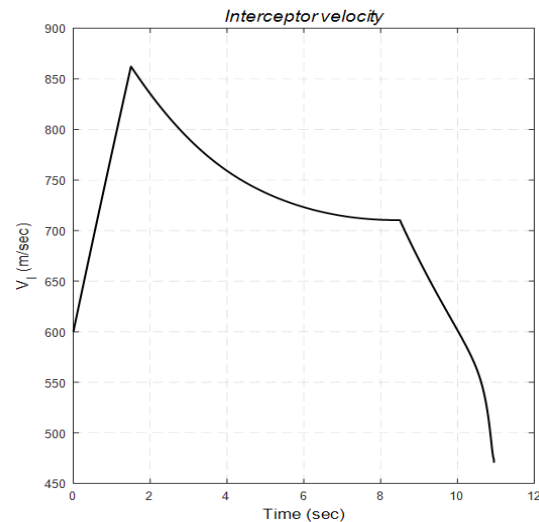


(پ)

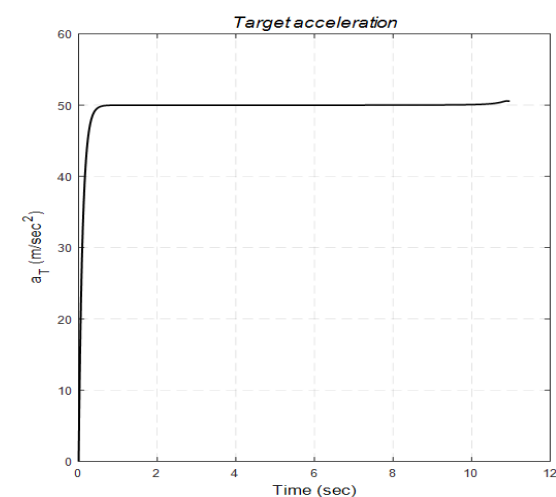


(ت)

شکل (۱۵): درگیری برای هدف با مانور موج مربعی و رهگیر با سرعت متغیر (سناریو ۱): (الف) مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) سرعت نسبی؛ (ت) زاویه برخورد.



(الف)

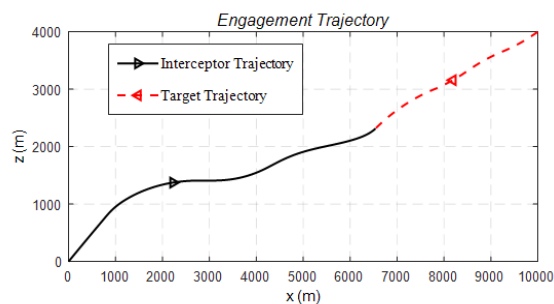


(ب)

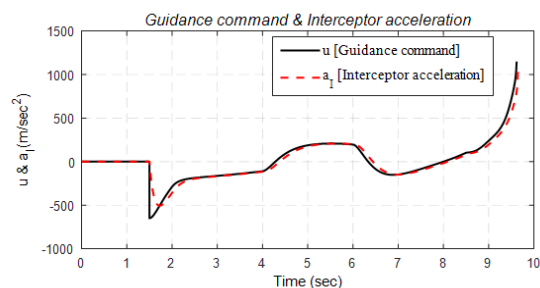
شکل (۱۴): درگیری برای هدف با مانور پله و رهگیر با سرعت متغیر (سناریو ۲): (الف) منحنی سرعت متغیر رهگیر؛ (ب) منحنی شتاب هدف.

جدول (۴): شرایط اولیه درگیری برای رهگیر با سرعت متغیر و مانور هدف موج مربعی در سناریو اول.

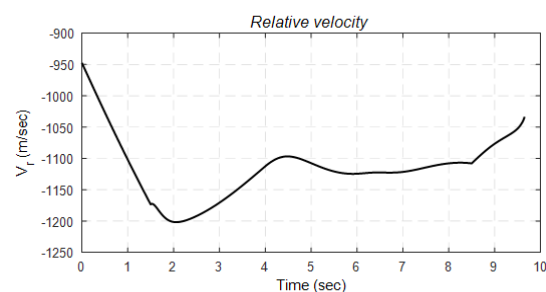
وسيله	X (m)	Z (m)	$V \left(\frac{m}{s} \right)$	زمان (s)
رهگیر	۰	۰	۶۰۰	۰
هدف	۰	۵۰۰۰	۴۰۰	۰
رهگیر	۵۳۸/۹۱	۹۵۵/۰۲	۸۵۹/۷۱	۱/۵
هدف	۵۷/۰۷	۴۴۰۳/۸	۴۰۰	۱/۵



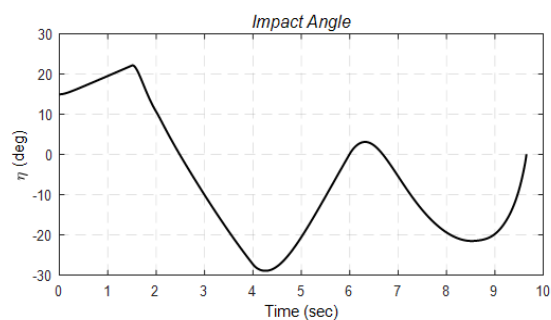
(الف)



(ب)

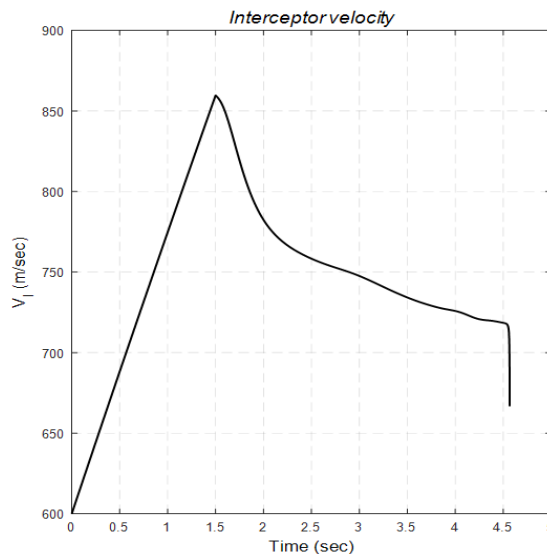


(پ)

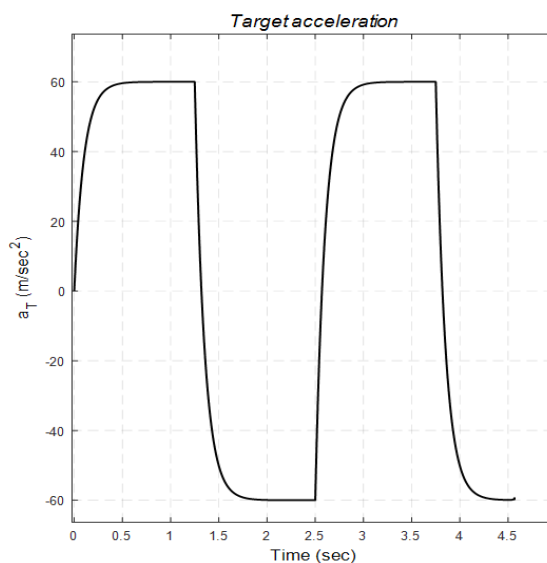


(ت)

شکل (۱۷): درگیری برای هدف با مانور موج مربعی و رهگیر با سرعت متغیر (سناریو ۲): (الف) مسیر پرواز؛ (ب) فرمان هدایت و شتاب رهگیر؛ (پ) سرعت نسبی؛ (ت) زاویه برخورد.



(الف)



(ب)

شکل (۱۶): درگیری برای هدف با مانور مربعی و رهگیر با سرعت متغیر (سناریو ۱): (الف) منحنی سرعت متغیر رهگیر؛ (ب) منحنی شتاب هدف.

جدول (۵): مدل واقع‌گرایانه رهگیر برای سناریو دوم با مانور موج مربعی.

وسيله	X (m)	Z (m)	$V \left(\frac{m}{s} \right)$	زمان (s)
ره‌گیر	۰	۰	۶۰۰	۰
هدف	۴۰۰۰	۱۰۰۰۰	۴۰۰	۰
ره‌گیر	۷۶۶/۹۶	۷۸۰/۰۸	۸۵۵/۸۹	۱/۵
هدف	۳۷۳۵	۹۴۶۲/۳	۴۰۰	۱/۵

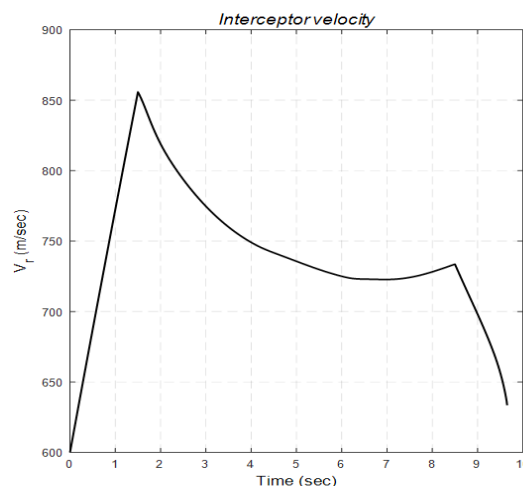
$\alpha_0 = 30$ درجه و $\beta_0 = 0$ درجه است و مقادیر زاویه برخورد مطلوب برابر، $\eta^c \in \{-30, 30, 60\}$ درجه در نظر گرفته شده است. شکل ۱۹ به ترتیب مسیر درگیری، شتاب جانبی رهگیر و زاویه برخورد نهایی در طول مدت درگیری را نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند که رهگیر در زوایای برخورد مطلوب تعریف شده به هدف برخورد کرده است.

سناریو دوم: فرض بر این است که هدف شتاب ثابت $6g$ و دوره زمانی ۴ ثانیه مانور می‌کند. شرایط اولیه درگیری مطابق جدول (۵) است. مقادیر پارامترهای طراحی برابر $q_\sigma = 10^5$ ، $q_\xi = 10^5$ و $\gamma = 7$ است. مقادیر زاویه برخورد مطلوب برابر $\eta^c \in \{-30, 30, 60\}$ درجه است. شکل (۲۰) به ترتیب مسیر درگیری، شتاب جانبی رهگیر و زاویه برخورد نهایی پیش‌بینی شده در طول مدت درگیری را نشان می‌دهد. در ادامه به مقایسه روش پیشنهادی با روش APN پرداخته شده است. فرض بر این است که هدف با شتاب جانبی ثابت $6g$ مانور می‌کند. شرایط اولیه درگیری مطابق جدول (۲) است. در همه موارد مقادیر $q_\sigma = 10^5$ ، $q_\xi = 10^5$ و $\gamma = 7$ است. همچنین، مقادیر زاویه مسیر پروازی رهگیر و هدف به ترتیب $\alpha_0 = 60$ درجه و $\beta_0 = 30$ درجه است. همان‌طور که در شکل ۲۱ مشاهده می‌شود در روش پیشنهادی رهگیر ارتفاع کمتری را پیموده است. همچنین، مقدار فاصله از دست دهی روش پیشنهادی 0.7 متر است؛ این در حالی است که روش APN مقدار فاصله از دست دهی $1/3$ متر دارد.

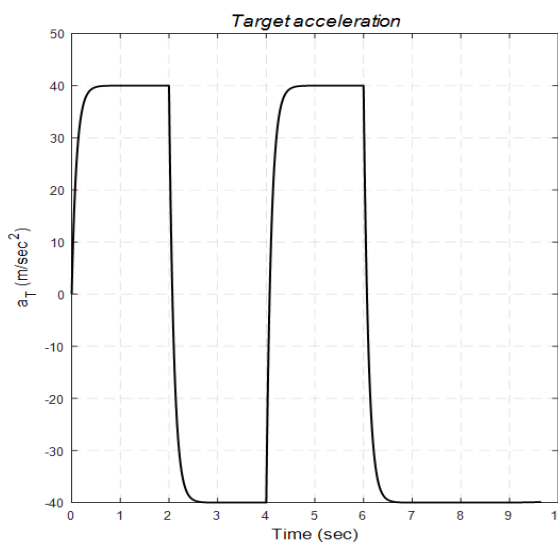
۴-۴- تحلیل حساسیت

در این بخش یک تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای قانون هدایت معرفی شده در دو سناریو مختلف انجام شده است.

سناریو اول: فرض بر این است که هدف با شتاب جانبی ثابت $6g$ مانور می‌کند. شرایط اولیه درگیری مطابق جدول ۲ است. در همه موارد مقادیر $q_\sigma = 10^5$ ، $q_\xi = 10^5$ و زاویه برخورد مطلوب $\eta^c = 0$ است. همچنین، مقادیر زاویه مسیر پروازی رهگیر و هدف به ترتیب $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ درجه است و مقادیر پارامتر $\gamma \in \{5, 10, 20\}$ در نظر گرفته شده است. شکل ۲۲ به ترتیب زاویه برخورد نهایی و نرخ چرخش خط دید را در طول مدت درگیری نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند که رهگیر در γ های مختلف به هدف برخورد کرده است.



(الف)



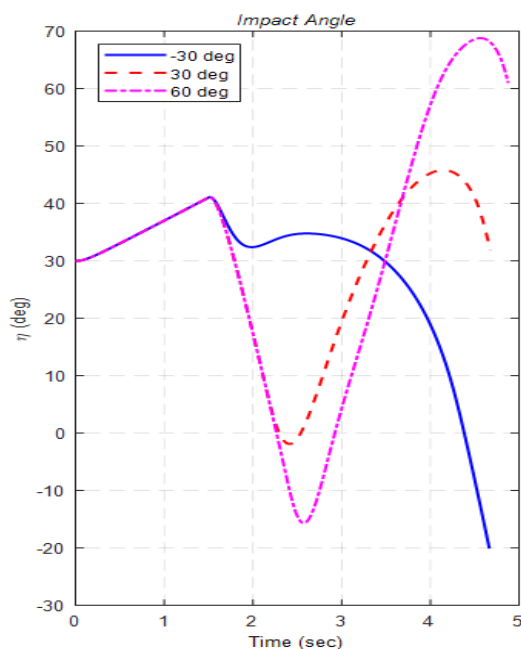
(ب)

شکل (۱۸): درگیری برای هدف با مانور مربعی و رهگیر با سرعت متغیر: الف) منحنی سرعت متغیر رهگیر؛ ب) منحنی شتاب هدف (سناریو ۲).

۴-۳- هدف با مانور با زوایای مطلوب مختلف

در این بخش قصد داریم در دو سناریو مختلف به بررسی رهگیری هدف در زوایای مختلف برخورد بپردازیم تا از عملکرد قانون هدایت طراحی بررسی شود.

سناریو اول: فرض بر این است که هدف با شتاب جانبی ثابت $6g$ مانور می‌کند. شرایط اولیه درگیری مطابق جدول ۲ است. در همه موارد مقادیر $q_\sigma = 10^5$ ، $q_\xi = 10^5$ و $\gamma = 7$ است. همچنین، مقادیر زاویه مسیر پروازی رهگیر و هدف به ترتیب



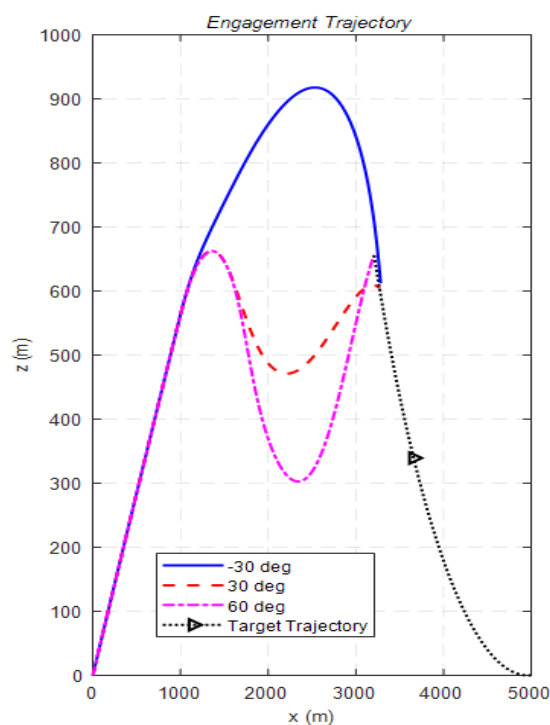
(ب)

ادامه شکل (۱۹).

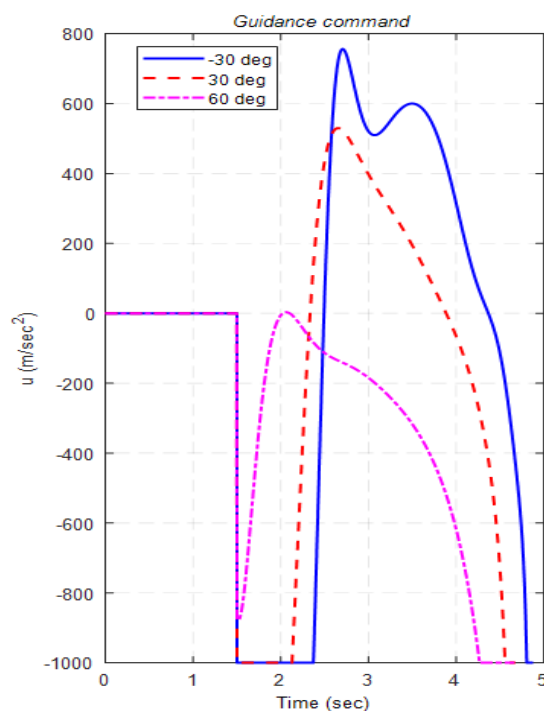
سناریو دوم: فرض بر این است که هدف با شتاب جانبی ثابت $6g$ مانور می‌کند. شرایط اولیه درگیری مطابق جدول ۲ است. در همه موارد مقادیر $q_\sigma = 10^5$ ، $q_\xi = 10^5$ و $\gamma = 7$ و همچنین، زاویه برخورد مطلوب $\eta^c = 0$ است. همچنین، مقادیر زاویه مسیر پروازی رهگیر و هدف به ترتیب $\alpha_0 = 0$ و $\beta_0 = 0$ درجه است و مقادیر تابع وزنی $Q(x)$ مختلف است. شکل (۲۳) به ترتیب زاویه برخورد نهایی و نرخ چرخش خط دید را در طول مدت درگیری نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که رهگیر در $Q(x)$ های مختلف به هدف برخورد کرده است.

۵- جمع‌بندی

در این مقاله یک قانون هدایت مقاوم با زاویه برخورد محدود با استفاده از تئوری بازی دیفرانسیلی و کنترل بهینه غیرخطی ارائه شد. در این رویکرد شتاب رهگیر و شتاب هدف به عنوان دو ورودی مجزا محاسبه شدند؛ رهگیر به دنبال کمینه کردن تابع هزینه و هم‌زمان با آن فرض شد که هدف به دنبال بیشینه کردن همان تابع هزینه است. معادلات غیرخطی دارای نامعینی در مسئله هدایت ارائه گردید و بر اساس رویکرد



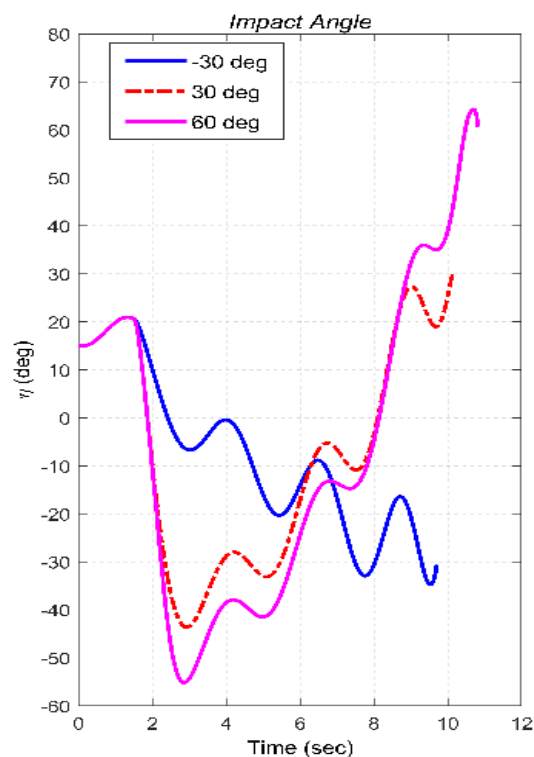
(الف)



(ب)

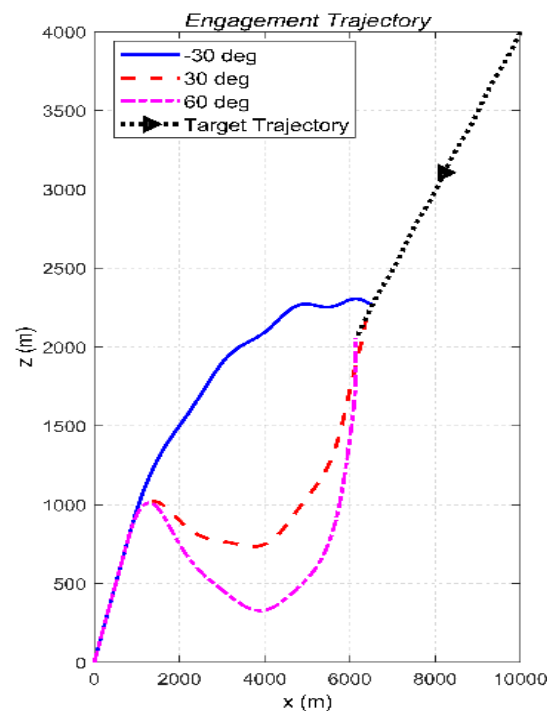
ادامه شکل (۱۹): رهگیری در زوایای مختلف برخورد برای سناریو اول: (الف) مسیر پرواز؛ (ب) دستور شتاب؛ (پ) زاویه برخورد.

مقاوم مبتنی بر معادلات ریکاتی وابسته به حالت مسئله حل گردید.

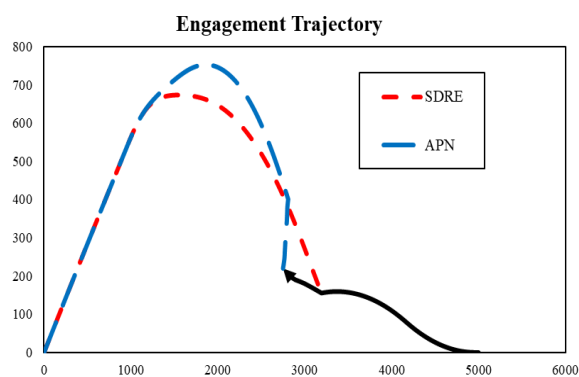


(پ)

ادامه شکل (۲۰).

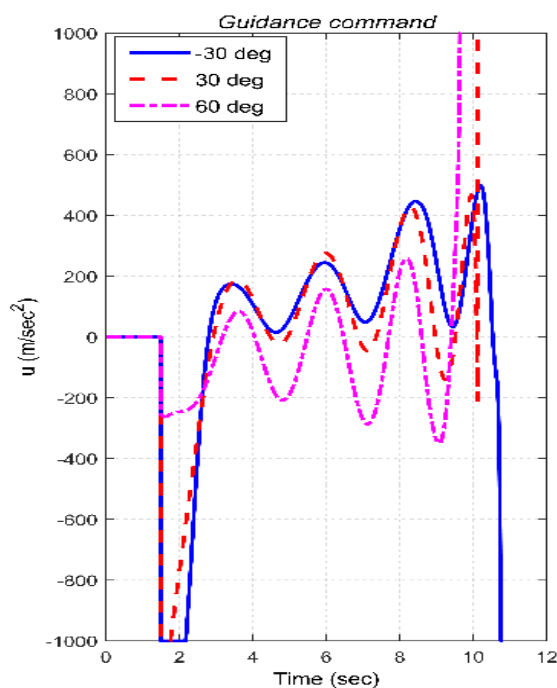


(الف)



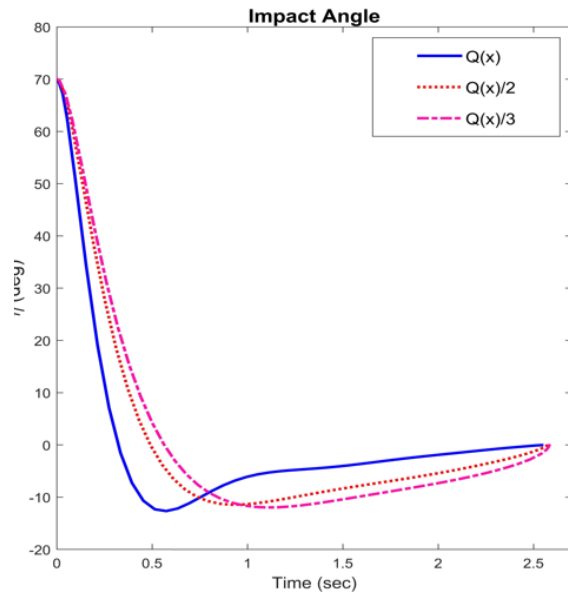
شکل (۲۱): مقایسه روش پیشنهادی با روش هدایت تناسبی افزوده.

قانون ارائه شده برای دو سناریو رهگیر با سرعت ثابت و سرعت متغیر، با در نظر گرفتن آیرودینامیک رهگیر، شبیه سازی و نتایج آن برای سناریوهایی با زوایای مسیر پرواز اولیه مختلف رهگیر و اهداف با مانورهای پله، سینوسی و تصادفی ارائه شد. نتایج شبیه سازی در سناریوهای مختلف مؤید کارکرد مطلوب قانون هدایت نوین ارائه شده برای برخورد در زوایای مطلوب برای اهداف با شتاب ثابت، سینوسی و تصادفی است.

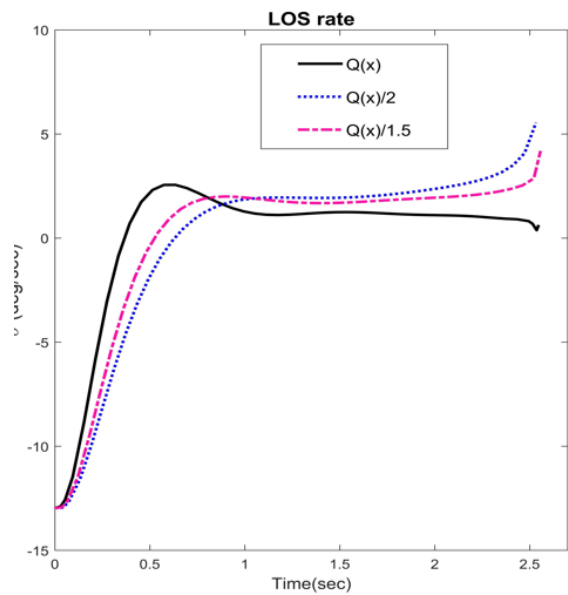


(ب)

شکل (۲۰): رهگیری در زوایای مختلف برخورد برای سناریو دوم: الف) مسیر پرواز؛ ب) دستور شتاب؛ پ) زاویه برخورد.

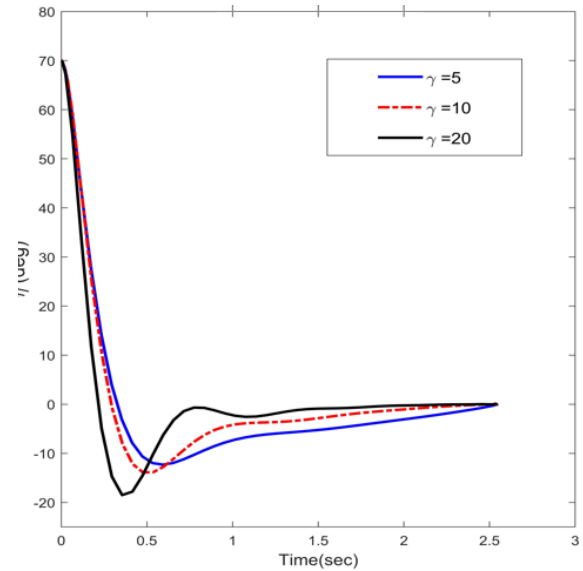


(الف)

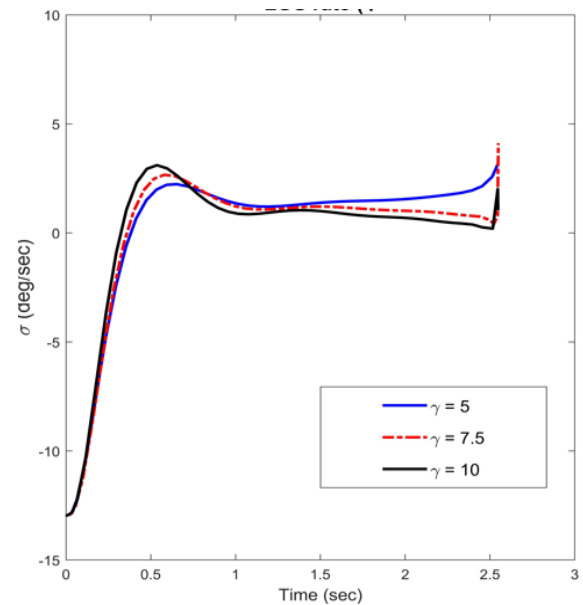


(ب)

شکل (۲۳): ره‌گیری در مقادیر مختلف $Q(x)$: (الف) زاویه برخورد نهایی؛ (ب) نرخ چرخش خط دید.



(الف)



(ب)

شکل (۲۲): ره‌گیری در مقادیر مختلف γ : (الف) زاویه برخورد نهایی؛ (ب) نرخ چرخش خط دید.

۶- مراجع

- [1] Hu Z, Tang X, Wang Y. A 3-dimensional robust guidance law with impact angle constraint. In 2011 Chinese Control and Decision Conference (CCDC) 2011 (pp. 999-1006). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/CCDC.2011.5968330>.

- dynamics. 2006;29(2):261-8. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.14956>.
- [12] Idan M, Golan OM, Guelman M. Optimal planar interception with terminal constraints. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1995;18(6):1273-9. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.21541>.
- [13] Ryoo CK, Cho H, Tahk MJ. Closed-form solutions of optimal guidance with terminal impact angle constraint. In Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications, 2003. CCA 2003. 2003 (Vol. 1, pp. 504-509). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/CCA.2003.1223469>.
- [14] Subchan S. An indirect method for the minimum altitude of air-to-surface missile. In 2008 3rd IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications 2008 (pp. 126-131). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICIEA.2008.4582492>.
- [15] Lin LG, Xin M. Missile guidance law based on new analysis and design of SDRE scheme. Journal of guidance, control, and dynamics. 2019;42(4):853-68. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G003544>.
- [16] Bardhan R, Ghose D. Nonlinear differential games-based impact-angle-constrained guidance law. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015;38(3):384-402. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G000940>.
- [17] Zhao B, Xu S, Guo J, Jiang R, Zhou J. Integrated strapdown missile guidance and control based on neural network disturbance observer. Aerospace Science and Technology. 2019;84:170-81. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.10.025>.
- [18] Chai R, Savvaris A, Chai S. Integrated missile guidance and control using optimization-based predictive control. Nonlinear Dynamics. 2019;96:997-1015. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04835-8>.
- [19] Nobahari H, Nasrollahi S. A terminal guidance algorithm based on ant colony optimization. Computers & Electrical Engineering. 2019;77:128-46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2019.05.012>.
- [20] Sun J, Liu C. Backstepping-based adaptive dynamic programming for missile-target guidance systems with state and input constraints. Journal of the Franklin Institute. 2018;355(17):8412-40. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.franklin.2018.08.024>.
- [2] Gu WJ, Zhang RC, Yu JY. A three-dimensional missile guidance law with angle constraint based on sliding mode control. In 2007 IEEE International Conference on Control and Automation 2007 (pp. 299-302). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICCA.2007.4376367>.
- [3] Song JM, Zhang TQ. Passive homing missile's variable structure proportional navigation with terminal angular constraint. Chinese Journal of Aeronautics. 2001;14(2):83-7.
- [4] Moon J, Kim K, Kim Y. Design of missile guidance law via variable structure control. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2001;24(4):659-64. DOI: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/2.4792>.
- [5] Jeong SK, Cho SJ, Kim EG. Angle constraint biased PNG. In 2004 5th Asian Control Conference (IEEE Cat. No. 04EX904) 2004 (Vol. 3, pp. 1849-1854). IEEE.
- [6] Ratnoot A, Ghose D. Impact angle constrained interception of stationary targets. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2008;31(6):1817-22. DOI: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.37864>.
- [7] Hu Z, Cai H. An adaptive proportional guidance law against ground stationary target. In 2008 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics 2008 (pp. 1-5). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/ISSCAA.2008.4776241>.
- [8] Ghosh S, Ghose D, Raha S. Three dimensional PN based impact angle control for higher speed nonmaneuvering targets. In 2013 American Control Conference 2013 (pp. 31-36). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.2013.6579809>.
- [9] Kim M, Grider KV. Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1973 (6):852-9. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAES.1973.309659>.
- [10] Song TL, Shin SJ, Cho H. Impact angle control for planar engagements. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1999;35(4):1439-44. DOI: <https://doi.org/10.1109/7.805460>.
- [11] Ohlmeyer EJ, Phillips CA. Generalized vector explicit guidance. Journal of guidance, control, and

- [31] Qi N, Liu Y, Tang Z. Bounded differential game guidance law for interceptor with second-order maneuvering dynamics. In 2011 First International Conference on Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control 2011 (pp. 925-928). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/IMCCC.2011.233>.
- [32] Hsueh MH, Huang CI, Fu LC. A differential game based guidance law for the interceptor missiles. In IECON 2007-33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society 2007 (pp. 665-670). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/IECON.2007.4460196>.
- [33] Yi L, Yan Y, Tian G, Zhanrong J. An Improved Terminal Guidance Algorithm Based on Differential Game Theory. In 2010 International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application 2010 (Vol. 1, pp. 250-254). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/ISDEA.2010.256>.
- [34] Sun J, Liu C, Ye Q. Robust differential game guidance laws design for uncertain interceptor-target engagement via adaptive dynamic programming. International Journal of Control. 2017;90(5):990-1004. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1192687>.
- [35] Sun J, Liu C. Finite-horizon differential games for missile-target interception system using adaptive dynamic programming with input constraints. International Journal of Systems Science. 2018;49(2):264-83. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207721.2017.1401153>.
- [36] Kang S, Kim HJ, Tahk MJ. Aerial pursuit-evasion game using nonlinear model predictive guidance. In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference 2010 (p. 7880). DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2010-7880>.
- [37] Xu X, Cai Y. Design and numerical simulation of a differential game guidance law. In 2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA) 2016 (pp. 314-318). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICInfA.2016.7831842>.
- [38] Hao G, Zhuoyang Y, Xun W, Xuan C. Differential Game Guidance Law on Evader in Bearing-only Information Applications. 2017. DOI: <https://doi.org/10.13009/EUCASS2019-94>.
- [39] Liang H, Jianying WA, Yonghai WA, Linlin WA, Peng LI. Optimal guidance against active defense ballistic missiles via differential game strategies. Chinese Journal of Aeronautics. 2020;33(3):978-
- [21] Ji H, Liu X, Song Z, Zhao Y. Time-varying sliding mode guidance scheme for maneuvering target interception with impact angle constraint. Journal of the Franklin Institute. 2018;355(18):9192-208. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2017.01.036>.
- [22] Babu KR, Sarma IG, Swamy KN. Two robust homing missile guidance laws based on sliding mode control theory. In Proceedings of National Aerospace and Electronics Conference (NAECON'94) 1994 (pp. 540-547). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/NAECON.1994.332858>.
- [23] Prisner E. Game theory through examples. American Mathematical Soc.; 2014.
- [24] Ho Y, Bryson A, Baron S. Differential games and optimal pursuit-evasion strategies. IEEE Transactions on Automatic Control. 1965;10(4):385-9. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.1965.1098197>.
- [25] Turetsky V, Shinar J. Missile guidance laws based on pursuit-evasion game formulations. Automatica. 2003;39(4):607-18. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(02\)00273-X](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00273-X).
- [26] Shima T, Golan OM. Linear quadratic differential games guidance law for dual controlled missiles. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2007;43(3):834-42. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAES.2007.4383577>.
- [27] Robb M, Tsourdos A, White B. Earliest intercept line guidance using a game theory approach. In AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit 2006 (p. 6216). DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2006-6216>.
- [28] Shaferman V, Shima T. Linear quadratic guidance laws for imposing a terminal intercept angle. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2008;31(5):1400-12. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.32836>.
- [29] Xu XY, Song XN, Cai YL. RETRACTED: Differential game guidance law for a kinetic kill vehicle and its simulation. Simulation. 2019;95(9):NP1-NP1. DOI: <https://doi.org/10.1177/0037549715588839>.
- [30] Chen R, Speyer J, Lianos D. Game-theoretic homing missile guidance with autopilot lag. In AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit 2007 (p. 6535). DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2007-6535>.

- [51] Kee P, Dong L, Siong C. Near optimal midcourse guidance law for flight vehicle. In 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 1998 (p. 583). DOI: <https://doi.org/10.2514/6.1998-583>.
- [52] Ghahremani N, Nasrollahi S, Salmani A. Implementation of GPS/INS fusion algorithm using GPS pseudo range. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18(4):105-118. DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1401.18.4.8.2>.
- [53] Nasrollahi S, Khooshehmehri A. The moving mass actuated projectile attitude control and estimation using a predictive controller and estimator based on the particle filter. Journal of Aerospace Mechanics. 2021; 17(3):45-56. DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1400.17.3.4.9>.
- [54] Nasrollahi S, Khooshehmehri A, Payaminia MR. A model-aided inertial navigation system for the Remus 100 AUV. Journal of Aerospace Mechanics. 2021; 17(3):57-70. DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1400.17.3.5.0>.
- [55] Nasrollahi S, Khooshehmehri A. A model of predictive terminal guidance based on whale optimization algorithm considering the aerodynamic model of the pursuer. Journal of Aerospace Mechanics. 2021; 17(1):37-50. DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1400.17.1.4.5>.
89. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.12.009>.
- [40] Jia Y, Jie Y. Linear Quadratic Differential Game Guidance with Collision Angle Constraints. In 2019 IEEE 2nd International Conference on Automation, Electronics and Electrical Engineering (AUTEEE) 2019 (pp. 141-144). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/AUTEEE48671.2019.9033376>.
- [41] Nobahari H, Nasrollahi S. A nonlinear robust model predictive differential game guidance algorithm based on the particle swarm optimization. Journal of the Franklin Institute. 2020;357(15):11042-71. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.08.032>.
- [42] Lin F. Robust control design: an optimal control approach. John Wiley & Sons; 2007.
- [43] Ratnoo A, Ghose D. State-dependent Riccati-equation-based guidance law for impact-angle-constrained trajectories. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2009;32(1):320-6. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.37876>.
- [44] Vaddi SS, Menon PK, Ohlmeyer EJ. Numerical state-dependent Riccati equation approach for missile integrated guidance control. Journal of guidance, control, and dynamics. 2009;32(2):699-703. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.34291>.
- [45] Xin M, Balakrishnan SN, Ohlmeyer EJ. Integrated guidance and control of missiles with θ -D method. IFAC Proceedings Volumes. 2004;37(6):629-34. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)32246-2](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)32246-2).
- [46] Ball JA, Helton JW. H/sup infinity/control for nonlinear plants: connections with differential games. In Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, 1989 (pp. 956-962). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/CDC.1989.70268>.
- [47] Cloutier JR. State-dependent Riccati equation techniques: an overview. In Proceedings of the 1997 American control conference (Cat. No. 97CH36041) 1997 (Vol. 2, pp. 932-936). IEEE. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.1997.609663>.
- [48] Friedland B. Advanced control system design. Prentice-Hall, Inc.; 1995.
- [49] Rawling AG. On nonzero miss distance. Journal of Spacecraft and Rockets. 1969;6(1):81-3. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.29539>.
- [50] Kain JE, Yost DJ. Command to line-of-sight guidance: A stochastic optimal control problem. Journal of Spacecraft and Rockets. 1977;14(7):438-44. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.57220>.